精品课堂

姜乃斌 代万基◎编著

# 高等数学习题全解全析

（配同济高等数学第五版） 上册

大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

高等数学学习辅导教材

# 高等数学习题全解全析

## ·精 品 课 堂·

（上册）

（配同济高等数学第五版）

姜乃斌　代万基　编著

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解全析·精品课堂(上册) / 姜乃斌,代万基编著 .大连 : 大连理工大学出版社,2003.8(2003.10 重印)
ISBN 7-5611-2334-5

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①姜… ②代… Ⅲ. 高等数学—高等学校—解题 Ⅳ. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 044652 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河 邮政编码:116024
电话:0411-4708842 传真:0411-4701466 邮购:0411-4707961
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:12 字数:376 千字
印数:10 001 ~20 000
2003 年 8 月第 1 版 2003 年 10 月第 2 次印刷

责任编辑:刘 杰 刘新彦 责任校对:王 纪
封面设计:孙宝福

定 价:25.60 元(本册 12.80 元)

# 卷首赠言

·应用更便利·基础更扎实·学习更容易·

妙算还从拙中来，
愚公智叟两分开。
积久方显愚公智，
发白才知智叟呆。

——华罗庚

# 编者的话

·应用更便利·基础更扎实·学习更容易·

近年来，高等数学方面的学习辅导书种类逐渐增多，学生们每人手中持有一种乃至数种。这其中不乏精品之作，但多数又不尽如人意。作为从教多年的教师，看到学生们渴望知识的热情，以及应试的压力，强烈的责任感驱使我们有一种将多年教学经验述于纸面的冲动，同样的责任感又使得我们迟迟没有动笔，生怕在已有的热闹非凡的出版市场上平添平庸之作，浪费时间，浪费纸张，浪费资源。

大连理工大学出版社提出要组织编写一套《高等数学习题全解全析·精品课堂》，编辑们对图书清晰的思路与准确的定位，与我们的想法一拍即合，立即触发了我们的编写欲望。我们多次征求本科生、专科生，乃至研究生的意见，更加坚定了我们写好本书的信心，进一步明确了本书的定位，这就是——像

习题课一样，与学生们一起通过对习题的分析、讨论、求解、总结，扎实掌握高等数学的基础，领悟高等数学的真谛。

这就是我们写作本书的初衷。

## 全解全析

同济大学《高等数学》，现在已经推出第五版。作为教科书，该书体系完整，层次清晰，叙述深入浅出，在改革教材层出不穷的今天，仍享有其它教材无法比拟的地位，深受广大教师和学生的喜爱。

《高等数学习题全解全析/精品课堂》与同济大学第五版教材配套，这样，学生使用更为方便。

全解：详细给出全部习题的解答。真正从学习者的角度，给出解题的每一个过程与步骤，以免略掉一些看似简单但对有些同学理解解题思路很关键的细节。

全析：在解题过程中，将习题分成三个层次：

第一层次为基本题，直接给出详细解答过程。对于其中的典型题，给出有针对性的提示和点拨。

第二层次为多知识点综合题。解题全过程控制：首先给出思路，题中重点点拨，题后归纳梳理出知识点、解题方法等。

第三层次为灵活题和难题。除给出思路、分析指导外，还给出一题多解，举一反三等，并且提示“如何才能得到答案”，如何寻求“好的解题方法”，从而真正提高学生分析问题和解决问题的能力。

## 精品课堂

目前同类书大多按“知识点归纳、内容导学、本章知识结构、习题全解”板块书写，解题过程平铺直叙，没有重点提示、难题导引及综合题分析，碰到难题、综合题，学生则需揣摩作者的解题思路，理解起来有一定难度。

市场调查反馈信息说明，许多学生反映已有图书中有的步骤变化弄不懂，再遇到这样类型的题，稍加变化就不知如何下手，甚至咬不准是自己不理解，还是书上答案给错了。

本书在给出习题的详细解答步骤的同时，随时将重点题、难题和综合题给予分析、点拨、总结，帮助学生理解、归纳、上升，如同习题课上教师边讲解、学生边练习一样。从而真正帮助学生彻底掌握所学内容。

因此，此套书辅名为——精品课堂。

学习是一个过程，而过程由环节组成。只有注重环节，控制过程，才能得到良好的学习效果。对学习高等数学来讲，课堂听讲和课后复习是两个重要环节。

我们深信本书将成为您补充课堂听讲、辅助课后复习的好帮手。

2003 年 8 月

# 目　录

# 第一章　函数与极限

## 习题 1-1

**1.** 设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$，$B=[-10,3)$，写出 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\backslash B$ 及 $A\backslash(A\backslash B)$ 的表达式。

**解**　$A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$，$A\cap B=[-10,-5)$，
$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$，$A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5)$

**2.** 设 $A$、$B$、$C$ 是任意三个集合，证明对偶律：$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$。

**证明**　$\forall x\in(A\cap B)^C$，则 $x\notin A\cap B$，即 $x\in A$ 且 $x\notin B$ 或 $x\in B$ 且 $x\notin A$，所以 $x\in B^C$ 或 $x\in A^C$，即 $x\in A^C\cup B^C$，于是 $(A\cap B)^C\subset A^C\cup B^C$。

$\forall x\in A^C\cup B^C$，则 $x\notin A$ 或 $x\notin B$，所以 $x\notin A\cap B$，即 $x\in(A\cap B)^C$，于是 $A^C\cup B^C\subset(A\cap B)^C$。

所以，$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$。

**3.** 设映射 $f:X\to Y$，$A\subset X$，$B\subset X$。证明：

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；

(2) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$。

**证明**　(1) $\forall y\in f(A\cup B)$，则 $y\in\{f(x)\mid x\in A$ 或 $x\in B\}=\{f(x)\mid x\in A\}\cup\{f(x)\mid x\in B\}$ 于是 $y\in f(A)\cup f(B)$，即左边 $\subset$ 右边。

而 $\forall y\in f(A)\cup f(B)$，则 $y\in\{f(x)\mid x\in A\}\cup\{f(x)\mid x\in B\}=\{f(x)\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 于是 $y\in f(A\cap B)$，即右边 $\subset$ 左边。

所以 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$。

(2) **证法 1** $\forall y \in f(A \cap B)$，则 $y \in \{f(x) | x \in A$ 且 $x \in B\}$，因为 $\{f(x) | x \in A$ 且 $x \in B\} \subset \{f(x) | x \in A\}$ 且 $\{f(x) | x \in A$ 且 $x \in B\} \subset \{f(x) | x \in B\}$，

所以 $\{f(x) | x \in A$ 且 $x \in B\} \subset \{f(x) | x \in A\} \cap \{f(x) | x \in B\}$

所以 $y \in f(A) \cap f(B)$，即 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

**证法 2** $\forall y \in f(A \cap B)$，$\exists x \in A \cap B$，使得 $y = f(x)$。

由 $x \in A \cap B$ 可知，$x \in A$ 且 $x \in B$。于是，有 $f(x) \in f(A)$ 且 $f(x) \in f(B)$，这说明 $f(x) \in f(A) \cap f(B)$，即 $y \in f(A) \cap f(B)$，所以 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$。

**小结** 为了证明集合 $A$ 等于集合 $B$，只需证明，对 $\forall x \in A$，有 $x \in B$；反之，对 $\forall x \in B$，有 $x \in A$ 即可。

---

**4.** 设映射 $f: X \to Y$，若存在一个映射 $g: Y \to X$，使 $g \circ f = I_X$，$f \circ g = I_Y$，其中 $I_X$、$I_Y$ 分别是 $X$、$Y$ 上的恒等映射，即对于每一个 $x \in X$，有 $I_X x = x$；对于每一个 $y \in Y$，有 $I_Y y = y$。证明：$f$ 是双射，且 $g$ 是 $f$ 的逆映射：$g = f^{-1}$。

**提示** 为证明 $f$ 为双射，只需证明 $f$ 既为满射又为单射。

**证明** $\forall y \in Y$，因为 $g: Y \to X$，所以 $g(y) = x \in X$，因为 $(f \circ g)$ 为恒等映射，所以 $f(g(y)) = (f \circ g)(y) = y$，即 $f(x) = y$，所以 $f$ 为满射。下面用反证法证明 $f(x)$ 为单射，即证明对 $\forall x_1, x_2 \in X$，且 $x_1 \neq x_2$，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$。

因为若 $f(x_1) = f(x_2)$，则 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，因为 $(g \circ f)$ 为恒等映射，所以有 $x_1 = x_2$，矛盾，所以 $f$ 为单射，综上 $f$ 为双射。

因为 $f$ 为单射，所以 $f^{-1}$ 存在，设 $y = f(x)$，则 $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = x$，所以 $g = f^{-1}$。

---

**5.** 设映射 $f: X \to Y$，$A \subset X$。证明：

(1) $f^{-1}(f(A)) \supset A$；

(2) 当 $f$ 是单射时，有 $f^{-1}(f(A)) = A$。

**证明** (1) $\forall x \in A$ 有 $f(x) \in f(A)$，即 $x \in f^{-1}(f(A))$，

所以 $f^{-1}(f(A)) \supset A$。

(2)$\forall x_1 \in f^{-1}(f(A))$,有 $y \in f(A)$,使 $x_1 = f^{-1}(y)$,即 $y = f(x_1)$,
另一方面,由 $y \in f(A)$ 可知存在 $x_2 \in A$,且 $f(x_2) = y$,
因为 $f$ 为单射,所以 $x_1 = x_2$,所以 $x_1 \in A$,所以 $f^{-1}(f(A)) \subset A$,
由(1)知 $f^{-1}(f(A)) \supset A$,于是

$$f^{-1}(f(A)) = A$$

---

**6.** 求下列函数的自然定义域:

(1)$y = \sqrt{3x+2}$;　　(2)$y = \dfrac{1}{1-x^2}$;

(3)$y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$;　　(4)$y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

(5)$y = \sin\sqrt{x}$;　　(6)$y = \tan(x+1)$;

(7)$y = \arcsin(x-3)$;　　(8)$y = \sqrt{3-x} + \arctan\dfrac{1}{x}$;

(9)$y = \ln(x+1)$;　　(10)$y = e^{\frac{1}{x}}$。

**解**　(1)$3x+2 \geqslant 0, x \geqslant -\dfrac{2}{3}$,函数的定义域为$\left[-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$

(2)$1-x^2 \neq 0, x \neq \pm 1$,函数的定义域为

$$(-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, +\infty)$$

(3)$\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $x \neq 0$,$\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $1-x^2 \geqslant 0$,即 $-1 \leqslant x \leqslant 1$,所以函数的定义域为$[-1,0) \cup (0,1]$

(4)$4-x^2 > 0, x^2 < 4, -2 < x < 2$,函数的定义域为$(-2,2)$

(5)函数的定义域为$[0, +\infty)$

(6)$x+1 \neq \left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi, x \neq \left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi - 1$,函数的定义域为

$$\boldsymbol{R} \setminus \left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi - 1 \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$$

(7)$|x-3| \leqslant 1, 2 \leqslant x \leqslant 4$,函数的定义域为$[2,4]$。

(8)$\sqrt{3-x}$ 的定义域为 $x \leqslant 3$,$\arctan\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $x \neq 0$,所以,函数的定义域为$(-\infty,0) \cup (0,3]$。

(9)$x+1 > 0, x > -1$,函数的定义域为$(-1, +\infty)$

(10)$x\neq 0$,函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

---

**7.** 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1)$f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$;

(2)$f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3)$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(4)$f(x)=1, g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$

**解** (1)$f(x)=\lg x^2$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$;$g(x)=2\lg x$ 的定义域为$(0,+\infty)$。所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不相同。

(2)$f(x)=x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$。$g(x)=\sqrt{x^2}$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,但 $g(x)=x(x>0)$;$g(x)=-x,(x<0)$。故 $x<0$ 时,$f(x)\neq g(x)$。可见 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同,但对应法则不同,所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不相同。

(3)$f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,$g(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$有 $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}=x\sqrt[3]{x-1}=g(x)$,可见 $f(x)=g(x)$

(4)$f(x)=1$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,而 $g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x=\dfrac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}$,当 $\cos^2 x=0$,即 $x=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ 时无意义,所以 $f(x)\neq g(x)$。

**评述** 函数的定义域 $D_f$ 及对应法则 $f$ 是构成函数的两个要素,对两个函数,如果它们的定义域相同,对应法则也相同,则它们是相同的,否则是不同的。

---

**8.** 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\[2ex] 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right),\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi(-2)$,并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形。

**解**　$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}$,

$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|$

$=\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\varphi(-2)=0$,其图形如图 1-1 所示。

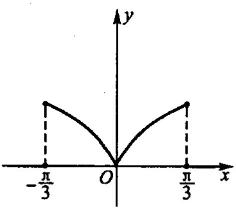

图 1-1

---

**9.** 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1)$y=\frac{x}{1-x}$,　$(-\infty,1)$;

(2)$y=x+\ln x$,　$(0,+\infty)$。

**解**　(1)$\forall\, x_1,x_2\in(-\infty,1)$ 且设 $x_2>x_1$

$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{1-x_2}-\frac{x_1}{1-x_1}=\frac{x_2-x_1}{(1-x_1)(1-x_2)}>0$,即 $f(x_2)>f(x_1)$,所以 $y=\frac{x}{1-x}$ 在$(-\infty,1)$ 内单调增加。

(2)$\forall\, x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且设 $x_2>x_1$

$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)+(\ln x_2-\ln x_1)=(x_2-x_1)+\ln\frac{x_2}{x_1}$

因为 $x_2>x_1$,所以 $x_2-x_1>0$,又$\frac{x_2}{x_1}>1$,

所以 $\ln\frac{x_2}{x_1}>0$,所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$,即 $f(x_2)>f(x_1)$。

所以,$y=x+\ln x$ 在$(0,+\infty)$ 内单调增加。

---

**10.** 设 $f(x)$ 为定义在$(-l,l)$ 内的奇函数,若 $f(x)$ 在$(0,l)$ 内单调增加,证明 $f(x)$ 在$(-l,0)$ 内也单调增加。

**证明**　$\forall\, x_1,x_2\in(-l,0)$ 且设 $x_2>x_1$,则

$-x_1>-x_2$ 且 $-x_2,-x_1\in(0,l)$,

因为 $f(x)$ 在$(0,l)$ 内单调增加,所以 $f(-x_1)>f(-x_2)$,

又因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x_1)=-f(x_1)$，$f(-x_2)=-f(x_2)$，

所以 $-f(x_1)>-f(x_2)$，即 $f(x_2)>f(x_1)$，所以 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内单调增加。

---

**11.** 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的。证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

**证明** (1) 设 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 皆为偶函数，即 $\varphi(x)=\varphi(-x)$，$\psi(x)=\psi(-x)$，于是

$$\varphi(-x)+\psi(-x)=\varphi(x)+\psi(x)$$

所以 $\varphi(x)+\psi(x)$ 为偶函数。

同理可证，两个奇函数 $R$ 和为奇函数。

(2) 设 $\varphi(x)=f(x)\cdot g(x)$，其中，$f(x)$、$g(x)$ 皆为偶函数。

因为 $f(x)$、$g(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=g(x)$，

于是 $\varphi(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)=\varphi(x)$，

所以，两个偶函数的乘积为偶函数。

同理可证两个奇函数的乘积为偶函数，偶函数与奇函数的乘积为奇函数。

---

**12.** 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$；　　(2) $y=3x^2-x^3$；

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；　　(4) $y=x(x-1)(x+1)$；

(5) $y=\sin x-\cos x+1$；　　(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$。

**解** (1) $y(x)=x^2(1-x^2)$，$y(-x)=(-x)^2(1-(-x)^2)=x^2(1-x^2)=y(x)$，所以 $y=x^2(1-x^2)$ 为偶函数。

**提示** 也可以用11题的结论，因为 $x^2$ 为偶函数，$(1-x^2)$ 也为偶函数，所以乘积 $y=x^2(1-x^2)$ 为偶函数。第(4)题也可这样做，因为 $y=x(x^2-$

1)。

用类似的方法，可以得到

(2) 非奇非偶；(3) 偶函数；(4) 奇函数；(5) 非奇非偶；(6) 偶函数。

---

**13.** 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1)$y = \cos(x-2)$；　　(2)$y = \cos 4x$；

(3)$y = 1 + \sin \pi x$；　　(4)$y = x\cos x$；

(5)$y = \sin^2 x$。

**解**　(1)
$$y(x+2\pi) = \cos[(x+2\pi)-2] = \cos[2\pi + (x-2)] = \cos(x-2) = y(x)$$

所以 $y = \cos(x-2)$ 为以 $2\pi$ 为周期的周期函数。

$$(2)\ y\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos 4\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(4x+2\pi) = \cos 4x$$

所以 $y = \cos 4x$ 是周期函数，其周期为$\frac{\pi}{2}$。

用类似的方法，可以得到

(3) 是以 2 为周期的周期函数；(4) 不是周期函数；(5)$y = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ 是以 $\pi$ 为周期的周期函数。

**小结**　求 $y=\sin(\omega t+\varphi)$ 和 $y=\cos(\omega t+\varphi)$ 的周期 $T$ 的方法是，令 $\omega T = 2\pi$，可得 $T = \frac{2\pi}{\omega}$。在许多问题中，常遇到类似的问题。

---

**14.** 求下列函数的反函数：

(1)$y = \sqrt[3]{x+1}$；　　(2)$y = \frac{1-x}{1+x}$；

(3)$y = \frac{ax+b}{cx+d}(ad-bc \neq 0)$；　　(4)$y = 2\sin 3x$；

(5)$y = 1 + \ln(x+2)$；　　(6)$y = \frac{2^x}{2^x+1}$。

**解**　(1) 由 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 解得 $x = y^3 - 1$，所以反函数为 $y = x^3 - 1$

(2) 由 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 解得 $x = \frac{1-y}{1+y}$，所以反函数为 $y = \frac{1-x}{1+x}$

用类似方法，可以得到

(3)$y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$；　　(4)$y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$；

(5)$y=e^{x-1}-2$；　　(6)$y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$。

**提醒**　如果$f$是定义在$D$上的单调函数，则其反函数$f^{-1}$必定存在。容易验证，在上面的问题中，这个条件是满足的，所以，它们的反函数存在。

---

**15.** 设函数$f(x)$在数集$X$上有定义，试证：函数$f(x)$在$X$上有界的充分必要条件是它在$X$上既有上界又有下界。

**证明**　**必要性**　设$f(x)$在$X$上有界，则存在$M>0$，对$\forall x\in X$有$|f(x)|\leqslant M$，即$-M\leqslant f(x)\leqslant M$，即$f(x)$在$X$上既有上界又有下界。

**充分性**　设$f(x)$在$X$上既有上界$L$又有下界$l$，于是$\forall x\in X$有，$l\leqslant f(x)\leqslant L$，取$M=\max\{|l|,|L|\}$，则$\forall x\in X$就有$|f(x)|\leqslant M$，即$f(x)$在$X$上有界。

综上，$f(x)$在$X$上有界的充分必要条件是它在$X$上既有上界又有下界。

---

**16.** 在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求这函数分别对应于给定自变量值$x_1$和$x_2$的函数值：

(1)$y=u^2,u=\sin x,x_1=\dfrac{\pi}{6},x_2=\dfrac{\pi}{3}$；

(2)$y=\sin u,u=2x,x_1=\dfrac{\pi}{8},x_2=\dfrac{\pi}{4}$；

(3)$y=\sqrt{u},u=1+x^2,x_1=1,x_2=2$；

(4)$y=e^u,u=x^2,x_1=0,x_2=1$；

(5)$y=u^2,u=e^x,x_1=1,x_2=-1$。

**解**　(1)$y=(\sin x)^2=\sin^2x,y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{4},y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{4}$

(2)$y=\sin 2x,y\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2},y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

(3)$y=\sqrt{1+x^2},y(1)=\sqrt{2},y(2)=\sqrt{5}$

(4)$y = e^{x^2}, y(0) = 1, y(1) = e$

(5)$y = (e^x)^2 = e^{2x}, y(1) = e^2, y(-1) = e^{-2}$

---

**17.** 设 $f(x)$ 的定义域 $D = [0,1]$，求下列各函数的定义域：

(1)$f(x^2)$；　(2)$f(\sin x)$；

(3)$f(x+a)(a>0)$；　(4)$f(x+a)+f(x-a)(a>0)$。

**解**　(1)$0 \leqslant x^2 \leqslant 1, |x| \leqslant 1$，所以函数 $f(x^2)$ 的定义域为 $x \in [-1,1]$

(2)$0 \leqslant \sin x \leqslant 1$，所以函数的定义域为 $x \in [2n\pi, (2n+1)\pi], n \in \mathbf{Z}$,

(3)$0 \leqslant x+a \leqslant 1$，即函数定义域为 $-a \leqslant x \leqslant 1-a$

(4) 因为 $0 \leqslant x+a \leqslant 1$，所以 $-a \leqslant x \leqslant 1-a$；

又因为 $0 \leqslant x-a \leqslant 1$，所以 $a \leqslant x \leqslant 1+a$，

所以函数的定义域为 $D = [-a, 1-a] \cap [a, 1+a]$，

显然，若 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$，则 $D = [a, 1-a]$，若 $a > \frac{1}{2}$，则 $D = \varnothing$

($\varnothing$ 表示空集)

---

**18.** 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1 \end{cases} \quad g(x) = e^x$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形。

**解**　$f[g(x)] = f(e^x) = \begin{cases} 1, & |e^x| < 1 \\ 0, & |e^x| = 1 \\ -1, & |e^x| > 1 \end{cases}$

因为当 $x < 0$ 时，$|e^x| < 1$，$x = 0$ 时，$|e^x| = 1$，$x > 0$ 时，$|e^x| > 1$，所以

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$$

其图形如图 1-2 所示。

仿上面的方法，易得