工程船舶文集

第九辑　船舶动力学的概率理论

第六机械工业部
第七研究院
第七〇八研究所

1977年9月

译　　序

概率统计理论近年来已被广泛地应用在船舶耐波性能的预报上。为了能较系统地介绍这门年青的学科，我们曾翻译了“海上船舶性能预报统计方法”(国防工业出版社)一书。但是，我们感到，那本书重点是叙述统计理论在舰船工程领域中的应用，而对统计理论本身以及与耐波性息息相关的波浪原理就失之过简，对于初学者来说会有一定的不便。因此，我们再翻译了这本书。

这本书层次较分明，共分三部分。第一部分扼要阐述了概率和随机过程理论。第二部分是阐述有关波浪的基础理论，并汇集了海洋物理学的有关资料。第三部分是船舶耐波性理论，作为前面两部分的应用，主要是介绍线性理论，也兼及非线性概念。对于具有高等数学知识的造船专业读者来说应是没有什么困难的。

本书的三部分分别由胡恺，徐玉鹤，张素荣三同志翻译，练淦同志校对。全书图、表均承陈永泰同志协助复制。

译文中对原书前言部分曾作些删节，个别错误亦予更正。由于我们水平有限，错误之处请读者批评指正。

前　　言

即使在陆地上观察、研究船舶在波浪中的运动，分析者也还是有他自己的困难。处理一个主要是低频的随机过程，他需要有显然是难于收集到的波浪资料、并不得不进行一系列高难度的计算，而结果，就连技术资料最完整的船，也未必都可置信。

不管怎样，耐波性计算总是要做的。且往往真正令人关切的，是运动性能。人们总不希望建造一艘昂贵的船舶，它在三级风下，艏甲板就上浪。另外，波浪对船体阻力、结构动力和操纵性能都深有影响。总而言之，为了使这项困难的工作能尽可能地做得好一些，波浪中的船舶动力学就成为这些研究领域中的一个课题。而且，海浪的出现，总还是有其规律性的，如取自波浪图册中的一个简例所表明的那样，北大西洋观测到的高于2.5米的波浪，在时间上约占40%以上。

现代船舶动力学的分析，要求应用概率理论。也许，这种方法还不是大多数工程人员能马上掌握应用的。为此，我们写了本书的第一部分，作为概率和随机过程理论的入门。实际上，它已相当广泛地涉及到统计学；为了要写出一本有用的书，我们感到有这个应完成的义务。

第二部分是有关波浪。在这里，我们的意图是将海洋物理学的有关材料，有条理的按时行的方式统一起来。波浪动力学是一门已拥有大量文献的学科，很容易使人卷陷进去。所以在编写本部分的过程中，曾绞尽脑汁，以便能从最重要的原理上来阐明基础性理论。

最后，第三部分是船舶。只有到这个阶段，我们才开始认识到船舶动力学是一门多么年青的学科；也许，从第三部分得到的主要结论只是：在这个领域里，急切地需要进行更多的研究。虽然如此，我们还是作了阐明线性理论现状的尝试，并概略地介绍了非线性的概念。

我们冒昧地认为，虽然这本书只是在随机振动理论的一般介绍方面作了些抛砖引玉的工作，但是，所论述的、专门和船舶有关的原理(主要是船舶运动)的应用性还是十分广泛的。

看来可以肯定，在以后的十年里，船舶动力学概率理论将有很多工作需要我们去做。我们希望这本书仅只是有助于别人能做得更好些。

W. G. 普莱士

R. E. D. 毕学普

目　　录

第二部分　波　　浪

第三部分 耐波性理论

第一章　引　　论

只要向海面看上一眼，就可以决定海上船舶性能是属于概率分析。因此，我们将要阐述的耐波性理论是基于概率理论的；并在本书的第一部分重温了统计原理。

概率理论中，引为依据的一般是“事件”。事件是一次假定试验的特定结果。若在N次重复试验中，事件E发生r次，则比值(r/N)表示事件的“相对频率”。当N值增大，相对频率值在一个逐步减小的带宽范围内波动，这称为具有“统计正则”。对应于极限相对频率估算的“事件E的概率”，$P[E]$，可表示为：

$$P[E]=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{r}{N}\right)$$

这个传统的方法是简单的、直觉的但不合逻辑的。因为实际上N永远不会趋于无穷大。

由伯努里以大数定理导得的一种统计正则表达是：

$$\lim_{N\to\infty}P\left[\left|\frac{r}{N}-p\right|\geqslant\delta\right]=0$$

式中$p=P[E]$，δ为一小量。这个定理表述为：在进行N次独立、重复的随机或假定试验中，具有概率p的事件E出现r次，则相对频率(r/N)与p之差大于一个小量δ的概率，当N趋于无穷大时，趋于0。

重要的是要注意到大数定理并没有提到当重复次数为无穷大时，相对频率趋于一个极限值。实际是，当重复次数很大时，是会达到一个极限值，但是从数学上证明相对频率的比值能趋于该极限是不可能的。然而，可以证明当试验的重复次数趋于无穷大时，相对频率落在$p+\delta$和$p-\delta$限界之外的概率是趋于0。

相对频率这个古典的途径，作为概率理论的哲学和严格数学论述的基础，是米塞斯（Mises）[1]在1919年提出的，当时是有争议的。柯尔莫哥洛夫（Kolmogorov）[2]在1933年按更严密的数学方法，把概率考虑为满足公理的一种函数，克服了这一求极限的困难。我们宁可公理用得越少越好，只想选用那些在现实生活上有价值的、象据以推得大数定理那样的公理。由于事件的相对频率在现实生活中是存在的，也是我们希望描述和弄清楚的；所以，在公理的选用上是从相对频率的基本特性方面来考虑的。这样在定义概率为观测相对频率的极限时和公理式的证明两者之间就不会出现矛盾。在复习基本原理时我们将采用现行的公理式证明。

海面外形和海面上船舶的运动都是随机过程。因此，从概率论的基本原理出发，我们现在考虑的科目有：

1．随机过程理论。

2．海面外形的测定和它作为随机过程的说明。

3．船舶有关特性的说明。

4．船舶运动作为随机过程的估算和评价。

本书中概述的随机过程有关理论也见于卡兰达尔（Crandall）马克（Mark）[3]和罗伯逊（Robson)[4]诸人的著作，只是后者采用的是基于无穷次数试验的概率，而不象我们采用的是公理式证明。这些概述构成本书的第一部分，使得我们可以了解到余下的三个科目是怎样息息相关的。海面波浪，作为随机过程的测定和说明，是属于海洋学的事情，可见参考文献[5,6,7]；我们在第二部分中只摘要说明其结果。

当我们讨论到船舶的时候，注意到有两种可能：(a)引起物体的运动，(b)造成结构变形。研究物体运动时，一般是假定不考虑物体变形的，这种理论就是众知的“耐波性”。但是，很少有船在这个假定上是真实的。船舶由于波浪引起的变形正在逐步变成一个甚为严重的问题，特别是大型油论和集装箱船。应当认识到，不管是耐波性或是随机振动理论两者都还是处于幼年时代。更者，这两个课题在一定程度上还是相互交错的。这样，毫无疑问，本书所能做到的仅只是入门。在本书的第三部分，我们的注意力主要是限于耐波性。

第一部分

统计基本理论

第二章　集和子集

集是许多量(集的“元素”)的集合，所有这些元素具有一些相关的显著特征。为了区别集在完备性上的不同程度，定义：

包含所有有关量者称为“泛集”，用φ表示。

引自φ中的一部分称为集，用A表示。

选自A中的一部分，称为子集。

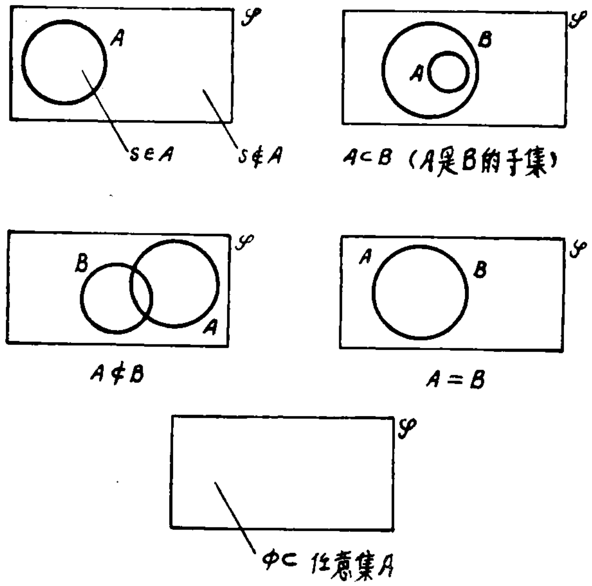


图 1　范氏图解

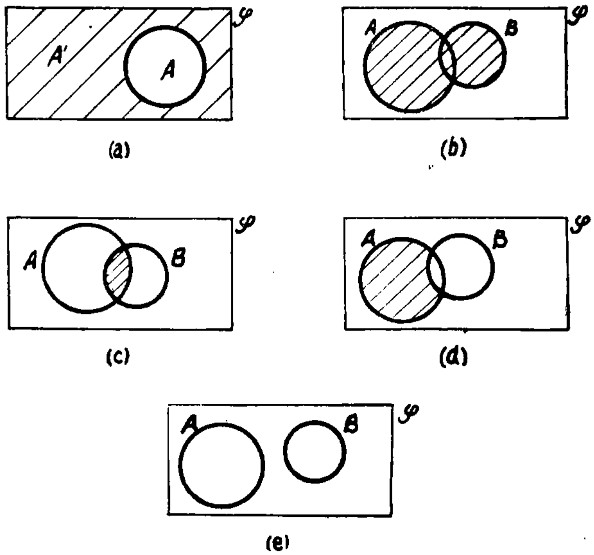


图 2　范氏图解所示的阴影线
(a)A'，(b)$A\cup B$，(c)$A\cap B$和(d)$A-B$，
图形(e)称为 $A\cap B=\phi$

若以矩形中的面积代表φ，则我们可以绘出如图 1 所示的范氏(Venn)图解，图中：

$\in$表示一个元素和一个集之间的关系。$s\in\varphi$，意即元素s是“属于”集φ，或“是集φ的一分子”，或“落入”集φ，而$\lambda\notin\varphi$意思是元素λ“不属于”集φ。

$\subset$表示集间的关系，$A\subset B$意即集A是“完全包含在”集B之内的。

ϕ是一个无容量的集(即不含有元素)——集中在矩阵代数里是一个零矩阵。

集的计算规则中引进了“集和”、“集积”、“集差”以及“补集”的概念，这些规则或“运算”示于图 2。这里A和B都是属于一个带有元素s的泛集φ的任意集。现依次说明如下：

(a) 补集：在图 2a 中A'称为集A的补集，是指不属于A的元素的集；即$s\notin A$或$s\in A'$。

(b) 集和：只有当$s\in A$或$s\in B$或s同时属于两者的时候，在图 2b 中的阴影面积才称为集和$A\cup B$；即$s\in(A\cup B)$。

(c) 集积：只有当$s\in A$且$s\in B$的时候，在图 2c 中的阴影面积才称为集积$A\cap B$；即$s\in(A\cap B)$。請注意假如事件B是零集，那末$A\cap\phi=\phi$。另外当A和B“不相交”即是“分离的”或“互不相容的”，那末就象图 2e 中所示的$A\cap B=\phi$。

(d) 集差：只有当 $s\in A$ 且 $s\notin B$ 时，在图 2d 中的阴影面积才称为 $A-B$；即 $s\in(A-B)$。当 $s\in(A\cap B')$ 时也能这样表示。

对于三个集的运算规则可得自例如：假定 A 代表二个已经应用这些规则的集。如是重复下去，则我们就得到集组 $\{A_1, A_2, A_3\cdots\cdots\}$ 的运算如下：

和：$s\in(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cdots)$，或 $s\in\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，当 $s\in A_i$ 时，i 至少满足 $i=1, 2, 3\cdots\cdots$ 中的一个或多个。

积：$s\in(A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cdots)$，或 $s\in\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$，当 $s\in A_i$ 时，i 要全满足 $i=1, 2, 3\cdots\cdots$。

让我们用一个简单的例子来阐明这些概念。假定把一副纸牌全部正面朝上地放在桌上，打算选一张，这不涉及什么机遇问题。则泛集 φ 是由 52 张纸牌组成，我们可以按属性认为有二个集：

A 是由全部黑桃组成；

B 是由全部 10 点以上的大牌组成。

那末：

黑桃 $3\in A$，黑桃 $3\notin B$。

且既不能说 $A\subset B$ 是正确的，也不能说 $B\subset A$ 是正确的，再者：

红桃 J $\in B$ 且 $\in A'$。

A 与 B 的和则是：

(所有的黑桃和梅花、方块、红桃的大牌) $\in(A\cup B)$。

另一方面 A 与 B 的积则是较少的子集：

(黑桃 A、K、Q、J、10) $\in(A\cap B)$

而：

(黑桃 9、8、7、6、5、4、3、2) $\in(A-B)$

当选 B 为由全部红的大牌所组成，(A 同前)，那末 A 和 B 是分离的集，因此：

$A\cap B=\phi$

且：

$A-B=A$

2.1 子样空間

我们对集的理论感兴趣的原因是泛集 φ 可以看作是包含了一个试验的全部可能的结果，就这一点而言 φ 是一个"子样空间"——在数学语言中考虑用另一个词，即"群体"也许更好些，子样空间可分成三个类型。一是包含有限个元素的有限子样空间，例如 $\{1,2,3\}$ 或 $\{a,b,c\cdots\cdots x,y,z\}$；一是包含可数的无限个元素的可数无限子样空间，例如整数集；第三种是包含不可数的许多元素的不可数子样空间，例如在任意已知数值区间内的量值。

现在把一个"事件"与 φ 中由元素组成的集联系起来，如图 3 中所示。概率理论则与一个事件的出现的似然有关。

现假定把前面作为述例用的正放纸牌洗过并成一叠，这样一张纸牌的选择就涉及机遇问题，有限子样空间即是具有52个牌名的泛集，用前面定义的集 A (全部黑桃)和 B (全部大牌)，我们从纸牌中抽出一张牌，假如它是：

(a) 梅花 3，则没有"事件"出现。

(b) 黑桃 5，则事件 A 和事件 $A-B$ 出现。

（c）黑桃Q，则事件 A、B 和 $A\cap B$ 出现。

（d）方块K，则事件B和事件 $B-A$ 出现。

假如在海底精确地确定某一点位置，我们就可以问某一指定瞬时在该点的水深是多少，水深是由位置、潮汐和不规则波来确定的，且因波浪而引进了机遇元素。该点和该瞬时的水深 s，在任意预选的单位系统中，是一个位在从0到无穷大的不可数的无限泛集 φ 中的元素。注意到 s 不可能是0（除非选择的点是在水的边缘），且 s 也不可能是∞；它是一个依某一平均值波动的波动值，变化范围通常小于10m。同时，請注意，随着"$s=25m$"这样一种说法，会出现一些麻烦，因为有个精确度的问题——难道这就意味着是 $s=25m\pm0$ 吗？一个可数的无限子样空间和一个不可数的无限子样空间之间的根本区别是前者的可能结果是离散的，而后者则形成一个连续的序列。

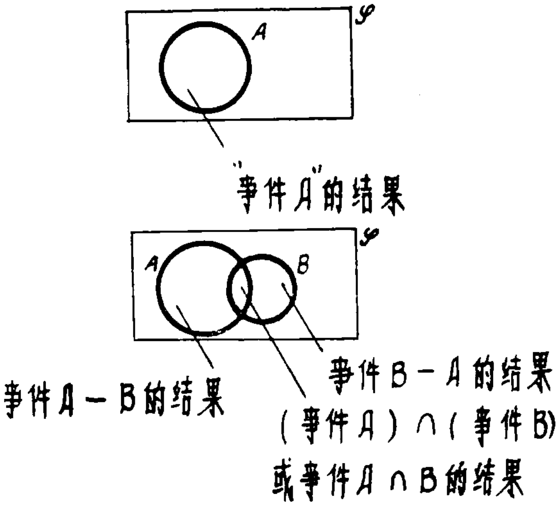


图 3 定义"事件"的范氏图解

2.2 概 率

整个子样空间可以分成若干个事件 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$（图4a 和4b），对应各个事件有一个估量事件发生概率的数值 $P[A_k]$，这个数值是靠直觉或用任意其他方便的方法得到的。扔一个硬币出现"正面"的结果被记作"事件" A，用不着证明：

$$P[A]=\frac{1}{2}$$

这似乎是很合理的。

按"似乎是很合理的"概念推下去，我们看到：一个必然事件的概率是1，以及一个不可能事件的概率是0。但是在另一方面，对于概率为1的事件不一定是必然的，概率为0的事件也不是不可能的。

概率必须遵循某些简单的规则：

1）$P[A_k]\geqslant 0$ $\qquad k=1,2,\cdots\cdots n$。

2）$P[\varphi]=1$

3）$P\left[\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right]=\sum_{k=1}^{n} P[A_k]$，假如 A_k 不相交（即是互不相容）。

一眼可见这些规则似不全面，因为 A_k 可能是相交的（如图4b）。倘若相交，则如图5中所阐明的，有：

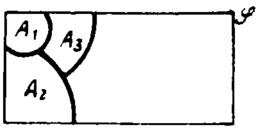
$$P[A_i\cup A_j]=P[(A_i\cap A_j')\cup A_j]$$
$$=P[A_i\cap A_j']+P[A_j]$$

但是：

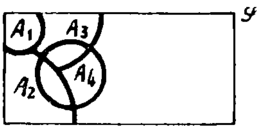
$$A_i=(A_i\cap A_j')\cup(A_i\cap A_j)$$

从而：

$$P[A_i]=P[A_i\cap A_j']+P[A_i\cap A_j]$$



(a)



(b)

图 4

表示(a)互不相容事件和(b)相交事件的范氏图解

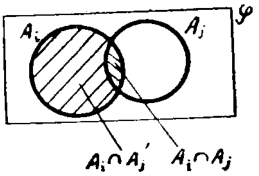


图 5

事件 A_i 和 A_j 的积事件的范氏图解說明

因此，推导得非常合理的必要条件为：

$$P[A_i\cup A_j]=P[A_i]+P[A_j]-P[A_i\cap A_j]$$

2.2.1 条件概率和独立事件

为了明确起见，再从一副洗好的纸牌里任抽一张牌，认为：

事件 A = 所抽的牌是一只黑桃；

事件 B = 所抽的牌是一只大牌。

假定抽出一张纸牌并且已知是一张大牌，即保证事件 B 已出现，我们现在求事件 A 也出现的概率是多少。这是一个条件概率的例子，记作 $P[A|B]$。

在这简单的例子中可以作如下的讨论，因为在每一套花色中有5张大牌(A，K，Q，J，10)，出现事件 B 是纸牌20张中任一张。假如事件 A 也发生，则纸牌必然是上面20张中的5张黑桃中的1张，概率即是：

$$P[A|B]=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$$

当我们企图在较严谨的基础上进行推理之前，首先注意到条件概率的出现决不是那样难得的，其实从哲学上说不存在概率，而只有条件概率。因为在我们能得到一个逻辑上测定的概率之前，必须定义一个子样空间，而这个子样空间就带有某些不定性，(一个硬币要不会完全偏重一面，或者纸牌要是完全一样的，不至于在概率的测定上有先入之见等等……)，然而，我们不想从这个高度的理论水平上进行推论。

假使 A_i 和 A_j 是在前面的章节中已叙述过的子样空间 φ 中定义的二个事件，则当事件 A_j 出现时事件 A_i 的条件概率记作 $P[A_i|A_j]$，概率公理可以被写为条件概率公理：

1) $P[A_k|A_k]=1$　　对所有的 $k=1,2,\cdots\cdots n$。

2) $P\left[\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k|\ B\right]=\sum\limits_{k=1}^{n}P[A_k|B]$

假如给定事件 B，事件 A_k 是互不相容的。

3) $P[A_i|A_j]=\dfrac{P[A_i\cap A_j]}{P[A_j]}$　　$P[A_j]>0$

回头再看抽牌试验，我们看到：

$$P[B]=\frac{20}{52}$$

$$P[A\cap B]=\frac{5}{52}$$

因此得到前面的结果。

我们从最后的公理中看到：假如事件 $A_j=\varphi$，那末：

$$A_i\cap\varphi=A_i$$

且：

$$P[A_i|\varphi]=\frac{P[A_i\cap\varphi]}{P[\varphi]}=P[A_i]$$

进一步，假定换成 $A_i=\varphi$，那末：

$$P[\varphi|A_j]=\frac{P[\varphi\cap A_j]}{P[A_j]}=\frac{P[A_j]}{P[A_j]}=1$$

又因为 $P[A_i\cap A_j]\geqslant 0$ 且 $P[A_j]>0$，所以条件概率的下限为0，上限为1，即：

$$0\leqslant P[A_i|A_j]\leqslant 1$$

通过交换 A_i 和 A_j 的位置，可以进一步看到：

$$P[A_i\cap A_j]=P[A_i|A_j]P[A_j]=P[A_j|A_i]P[A_i]$$

这最后的结果有时被叫做“合成概率公理”。

通过重复应用条件概率第三公理得到同时出现三个事件 A_h，A_i，A_j 的概率，即：

$$\begin{aligned}P[A_h\cap A_i\cap A_j]&=P[A_h|A_i\cap A_j]P[A_i\cap A_j]\\&=P[A_h|A_i\cap A_j]P[A_i|A_j]P[A_j]\end{aligned}$$

倘若 $P[A_i|A_j]>0$ 及 $P[A_j]>0$；在第一次应用中，事件 A_i 和 A_j 的同时出现被当作是一个事件，在第二次应用中，事件 $(A_i\cap A_j)$ 是被当作积来表示。

再一次回过去看抽牌试验。假定事件 C 是所抽的牌不是K，Q，J，那末事件 $(A\cap B\cap C)$ 是所抽的牌为黑桃 A 或10，即 $P[A\cap B\cap C]=\frac{2}{52}$，而按条件概率读者可证明表示为：

$$\begin{aligned}P[A\cap B\cap C]&=P[A|B\cap C]P[B|C]P[C]\\&=\frac{2}{8}\times\frac{8}{40}\times\frac{40}{52}\end{aligned}$$

假定条件概率 $P[A_i|A_j]$ 等于出现事件 A_i 的概率，即：

$$P[A_i|A_j]=P[A_i]$$

随之而来的是：

$$P[A_i\cap A_j]=P[A_i]P[A_j]$$

且：

$$P[A_j|A_i]=P[A_j]$$

因此，知道已出现 A_i，事件 A_j 的条件概率仍是出现 A_j 的概率。事件 A_i 的出现并不改变 A_j 出现的概率；假如这个关系存在于事件之间，那末 A_j 是“统计独立”于 A_i。

上述的抽牌试验是：

$$P[A]=\frac{1}{4};\qquad P[B]=\frac{5}{13};\qquad P[C]=\frac{10}{13}$$

其中：

$$P[A|B]=\frac{1}{4};\qquad P[B|A]=\frac{5}{13};$$

$$P[B|C]=\frac{1}{5};\qquad P[C|B]=\frac{2}{5};$$

$$P[C|A]=\frac{10}{13};\qquad P[A|C]=\frac{1}{4}。$$

我们看到事件 A 与事件 B 和 C 是统计独立的。但是事件 B 和 C 相互间不是统计独立的，其理由不是如想象的那样简单。

請注意到独立不是指 $P[A_i\cap A_j]=0$，或事件 A_i 和 A_j 是不相交即 $A_i\cap A_j=\phi$ 的意思，这些关系是意味着 $P[A_i|A_j]=0$，但不是独立的含义。

统计独立的概念可以进一步表达为：假如所有下列的 $(n-1)$ 个条件都能满足：

$$P[A_1\cap A_2]=P[A_1]P[A_2]$$

$$P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = P[A_1]P[A_2]P[A_3]$$

………………

$$P\left[\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right] = \prod_{k=1}^{n} P[A_k]$$

则事件 $A_k(k=1,2,\cdots\cdots n)$的集是统计独立的。

然而，假如：

$$P[A_1 \cap A_2 \cdots\cdots \cap A_n] = P[A_1]P[A_2]P[A_3]\cdots\cdots P[A_n]$$

这并不意味着所有的事件 $A_k(1\leqslant k\leqslant n)$是独立的；只有在上述的$(n-1)$个条件都被满足时才是正确的。

对于抽牌试验，$(A\cap B\cap C)$是黑桃A 或 10 这样一个事件；所以，$P[A\cap B\cap C]=\frac{2}{52}$，但是乘积 $P[A]P[B]P[C]$得到的不是此值，所以事件集不是独立的。

2.2.2 巴叶斯（Bayes）公式

图 4a 所示的子样空间 φ 是由互不相容的事件 A_1，$A_2,\cdots\cdots A_n$ 所组成的，以至于：

$$\begin{aligned}
&A_i \subset \varphi, && i=1,2,\cdots\cdots n;\\
&P[A_i]\geqslant 0, && i=1,2,\cdots\cdots n;\\
&A_i \cap A_j=\phi, && i\neq j=1,2,\cdots\cdots n;\\
&A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup A_n=\varphi。
\end{aligned}$$

当这些条件被满足时，$\{A_1,\ A_2,\cdots\cdots A_n\}$ 则形成空间子样 φ 的一个“分类”。

令 A 是 φ 内的任一事件，则有：

$$\begin{aligned}
A\cap\varphi=A=A&\cap(A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup A_n)\\
&=(A\cap A_1)\cup(A\cap A_2)\cup\cdots\cdots\cup(A\cap A_n)
\end{aligned}$$

此式将事件 A 借 n 个互不相容的事件来联合表示。应用概率和条件概率公理可发现：

$$P[A]=\sum_{i=1}^{n}P[A\cap A_i]=\sum_{i=1}^{n}P[A|A_i]P[A_i]$$

同样，当事件 A 出现时，事件 $A_k(1\leqslant k\leqslant n)$的条件概率是：

$$P[A_k|A]=\frac{P[A_k\cap A]}{P[A]}=\frac{P[A_k]P[A|A_k]}{\sum_{i=1}^{n}P[A_i]P[A|A_i]}$$

最后的结果称为巴叶斯公式，是通过反复应用条件概率公理而得到的。