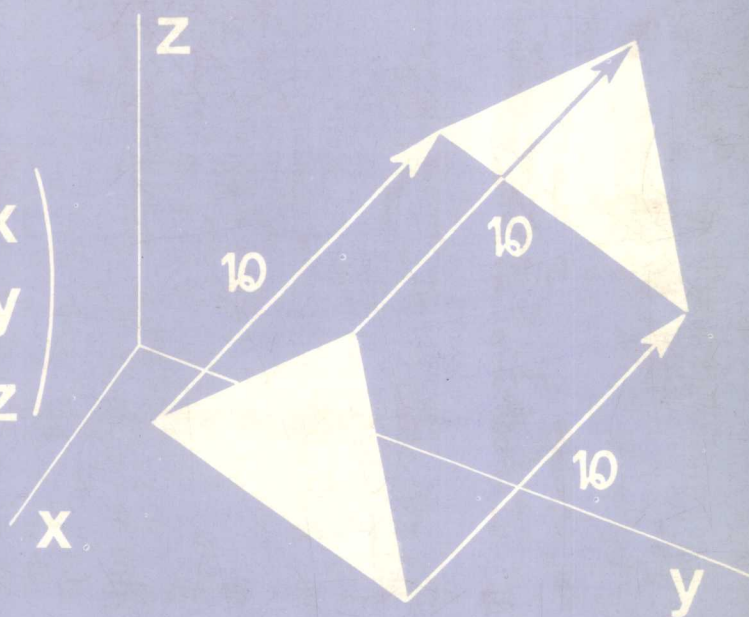


解析幾何學(上)

—附習題詳解—

譯者 黃友訓

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



徐氏基金會出版

解析幾何學(上)

—附習題詳解—

譯者 黃友訓

徐氏基金會出版

前 言

乍看之下，似乎令人覺得，對出版物與著作家而言，不足以迎合大眾對矢量解析幾何學之期望與教學雙方之要求；祇以本書第一篇的全部內容帶來傳統的坐標幾何學，而且矢量幾何學入門固然有豐富之內涵，但到了第二篇才可見其充實之結構的緣故。

可是我們並非沒有考慮到，在着手研讀矢量計算與矢量幾何學之前，首先應該討論全部的第一篇。非常恰當的，例如第五章之前（即討論圓的問題）就能進入矢量的第二篇；其實在第一章之後（即指述坐標與坐標系之時），已經開始進行，即在第八章之後就已提出來加以討論了。

問題是：“本書問世之宗旨，是否一開始就想到有關矢量的處理或有所規定時，亦有如此想法？”對此問題的答案是絕對肯定的。其實所謂坐標云者，在原則上對矢量的處理方式，的確亦屬不可或缺；至少從一般公式及方程式轉變成爲特殊的數字例題時是如此。

在中間階段所引進的坐標觀念，一再的複習、補充，以及更加深入而使之穩定；如此做法，對於著述者當他步入解析幾何之範圍時，似乎就認爲十分有益於學生之進修；對此領域的矢量討論，毫無障礙可言。誰在第十一章中不思引進矢量加法變成數字對（或三重數），他就立即可以在該章節着手研讀其定義“D1a”；其實在如此形式內，所謂矢量加法，簡稱矢的加，亦已出現於中級教科書之內了。

教師在講解解析幾何所有場合，如果不能或不欲進入矢量計算或矢

量方法的話，儘可使用本書的四分之三。然後講到第七章或第八章及第九章之前或後，轉而提及第三篇（即仿射造像問題），其中最重要部分可不用矢量的方式加以處理。只在第十九章中刪掉習題 13、20、21；而且在第二十一章中略去“利用矢量的表示法”一節而已。一直等到第二十五章，而且在第二十七章，才大量的利用該處特別適合的矢量表示方式。第二十六章亦可加入第一篇來講，那是不用矢量的說法；講投影問題的第四篇，亦是如此。

課程之選擇

在教學課程的根本改革一個時期，其中關於適宜教材之挑選，以及採取的教學方法，意見非常分歧；同時各聯邦地區所提出的按年級規定之課程，令人易於理解的往往尚未作最後之定案處理；這就對於教科書的著述者，恰巧亦在解析幾何的編訂中，幾乎無法迎合大眾之期望。因此，編撰本書之執筆人鑒於此一情勢，以及今日教學雙方之立場，努力尋求教材揀選與圖示方式中，嚴守中立陣綫，用以避免片面想法，允許多方面的可行性，以及促成各種不同教程之挑選施行。從若干如此選擇的可行性中，已在“矢量幾何與坐標幾何”的一章內有所提及；此處仍須蒐集更多的可行辦法，作一比較與闡釋。與此選拔有關的結構，應為：

- (一) 矢量計算；
- (二) 仿射造像；
- (三) 二次曲綫（即圓錐曲綫）。

針對第一點（即矢量計算）而言：

(a) 依照第一章所講轉而進行討論坐標與坐標系問題：在第二至第四章所討論之題目（即一條綫段之中間點與斜率，直綫之方程式與交會點），必將在此情況下進入第十二章及第十三章，就矢量的表示方式加以處理。一條綫段之長短（第三章）及圓的理論（第五章及第六章）乃以矢量的方式與純量積有關聯時，才跟着繼續研討。

(b) 依照第四章所講轉而進行討論二直綫之交會點問題：在此情況下

，就第二至第四章之內容重複講解而加以補充的，是在中間階段出現的至爲簡單的方程式 $m = y : x$ ， $y = mx$ ， $y = mx + b$ ， $Ax + By + C = 0$ ；這些式子對於幾何之解析亦具有其重要性。如上面(a)項已經提及，在矢量處理方面，這些方程式之出現，遠較一般爲晚；此時並非直接就講到上述之形式，却在分析參數表示之中途略爲涉及而已。兩條直綫交會點之決定，用矢量方式（見第十三章）比用坐標表示爲麻煩。在這兩種情形中，要用含有二變數的二直綫方程組（或稱一次方程系）求解；其中之一的情形，是由解答數字直接求得交會點之坐標；另一情形，首先只求參數之值，由此便可導致交會點位置之確定（參看 p.232 第九節）。此外，等到計算一條綫段之長度，才採取純量積作爲輔助手段；那是頗爲勉強，而不十分自然的做法（見第十五章）。

上述這些觀點，令人有特別合宜的感覺，即在轉個方向進入第二篇之前，至少對於第一至第四章的講解是如此（但不包括 p.58 至 p.64 在內）。

(c) 依照第五章所講轉而進行討論圓的問題：一俟第二章指述綫段長度之後，有些教師必將根據第四章再繼續第五章講解他們的許多習題；他們遭遇甚少困難，對於坐標方法頗具特徵性；而且求得的結果亦易於以幾何學的方式加以核對。

(d) 依照第六章或第七章所講，另一轉變進而討論圓與直綫；以及軌跡等問題，自然一樣的料想得到。但若根本就想以矢量方式進行講解的話，那麼一開始就不應該延擱太久，意即應該提前討論。假如不在適當時段好爲利用如此巧妙又美好的矢量計算之工具，而使之有所負荷的話，那是遺憾之事。爲此往往產生一種可行的辦法，即將同一問題不僅要用矢量方式，而且要按照坐標之形態進行求解。

爲了節省使用矢量方法的時間起見（這個方法耗費很多時間！），可在表列的課程 1 (a) 至 (d) 中，略去不甚重要的一系列習題（在第一章至

第七章中以綠色表示的號碼)；此外，p. 58 至 p. 64 的第四章亦可予以刪減若干習題。範圍十分廣泛的第十三章（共有九頁之多），它對於矢量計算雖然具有特殊內容，有些地方也要使之簡單化；尤其在合度的功率類方面，應該照樣求其簡約進行。於他方面，即用途甚多而易於行得通的第十四章與第十五章（純量乘積方面），以及 p. 639 至 p. 649 所講，對於教學雙方（尤其許多教師）較能迎合他們之心意。

另一方面，可與矢量的綫性相關與綫性獨立的（第十三章所講）主要題目，取得銜接的，是抽象的（亦即多於三度的）矢量空間所屬的一種系統理論。所謂一般的矢量空間及其應用問題，是用廣泛而多方面的方式，予以描述。

針對第二點（即仿射造像）而言：對於仿射造像（第三篇）的結構，以及在共綫造像（第四篇），再加中心投影中所指述者，共有下列各種行得通之可能情形：

(a)在第一篇之後（不包括第八章及第九章）即第二篇、第三篇，以及第四篇的或多或少的一部分。其中對於第十九章至第二十一章，以及第二十五章所講，是假定有了第一章及第四章之認識（不包括 p. 58 至 p. 64）；對於第二十二章至第二十四章，以及第二十六章所講，亦假定有了第五章及第六章之了解。討論矢量各章，即第十四至十八章，關於矢量之乘積問題；因此並無絕對的必要（除了在第二十五章關於面積的一節中所講外積之外）。

(b)在第一至第四章之後（不包括 p. 58 至 p. 64），就是第十章至第十三章，然後第十九章至第二十一章；接着是第二十五章及第二十七章。隨後就跟着講解第五章至第七章，第二十二章至第二十四章及第二十六章，再加第四篇。

(c)在第一章至第七章之後（或第一章至第九章）直接就講到第三篇；第二篇暫且省略掉了。在第三篇中所講矢量習題及表示方式，首先依

然不予提及。此處是在仿射造像之後（也許甚至講到中心投影的共綫造像之後），才出現矢量計算問題，或者由於時間的缺乏，根本就略去不講。

針對第三點（即二次曲綫，或稱圓錐曲綫）而言：

目前在學校中對於圓錐曲綫的原理講授，比從前較為不予重視；圓錐曲綫之表示方式，主要是由於造像思想所決定。爲了顧慮到物理與天文學之應用（太空飛行！），其實亦將焦點特性不完全棄之如殘渣。因爲這些度量性質不適合於任何其他一篇，所以要把這些特殊性質附於第一篇之後，當作第五章及第九章之附錄。這是自然並不是指明這些特性根本應該在那一篇中予以討論及之。

對於二次曲綫（即圓錐曲綫）的研究與分析，在本書中（是在第五章及第六章討論圓的性質之後）具有以下所述的各種可能出現之情況：

(a)在第七章中第一次論及橢圓、雙曲綫，與拋物綫作爲軌跡的問題（但不是有關焦點之特性！）

(b)在第八章及第九章之後，是依據焦點特性進行研討。

(c)橢圓之討論（以及由直角雙曲綫說到一般的雙曲綫），連同仿射方法，如同在第二十二章至第二十四章所講（從第十九章及第二十章中，利用輔助手段之情況）。

(d)當作第七章、第八章、第九章，以及第二十二章至第二十四章的補充說明，圓錐曲綫的平行移動（簡稱平移）進入第二十六章；同時二次方程式用 x 與 y 坐標的充分討論（不含 xy 項，以及包含 xy 項）。

(e)經由一個圓的中心投影，產生圓錐曲綫問題（第二十九章）。

(f)二次曲綫當作正交圓錐的平面相交之表示方式（照上面(e)項所講的，第二十九章），在 p. 645 所附加的習題 33。

(g)關於橢圓與雙曲綫的混合習題。

以上(a)項至(g)項的順序排列，自然與教程有關；就全部教材而言，

那是必須採行的；(e)與(f)二項，在任何情形之下，是要置於本書之末尾（假如有足夠時間可用之場合）。

簡略講授的可能性，尤其在第四篇，有些問題可從略。

在第二篇（即向量幾何入門篇）中，第十六章之第二部分（外積），以及第十八章自“形心”以下，可無缺憾的針對全部結構予以省略。第三篇（即仿射造像篇）應為造像幾何之主篇。因為目前均將仿射幾何置於投影幾何之前面，乃就其結構與討論的週詳而言；所以此處對於第三篇不應提出特別的縮短可能性。

在第四篇（即共綫造像篇）中，一般是有挑選重點講授，而予以縮短之必要。該篇中好比可能採取一種力言時髦的途徑，其中有關第三篇所講造像幾何與羣體理論之觀點，要對於共綫（或稱直射）問題的新鮮資料予以複習、深入，與加固（見三十、三十一、三十二各章）；但或是一種較為傳統實用之路綫，好比含有第二十九章中其中心投影之應用問題（由圓產生圓錐曲綫；投影幾何的“透視學”），以及第三十三章中地圖網狀的設計問題（即球面造像成為平面問題）。第四篇第二十八章乃針對此二途徑構成其基本原理；此外，至少要討論而應該分析一種非共綫造像的一個例題；如果時間不許可，或許只要將第三十三章的習題 8 提出來講授。

如同所有教學所用之一般教科書，本書是供應了頗為豐富的習題輯。著作者在其所編撰之教本中，一樣注意到提出問題之交替性與內容豐富性；如同注意到特別重要之習題範例要有足夠的熟練與技巧——但沒有經營“大規模習題園地”之必要！

本書包含超過 670 個以上編號的習題；這些習題大多是由若干部分習題(a)、(b)等等組合而成。“混合習題”是放在向量篇的第十八章，以及末尾第三十四章中；這一章乃根據四篇予以區分的。第十八章是隨意的主要提供教程之補充；第三十四章除了少數補充教材之外，包含附

加的練習作業。

一般教科書所刊載的是一些勉強足夠的，有系統的代表方式，對教師的教學方法是不加以約束的；但在許多時機上亦不失為被挑選的廣泛、開展，而機動的敘述途徑。在特別重要或者稍感困惑的所在，加上詳細的範例。這些範例最終之目的，不應該對下述之事實有所助益，即將本書使之變成學生所用之就業參考書。

一些“亦屬重要的”，但並非絕對屬於有負荷作用的架構者，只以習題之形態予以帶動，含有或多或少詳盡之提示，有時亦含有換算結果之提出。

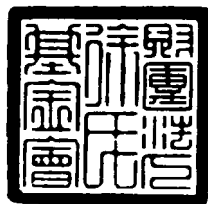
如同其他之教本中，在這一冊對於足資啓迪的許多示意圖，亦令人相當重視；共有三百九十個插圖。

財團
法人

徐氏基金會

科學圖書大庫

版權所有



不許翻印

中華民國七十六年八月十五日初版

解析幾何學(上)

—附習題詳解—

基本定價 6.60

譯者 黃友訓 逢甲大學數學系教授

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。 謝謝惠顧

局版臺業字第3033號

出版者 財團法人 徐氏基金會 臺北市郵政信箱13-306號
郵政劃撥帳戶第00157952號 電話：3615795~8

發行人 呂 幻 非

承印廠 金版企業有限公司

目 錄

上 冊

前 言	I
-----	---

第〇章 解析幾何學的初步一瞥	1
----------------	---

第一節 由代數變成幾何之關係	1
----------------	---

第二節 由幾何變成代數之關係	2
----------------	---

第三節 以代數當作幾何的輔助手段	3
------------------	---

第四節 關於幾何圖形之揣測，作代數的驗算	5
----------------------	---

第五節 幾何造像之代數處理方式	5
-----------------	---

第六節 觸及工程技術的一個問題	7
-----------------	---

第〇章 例題詳解	9
----------	---

第一篇 座標幾何入門	11
------------	----

第一章 坐標與坐標系	13
------------	----

第一節 直綫上，平面內，在空間之坐標	13
--------------------	----

第二節 規格化正交系	16
------------	----

第三節 其他坐標系	16
-----------	----

第四節 十字坐標軸之平行移動	22
----------------	----

第二章	一綫段之長度、斜率及中間點	25
第一節	一綫段之長度	25
第二節	一綫段之斜率	29
第三節	以角度標示方向之方法	31
第四節	特別斜率	32
第五節	一條綫段之中間點	34
第三章	直綫方程式	37
第一節	直綫方程式之主要形式	37
第二節	直綫方程式之特殊情形	39
第三節	何謂原來的一個曲綫方程式	40
第四節	直綫方程式之形式	45
第五節	一般的一次方程式	50
第四章	二直綫之交會點	54
第一節	關於直綫把之附帶說明	57
第二節	一點與一條直綫之距離	59
第三節	補遺：在有二變數之情形下，綫性之最佳處理	61
第五章	圓之方程式	65
第一節	圓之參數表示法	71
第六章	圓與直綫。多數圓	73
第一節	一個特別的圓切綫方程式之形式	76
第二節	多數圓	80

第三節	關於所謂“圓把”之註釋	82
第七章	平面內之軌跡	85
第一節	按照坐標法處理若干已知的軌跡問題	85
第二節	其他軌跡適用於相同的處理方式	87
第三節	以二次方程式求解的幾個軌跡問題	92
第八章	橢圓、雙曲綫、拋物綫當作焦點曲綫	100
第一節	橢圓	100
第二節	橢圓之特性及其他定義	103
第三節	雙曲綫	106
第四節	雙曲綫之特性及其他所表示之符號	110
第五節	橢圓當作行星之軌道	115
第六節	雙曲綫之用於音響測量方法	115
第七節	兩個同心圓族、橢圓及雙曲綫	116
第八節	拋物綫	117
第九節	拋物綫之特性及其他符號	120
第十節	拋物綫在十字軸中四個最重要的位置	121
第九章	橢圓、雙曲綫、拋物綫中之切綫問題	125
第一節	切綫之作圖法	128
第二節	切綫與焦射綫	133
第三節	頂點中之近似曲綫、頂點曲率圓	135
第四節	定理三與四之物理意義	136
第一篇	習題詳解	139

第二篇 矢量幾何入門	189
第十章 有順序的點對、箭號及矢量	191
第一節 以坐標表示的矢記號與矢量.....	194
第二節 軌跡矢記號.....	197
第十一章 矢量之加法、減法及純量乘法	200
第一節 加 法.....	200
第二節 減 法.....	204
第三節 一個矢量與一個數目字之乘法（純量乘法）.....	208
第十二章 用矢量表示之綫段、直綫及平面	212
第一節 一條綫段 P_1P_2 的中間點 M	212
第二節 一條綫段 P_1P_2 之任意分割點 P	213
第三節 一條直綫之參數表示法.....	217
第四節 一個平面在空間的參數表示法.....	218
第十三章 矢量之綫性相關性；矢量空間問題	222
第一節 一度矢量空間，或稱一維矢量空間、共綫性.....	222
第二節 二度矢量空間，或稱二維矢量空間、同一平面性.....	223
第三節 三度矢量空間、綫性相關性.....	225
第四節 對於四度空間及 n 度空間之展望.....	226
第五節 一個矢量分解為若干分支量.....	227
第六節 坐標與分支量表示法.....	228
第七節 矢量中，彼此相互之間的綫性相關與獨立性.....	229

第八節	一種重要的推斷法、係數比較法	230
第九節	交會點之計算求法	232
第十節	一個矢量按照已知矢量的計算分解法	235
第十一節	對例題 4 及習題 12 與 13 再加簡單意見之陳述	239
第十二節	對矢量空間應有之觀念	240
第十三節	爲一度矢量空間所作之例證	241
第十四節	爲一個二度矢量空間所作之例證	241
第十五節	爲多度的矢量空間所舉之例證	242
第十四章	二矢量之數量積	243
第一節	在各種不同方向的矢量中所作長度比較法	243
第二節	數量積或稱無向量積	245
第三節	爲應用純量乘積（簡稱數量積）所舉之例題	247
第十五章	純量積與坐標、韻律學、軌跡矢記號	253
第一節	以直角坐標所表示之純量積	253
第二節	對平面與立體的解析幾何之應用問題	255
第三節	在物理方面有關純量積之一個用途	261
第十六章	平行四邊形之面積、二矢量之外積	268
第一節	在一規格化正交系中之平行四邊形面積	268
第二節	定向面積	269
第三節	平面內二矢量之外積 $[\alpha, \beta]$	270
第四節	單位矢量之外積	272
第五節	一個三角形的面積	273

第十七章	二矢量之矢積(或稱向量乘積)晶石乘積	278
第一節	以直角坐標所表示之矢積	284
第二節	晶石乘積	289
第十八章	對矢量幾何所作之補充及混合習題	293
第一節	平面與直綫相交之角度	293
第二節	球體之切綫平面	296
第三節	若干質點之重心	297
第四節	一個點堆之重心	298
第五節	三角形面積與齊次四面體之重心	299
第六節	軌跡矢記號的綫性組合。協變性(或稱共變性)與不變性	301
第二篇	習題詳解	305

下 冊

第三篇	仿射造像	369
第十九章	平行投影之造像。軸向仿射性	371
第一節	一個平面「 E 」對另一平面「 $\bar{E}$ 」之仿射造像	371
第二節	軸向仿射之特性	373
第三節	造像方程式	376
第四節	一個坐標格子之平行投影	379
第五節	利用一般平行坐標所作點集之表示法	381

第二十章	平面內之軸向仿射性	383
第一節	平面的一種仿射自行造像的其他造形	384
第二節	在軸向仿射性方面的基本作圖法	385
第三節	當平面本身自行作軸向造像時之造像方程式	388
第四節	軸向仿射性的各種不同類型	389
第五節	軸向仿射造像方程式之基本形式	392
第六節	相同方向與相反方向的軸向仿射性	392
第七節	共軛方向問題	394
第八節	繪圖儀器以及仿射幾何學的若干基本作圖法	395
第九節	爲使用平行綫繪圖儀進行製圖應做之基本習題	396
第二十一章	含有共同軸之仿射性	398
第一節	藉助於矢量的表示法	399
第二節	以相同軸作軸向仿射性之聯繫	401
第二十二章	正交仿射性、尤勒仿射性	405
第一節	正交仿射性之造像方程式	405
第二節	當作正交仿射的圓形影像之橢圓	406
第三節	利用正交仿射性對橢圓點之作圖法	409
第四節	尤勒仿射性	413
第二十三章	橢圓之正割與直徑	418
第一節	特殊情形：橢圓切綫	419
第二節	在橢圓方面之共軛方向	422
第三節	在橢圓方面，與一方向互成正軛方向之求法	424