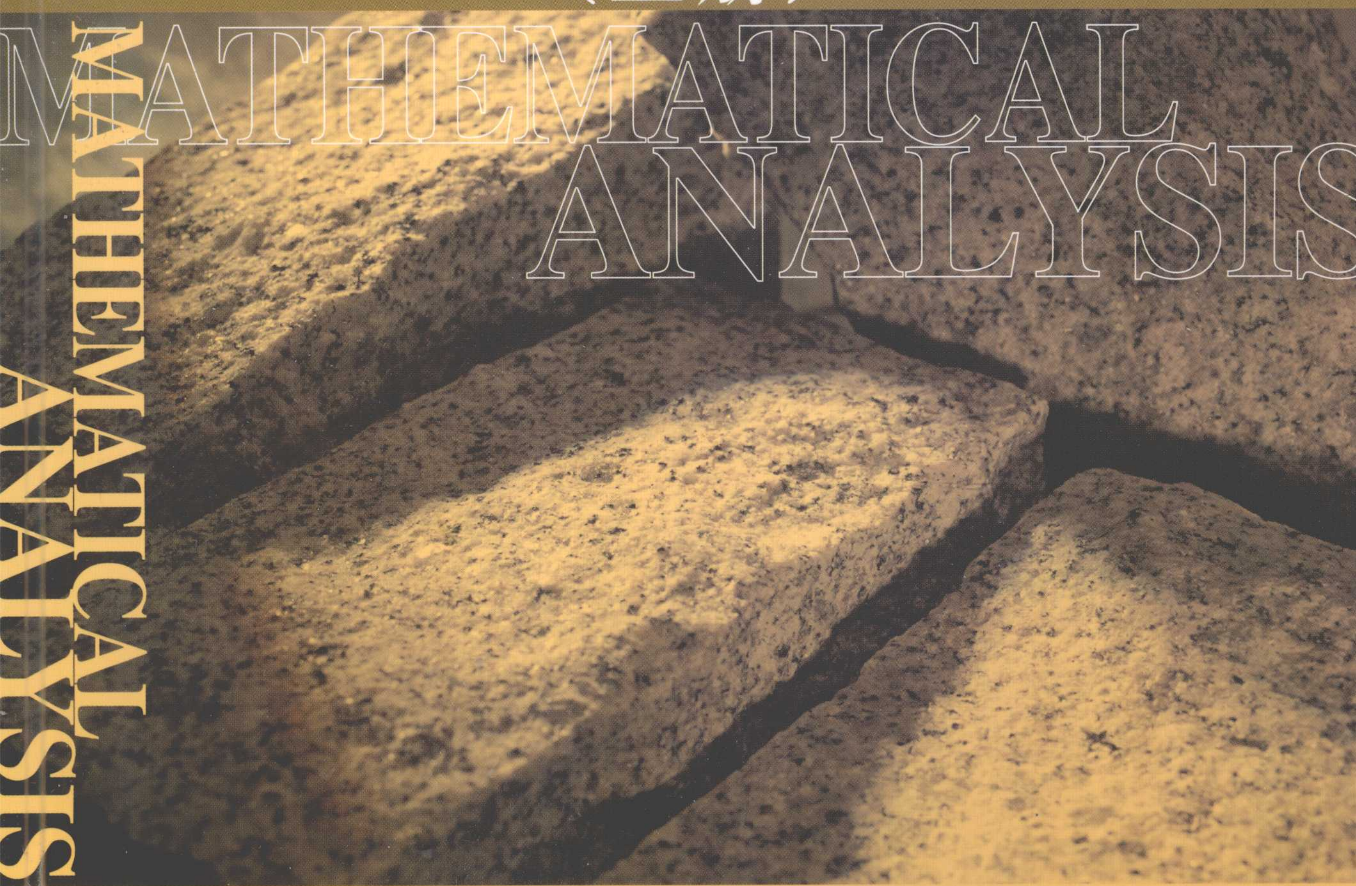
薛春华 徐森林 编

数学分析
精选习题全解

（上册）



清华大学出版社

薛春华 徐森林 编

数学分析
精选习题全解

（上册）

MATHEMATICAL
ANALYSIS

清华大学出版社
北京

内容简介

作为《数学分析》[1]的配套书《数学分析精选习题全解(上、下)》,给出了该书全部思考题与复习题的详细解答.它的主要特点有:(1)重点突出、解题精练,并灵活运用了微积分的经典方法和技巧.(2)注重一题多解.许多难题往往有多种证法或解法.既增强了读者的能力,又开阔了读者的视野.(3)系统论述$\mathbb{R}^n$的拓扑、n元函数的微分、n重积分、k维曲面积分以及有关难题.(4)应用外微分形式在定向曲面上的积分和Stokes定理$\int_{\overrightarrow{\partial M}}\omega=\int_{\overrightarrow{M}}\mathrm{d}\omega$描述了相关思考题和复习题的计算.反映出内容的近代气息.

本书可作为理工科大学或师范大学数学系教师和大学生,特别是报考数学专业研究生的大学生有益的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析精选习题全解.上/薛春华,徐森林编.—北京:清华大学出版社,2009.12
ISBN 978-7-302-21065-8

Ⅰ.数…　Ⅱ.①薛…②徐…　Ⅲ.数学分析—高等学校—习题　Ⅳ.O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第168149号

责任编辑:刘　颖
责任校对:刘玉霞
责任印制:王秀菊
出版发行:清华大学出版社　　**地　　址**:北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**:100084
社　总　机:010-62770175　　**邮　　购**:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质　量　反　馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印　刷　者:北京鑫海金澳胶印有限公司
装　订　者:北京国马印刷厂
经　　销:全国新华书店
开　　本:185×230　**印　张**:25.5　**字　数**:553千字
版　　次:2009年12月第1版　　**印　　次**:2009年12月第1次印刷
印　　数:1～4000
定　　价:39.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770177转3103　　产品编号:027572-01

前言

FOREWORD

由我们编著的《数学分析》(共三册，由清华大学出版社出版)中的思考题与复习题有相当的难度，困惑了一部分大学生和读者，为使他们的阅读更有成效，应许多读者的要求，我们编写了这本习题解答，对课本中的思考题和复习题逐个解答，有的题还用了多种解法，这样既可增强读者的解题能力又开阔了视野.

本书分上、下两册出版，其中上册包括：数列极限(55 题)，函数极限与连续(52 题)，一元函数的导数、微分中值定理(73 题)，Taylor 公式(21 题)，不定积分(4 题)，Riemann 积分(78 题)，($\mathbb{R}^n$，ρ_0^n)的拓扑、n 元函数的连续与极限(61 题)，n 元函数微分学(56 题)，n 元函数微分学的应用(9 题)共 9 章 409 道题目；下册包括：n 元函数的 Riemann 积分(63 题)，曲线积分、曲面积分、外微分形式积分与场论(41 题)，无穷级数(74 题)，函数项级数(50 题)，幂级数、用多项式一致逼近连续函数(37 题)，含参变量积分(46 题)，Fourier 分析(37 题)共 7 章 348 道题目.

我们希望大学生最好先不看题解，先独立思考，之后再对照答案. 特别是那些有很强能力并将来有志于数学研究的学生必须先做题再对照检查以检测自己的实力. 因为将来搞研究的创造能力主要来源于平时的独立思考、独立解决问题的习惯. 而依赖于看答案的做法实在是一种懒惰的思想. 对于那些确实做题有困难而又想考研究生的大学生. 建议你们一边做题，一边看答案，这总比为没有答案做不出题而苦恼，甚至放弃学习要好.

另一方面，撰写本书，也可给大学数学系的教师提供一些开阔解题思路的借鉴. 同时也期望能引出他们更好、更多的解题方法，起到抛砖引玉的作用.

选用我们编的《数学分析》这套教材，学习可分两个层次. 第一层次是学好全书的主要内容，包括微积分的经典内容和方法；定理和例题的多种证法和解法；以及用近代观点论述$\mathbb{R}^n$ 中的拓扑、映射的微分、外微分和 Stokes 定理. 再做书中相应的练习题. 达到这样，学生已具有较高的分析数学的水平了. 第二层次是全面做思考题、复习题. 遇到困难，本书能为你向数学高峰攀登助一臂之力.

对于拟参加中国大学生数学竞赛的同学来说，演练书中的题目也是非常有帮助的.

最后，作者要感谢为本书难题解答提供过精妙证法的大学生、研究生. 特别还要感谢清华大学出版社的编审刘颖同志. 他给了我们热情的支持和有效的帮助.

薛春华　徐森林

2008 年 12 月于北京

CONTENTS

目 录

第 1 章

数 列 极 限

极限理论是数学分析中最重要的基础之一.极限有数列极限和函数极限.论证极限存在和求出极限是学好数学分析的第 1 步,也是最关键的一步.

Ⅰ. 数列极限的计算和论证方法

(1) 数列极限的定义,即 ε-N(A-N)法(定义 1.1.1).

(2) 数列极限的+、-、×、÷四则运算性质(定理 1.2.3).

(3) 夹逼定理(定理 1.2.6).

(4) 单调增(减)有上(下)界的数列必收敛(实数连续性命题(二)).

在证明了数列$\{x_n\}$收敛后,记极限为 $x=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.通常在关于 x_n 的一个递推公式两边令 $n\to+\infty$,得到关于 x 的方程式.于是,可解出极限值 x 来.

一般地,单调增(减)数列$\{x_n\}$有 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\sup\limits_{n\in\mathrm{N}}\{x_n\}\left(=\inf\limits_{n\in\mathrm{N}}\{x_n\}\right)$.

(5) Cauchy 收敛准则(原理)(定理 1.3.3).

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在(实数、$+\infty$、$-\infty$)$\Leftrightarrow$ $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}x_n$(上极限)$=\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}x_n$(下极限)(定理 1.5.2).此时,$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}x_n=\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}x_n$.

(7) 两个重要极限:

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$(定理 1.4.2),$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$(例 2.2.10);$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$(例 2.2.7).

(8) $\frac{\cdot}{\infty}$型 Stolz 公式(定理 1.6.1)、$\frac{0}{0}$型 Stolz 公式(定理 1.6.2).

(9) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a>0$,$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=b$,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n^{b_n}=a^b$(定理 2.2.8(2)).

(10) 将数列极限化为函数极限,然后应用求函数极限的方法(如等价代换、函数的连续

性、L'Hospital(洛必达)法则或 Taylor 展开等)求出函数极限. 从而也得到相应的数列极限(例 3.4.6,例 4.2.3).

(11) 将数列极限化成 Riemann 积分,并求出积分值

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

它即为所求的数列极限(例 6.5.3).

(12) 因为

$$\text{级数}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow \text{部分和 } S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k \text{ 收敛},$$

所以也可用级数收敛的判别法与求和法来研究数列的收敛性和极限.

(13) Stirling 公式:$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}},\quad 0<\theta_n<1.$

Ⅱ. 实数理论

实数理论是数学分析中最重要基础之二. 有多种不同的方式引进实数的概念(《数学分析》第一册 36~41 页),如采用十进位小数; Dedekind 分割原理; 有理 Cauchy 数列等价类来刻画实数等.

19 世纪建立的极限理论和实数理论是微分学、积分学的根本,是数学分析的基础,也是入数学分析之门的关键. 一些深刻的定理都要用到实数理论.

引进实数后,可以证明:

定理 1.3.1(实数连续性等价命题) 下面七个连续性命题是彼此等价的.

(1) 有上(下)界的非空数集必有属于$\mathbb{R}$ 的最小(大)上(下)界,即有有限的上(下)确界;

(2) 单调增(减)有上(下)界的数列必收敛;

(3) (闭区间套原理,Carton)设递降闭区间序列

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

其长度 $b_n-a_n\to 0(h\to+\infty)$,则 $\exists_1 x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$,即 $x_0\in[a_n,b_n]$,$\forall n\in\mathbb{N}$;

(4) (有界闭区间的紧致性,Heine-Borel 有限覆盖定理)$[a,b]$的任何开覆盖 $\mathscr{I}$必有有限的子覆盖;

(5) (列紧性,Weierstrass 聚点定理)有界无限数集 A 必有聚点 $x_0\in A$;

(6) (有界闭区间$[a,b]$的序列紧性,Bolzano-Weierstrass)有界数列必有收敛子列;

(7) ($\mathbb{R}$ 的完备性,Cauchy)Cauchy 数列(基本数列)必收敛(此时,$(\mathbb{R},\rho)$为完备度量空间).

应用这七个实数连续性等价命题可以证明有界闭区间上连续函数的零(根)值定理、介

值定理、最值定理以及一致连续性定理.因为这七个命题是彼此等价的,所以论述时,可以用其中的一个命题,也可用七个中的若干命题.这可打开读者的思路,开阔读者的视野.实数的连续性与数学分析中的每一概念都有十分密切的关系,而且还是不可缺少的理论基础.它的证明方法也将贯穿到数学分析的每个角落,并延伸到分析数学之中.

1. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$, $|q|<1$. 用 ε-N 方法证明:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+a_{n-1}q+\cdots+a_1q^{n-1})=\frac{a}{1-q}.$$

证明 由 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$ 知从某项 N_0 开始$\{a_n\}$的项都在 a 的邻域$(a-1,a+1)$之中,即当 $n\geqslant N_0$ 时,$|a_n-a|<1$. 取 $M=\max\{1,|a_1-a|,\cdots,|a_{N_0-1}-a|\}$. 那么对所有的 n,$|a_n-a|<M$(1.2 节中收敛数列的有界性).

对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N_1\in\mathbb{N}$,当 $n>N_1$ 时,$|a_n-a|<\dfrac{1-|q|}{3(1-q)}\varepsilon$. 由 $|q|<1$ 知 $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty}aq^n=0$,故 $\exists N_2\in\mathbb{N}$,当 $n>N_2$ 时,$|q|^n<\dfrac{\varepsilon}{3N_1M|1-q|}$,$|aq^n|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 因此当 $n>N=N_1+N_2+1$ 时,有

$$\begin{aligned}
&|(1-q)(a_n+a_{n-1}q+\cdots+a_1q^{n-1})-a|\\
=&|(1-q)[(a_n-a)+(a_{n-1}-a)q+\cdots+(a_{N_1+1}-a)q^{n-N_1-1}+\cdots+(a_1-a)q^{n-1}]-aq^n|\\
<&|1-q|\left[\frac{(1-|q|)\varepsilon}{3(1-q)}\cdot\frac{1-|q|^{n-N_1}}{1-|q|}+N_1M\frac{\varepsilon}{3N_1M|1-q|}\right]+\frac{\varepsilon}{3}\\
<&\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,
\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-q)(a_n+a_{n-1}q+\cdots+a_1q^{n-1})=a$. 而 $1-q\neq0$,故

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+a_{n-1}q+\cdots+a_1q^{n-1})=\frac{a}{1-a}.$$ □

2. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=b$. 用 ε-N 法证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0}{n}=ab.$$

证法 1(ε-N) 因 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=b$,故数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都有界,即$\exists$数 $M>0$,使$|a_n|<M$,$|b_n|<M$,$|a|<M$.

对 $\forall\varepsilon>0$,由条件知 $\exists N_1\in\mathbb{N}$,使当 $n>N_1$ 时,有

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{4M},\quad |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{4M}.$$

固定 N_1,取自然数 $N>\max\left\{N_1,\dfrac{2M}{\varepsilon}[|a_0-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|+|b_0-b|+\cdots+|b_{N_1}-b|+|b|]\right\}$,则当 $n>N$ 时有

$$\left|\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0}{n}-ab\right|$$

$$=\left|\frac{1}{n}[(a_0b_n-ab)+(a_1b_{n-1}-ab)+\cdots+(a_{n-1}b_1-ab)+(a_nb_0-ab)]+\frac{ab}{n}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{n}[b_n(a_0-a)+a(b_n-b)+b_{n-1}(a_1-a)+a(b_{n-1}-b)+\cdots+b_0(a_n-a)+a(b_0-b)]+\frac{ab}{n}\right|$$

$$\leqslant\frac{M}{n}[|a_0-a|+\cdots+|a_n-a|+|b_0-b|+\cdots+|b_n-b|+|b|]$$

$$\leqslant\frac{M}{N}[|a_0-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|+|b_0-b|+\cdots+|b_{N_1}-b|+|b|]$$

$$+\frac{M}{n}[|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|+|b_{N_1+1}-b|+\cdots+|b_n-b|]$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n}(n-N_1)\cdot\frac{\varepsilon}{4M}<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b+a_nb_0}{n}=ab.$

证法 2(利用性质) 令 $\alpha_n=a_n-a,\beta_n=b_n-b$,立即有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0=\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n$. 根据 Cauchy 不等式得

$$0\leqslant\left(\frac{\alpha_0\beta_n+\alpha_1\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}\beta_1+\alpha_n\beta_0}{n}\right)^2\leqslant\frac{\alpha_0^2+\alpha_1^2+\cdots+\alpha_n^2}{n}\cdot\frac{\beta_0^2+\beta_1^2+\cdots+\beta_n^2}{n}.$$

应用例 1.1.15 的结论有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i^2}{n}\cdot\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\beta_i^2}{n}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i^2}{n+1}\cdot\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\beta_i^2}{n+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\\&=\lim_{n\to+\infty}\alpha_n^2\cdot\lim_{n\to+\infty}\beta_n^2\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\\&=0\cdot0\cdot1=0.\end{aligned}$$

再应用夹逼定理(定理 1.2.6)就证得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_0\beta_n+\alpha_1\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}\beta_1+\alpha_n\beta_0}{n}=0.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0}{n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}[(\alpha_0+a)(\beta_n+b)+\cdots+(\alpha_n+a)(\beta_0+b)]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\alpha_0\beta_n+\cdots+\alpha_n\beta_0}{n}+b\frac{\alpha_0+\cdots+\alpha_n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}+a\frac{\beta_0+\cdots+\beta_n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}+\frac{n+1}{n}ab\right]$$

$$=0+b\cdot0+a\cdot0+1\cdot ab=ab.$$

□

3. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a, b_n\geqslant 0\,(n\in\mathbb{N}), \lim\limits_{n\to+\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=S$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n)=aS$.

证明　令 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，于是 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=S$. 由此可得 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0$. 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-a)=0$. 所以存在正数 M，使得 $|a_n-a|<M$. $\forall n\in\mathbb{N}$.

对 $\forall\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$ 得 $\exists N_1\in\mathbb{N}$，当 $n>N_1$ 时 $|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{3(S+1)}$，固定 N_1. 又因 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=S$. 存在 $N_2\in\mathbb{N}$，当 $n>N_2$ 时，$b_n=|b_n|<\dfrac{\varepsilon}{3N_1M}$，$|S-S_n|<\dfrac{\varepsilon}{3(|a|+1)}$. 于是当 $n>N=N_1+N_2$ 时，有

$$
\begin{aligned}
&|a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n-aS|\\
=&|(a_n-a)b_1+(a_{n-1}-a)b_2+\cdots+(a_1-a)b_n-a(S-S_n)|\\
\leqslant&|a_n-a|b_1+\cdots+|a_{N_1+1}-a|b_{n-N_1}+|a_{N_1}-a|b_{n-N_1+1}+\cdots\\
&+|a_1-a|b_n+|a||S-S_n|\\
<&\frac{\varepsilon}{3(S+1)}S+N_1\cdot M\cdot\frac{\varepsilon}{3N_1M}+|a|\cdot\frac{\varepsilon}{3(|a|+1)}\\
<&\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_nb_1+\cdots+a_1b_n)=aS$. □

4. (Toeplitz 定理)设 $n,k\in\mathbb{N}, t_{nk}\geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}=1$，$\lim\limits_{n\to+\infty} t_{nk}=0$. 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}a_k=a$. 说明例 1.1.15 为 Toeplitz 定理的特殊情形.

证明　由 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$ 知，$\exists M>0$，使 $|a_n-a|<M, \forall n\in\mathbb{N}$.

对 $\forall\varepsilon>0, \exists N_1\in\mathbb{N}$，当 $n>N_1$ 时，$|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，固定 N_1，因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{nk}=0$. 故 $\exists N_2\in\mathbb{N}$，当 $n>N_2$ 时，$0\leqslant t_{nk}<\dfrac{\varepsilon}{2N_1M}, k=1,2,\cdots,N_1$. 令 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，利用等式 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}=1$ 有

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k-a\right|=&\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k-\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}(a_k-a)\right|\\
&\leqslant t_{n1}|a_1-a|+\cdots+t_{nN_1}|a_{N_1}-a|+t_{nN_1+1}|a_{N_1+1}-a|+\cdots+t_{nn}|a_n-a|\\
&<M(t_{n1}+\cdots+t_{nN_1})+\frac{\varepsilon}{2}(t_{nN_1+1}+\cdots+t_{nn})\\
&\leqslant M\cdot N_1\cdot\frac{\varepsilon}{2N_1M}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot 1=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}a_k=a$.

例 1.1.15 是 Toeplitz 定理中 $t_{nk}=\frac{1}{n}(k=1,2,\cdots,n)$时的特殊情形. □

5. 设 a,b,c 为三个给定的实数,令 $a_0=a,b_0=b,c_0=c$,并归纳定义

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2}, \\ b_n = \dfrac{c_{n-1}+a_{n-1}}{2}, \quad n=1,2,\cdots. \\ c_n = \dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \end{cases}$$

证明:$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=\frac{a+b+c}{3}$.

证法 1 由题设得

$$a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=\cdots=a_0+b_0+c_0=a+b+c.$$

令 $L=a+b+c$. 再由

$$a_n-b_n=\frac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2}-\frac{c_{n-1}+a_{n-1}}{2}=-\frac{a_{n-1}-b_{n-1}}{2}$$

$$=(-1)^2\frac{a_{n-2}-b_{n-2}}{2^2}=\cdots=(-1)^n\frac{a_0-b_0}{2^n}$$

得 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n(a_0-b_0)}{2^n}=0$. 同理 $\lim\limits_{n\to+\infty}(c_n-a_n)=0$. 于是

$$a_n=\frac{1}{3}[(a_n+b_n+c_n)-(c_n-a_n)+(a_n-b_n)]=\frac{1}{3}[L-(c_n-a_n)+(a_n-b_n)].$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=\frac{1}{3}[L-0+0]=\frac{L}{3}=\frac{a+b+c}{3},$$

$$\lim_{n\to+\infty} c_n=\lim_{n\to+\infty}[a_n+(c_n-a_n)]=\frac{L}{3}+0=\frac{L}{3},$$

$$\lim_{n\to+\infty} b_n=\lim_{n\to+\infty}[a_n-(a_n-b_n)]=\frac{L}{3}-0=\frac{L}{3}.$$

这就证得 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=\frac{1}{3}(a+b+c)$.

证法 2 同证法 1 得 $a_n+b_n+c_n=a+b+c=L$. 由题设得

$$a_n=\frac{1}{2}(b_{n-1}+c_{n-1})=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(c_{n-2}+a_{n-2})+\frac{1}{2}(a_{n-2}+b_{n-2})\right]$$

$$=\frac{1}{4}[(a_{n-2}+b_{n-2}+c_{n-2})+a_{n-2}]=\frac{1}{4}L+\frac{1}{4}a_{n-2}.$$

于是

$$\begin{aligned}a_{2k}&=\frac{1}{4}L+\frac{1}{4}a_{2(k-1)}=\frac{1}{4}L+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}L+\frac{1}{4}a_{2(k-2)}\right)\\&=\frac{1}{4}L+\frac{1}{4^2}L+\frac{1}{4^2}a_{2(k-2)}=\cdots\\&=\frac{1}{4}L+\frac{1}{4^2}L+\cdots+\frac{1}{4^k}L+\frac{1}{4^k}a_0=\frac{L}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^{k-1}}\right)+\frac{a_0}{4^k}\\&=\frac{L}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^k}{1-\frac{1}{4}}+\frac{a_0}{4^k}=\frac{L}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^k\right)+\frac{a_0}{4^k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{2k+1}&=\frac{1}{4}L+\frac{1}{4}a_{2(k-1)+1}=\cdots=\frac{1}{4}L+\frac{1}{4^2}L+\cdots+\frac{1}{4^k}L+\frac{1}{4^k}a_1\\&=\frac{L}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^k\right)+\frac{a_1}{4^k}.\end{aligned}$$

取极限得 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_{2k}=\frac{L}{3}$，$\lim\limits_{k\to+\infty}a_{2k+1}=\frac{L}{3}$，由定理 1.1.1 立即有 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\frac{L}{3}=\frac{1}{3}(a+b+c)$. 同理 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\frac{1}{3}(a+b+c)$，$\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\frac{1}{3}(a+b+c)$，于是

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}b_n=\lim_{n\to+\infty}c_n=\frac{1}{3}(a+b+c).$$ □

6. 设 a_1,a_2 为实数，令

$$a_n=pa_{n-1}+qa_{n-2},\quad n=3,4,5,\cdots,$$

其中 $p>0,q>0$. $p+q=1$. 证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\frac{a_2+a_1q}{1+q}$.

证明　将 $p=1-q$ 代入得

$$a_n=(1-q)a_{n-1}+qa_{n-2}=a_{n-1}-q(a_{n-1}-a_{n-2}).$$

于是

$$\begin{aligned}a_n-a_{n-1}&=-q(a_{n-1}-a_{n-2})\\&=(-q)^2(a_{n-2}-a_{n-3})=\cdots=(-q)^{n-2}(a_2-a_1).\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}a_n-a_1&=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)\\&=[(-q)^{n-2}+(-q)^{n-3}+\cdots+(-q)+1](a_2-a_1)\\&=\frac{1-(-q)^{n-1}}{1+q}(a_2-a_1).\end{aligned}$$

由于 $p>0,q>0$，故 $q=1-p<1$，$|-q|<1$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}(-q)^{n-1}=0$，从而有

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\left[a_1+\frac{1-(-q)^{n-1}}{1+q}(a_2-a_1)\right]=a_1+\frac{1}{1+q}(a_2-a_1)=\frac{a_2+qa_1}{1+q}.$$ □

7. 设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$满足$a_1>0,4\leqslant b_n\leqslant 5,4\leqslant c_n\leqslant 5$.

$$a_n=\frac{\sqrt{b_n^2+c_n^2}}{b_n+c_n}a_{n-1}.$$

证明:$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

证明 因为$4\leqslant b_n\leqslant 5,4\leqslant c_n\leqslant 5$,故$\sqrt{b_n^2+c_n^2}\leqslant 5\sqrt{2}$,$b_n+c_n\geqslant 8$.于是

$$0<a_n\leqslant\frac{5\sqrt{2}}{8}a_{n-1}\leqslant\frac{5\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{8}a_{n-2}\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)^{n-1}a_1.$$

而$0<\frac{5\sqrt{2}}{8}<1$,故$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)^{n-1}a_1=0$.

由夹逼定理可得$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$. □

8. 用$p(n)$表示能整除n的素数的个数.证明:$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{p(n)}{n}=0$.

证明 先证$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\log_2 n}{n}=0$.对$\forall\varepsilon>0$,取$\varepsilon_0=2^\varepsilon-1>0$.因为$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$,故$\exists N\in\mathbb{N}$,当$n>N$时,有

$$0\leqslant\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon_0=2^\varepsilon-1,\quad 即\quad 1\leqslant\sqrt[n]{n}<2^\varepsilon.$$

取对数即得$0\leqslant\frac{\log_2 n}{n}<\varepsilon$.此即证得$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\log_2 n}{n}=0$.

再证$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{p(n)}{n}=0$.

设$p_1,p_2,\cdots,p_k$为能整除n的素数(共有k个),则$p_i\geqslant 2$,故$2^k\leqslant p_1p_2\cdots p_k\leqslant n$,$k=p(n)$.于是

$$1\leqslant k\leqslant\log_2 n,$$

$$\frac{1}{n}\leqslant\frac{k}{n}=\frac{p(n)}{n}\leqslant\frac{\log_2 n}{n}.$$

由$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$,$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\log_2 n}{n}=0$及夹逼定理就得$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{p(n)}{n}=0$. □

9. 设$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$.证明$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\frac{1}{4}$.

证明 $\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\ \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1}=\frac{k}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1\right)}$,$1\leqslant k\leqslant n$.而$\frac{k}{\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}+1}\leqslant$

$\frac{k}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1}\leqslant\frac{k}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}(1\leqslant k\leqslant n)$,故

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1}$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

代入 x_n 表达式得

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1}\leqslant\frac{1+\frac{1}{n}}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}.$$

再由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\dfrac{1}{4}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}$及夹逼定理就得

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{4}.$$ □

10. 证明：直线上任何区间 I(开的，闭的，半开半闭的)都是连通的，即

$$I\neq(U\cap I)\cup(V\cap I),$$

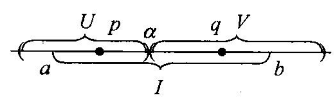
其中 U,V 为直线上的开集，但$(U\cap I)\cap(V\cap I)=\varnothing$，$U\cap I\neq\varnothing$，$V\cap I\neq\varnothing$.

证明　(反证)假设存在直线上的开集 U 和 V，使

$$I=(U\cap I)\cup(V\cap I),$$

且$(U\cap I)\cap(V\cap I)=\varnothing$，$U\cap I\neq\varnothing$. $V\cap I\neq\varnothing$. 取 $p\in U\cap I$，$q\in V\cap I$. 不妨设 $p<q$ (10 题图). 则

$$[p,q]=(U\cap[p,q])\cup(V\cap[p,q]).$$
$$(U\cap[p,q])\cap(V\cap[p,q])=\varnothing.$$
$$p\in U\cap[p,q]\neq\varnothing,\quad q\in V\cap[p,q]\neq\varnothing.$$



10 题图

令 $\alpha=\sup(U\cap[p,q])$，则由 U,V 为开集及上确界定义知

$$p<\alpha<q,$$
$$(\alpha,q]\subset V\cap[p,q],\quad\alpha\in V\cap[p,q].$$

又因 U 也为开集，故 $\alpha\notin U\cap[p,q]$. 由此，$\alpha\notin[p,q]$，矛盾. □

11. 若函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 逐点严格增(即 $\forall x\in\mathbb{R}$ $\exists\delta>0$，当 $x_1,x_2\in(x-\delta,x+\delta)$ 且 $x_1<x<x_2$ 时，必有 $f(x_1)<f(x)<f(x_2)$)，则 f 在$\mathbb{R}$上严格增(即 $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$，当 $x_1<x_2$ 时，必有 $f(x_1)<f(x_2)$).

证法 1　(反证)假设存在 $x_1<x_2$，使得 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$. 因为 f 在 x_1,x_2 严格增，所以存在 $\delta_1>0,\delta_2>0$，s. t. $f|_{(x_i,x_i+\delta_i)}>f(x_i)$ 及 $f|_{(x_i-\delta_i,x_i)}<f(x_i)$，$i=1,2$.

令 $x^*=\sup\{x\in(x_1,x_2)\mid f(x)>f(x_1)\}$，则 $x_1<x^*<x_2$，且 $f(x^*)>f(x_1)$（否则若 $f(x^*)\leqslant f(x_1)$，由 x^* 的定义知 $\exists\, y_n\in(x_1,x_2)$，$f(y_n)>f(x_1)$，且 $y_n<x^*$，$y_n\to x^*$. 这与 f 在 x^* 处严格单调增矛盾).

由 x^* 的定义知 $f|_{(x^*,x_2)}\leqslant f(x_1)$，这与 $f(x^*)>f(x_1)$ 及 f 在 x^* 处严格单调增相矛盾. 故 f 严格单调增.

证法 2 （反证）假设 f 不是 $\mathbb{R}$ 上的严格增函数，则 $\exists\, a_1,b_1\in\mathbb{R}$，$a_1<b_1$，s. t. $f(a_1)\geqslant f(b_1)$. 将 $[a_1,b_1]$ 二等分，若 $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\geqslant f(b_1)$，则记 $\frac{a_1+b_1}{2}=a_2$，$b_2=b_1$；若 $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)<f(b_1)$，则记 $a_2=a_1$，$b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$. 于是总有 $f(a_2)\geqslant f(b_2)$.

再将 $[a_2,b_2]$ 二等分，如上构造 $[a_3,b_3]$，使得 $f(a_3)\geqslant f(b_3)$. 依次下去，得一闭区间序列 $[a_n,b_n]$，$n=1,2,\cdots$，满足：

(1) $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$；

(2) $b_n-a_n=\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}\to 0\ (n\to+\infty)$；

(3) $f(a_n)\geqslant f(b_n)$.

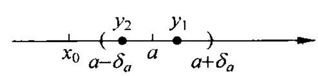
由闭区间套原理知 $\exists_1 x^*\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. 由 f 在 x^* 处的严格增性，$\exists\,\delta>0$，当 $x_1,x_2\in(x^*-\delta,x^*+\delta)$ 且 $x_1<x^*<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x^*)<f(x_2)$. 因 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}=0$，故 $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$，s. t. $[a_{n_0},b_{n_0}]\subset(x^*-\delta,x^*+\delta)$，即 $x^*-\delta<a_{n_0}\leqslant x^*<b_{n_0}<x^*+\delta$ 或 $x^*-\delta<a_{n_0}<x^*\leqslant b_{n_0}<x^*+\delta$，于是总有 $f(a_{n_0})<f(b_{n_0})$. 与构造 $[a_n,b_n]$ 时必有 $f(a_n)\geqslant f(b_n)$ 相矛盾.

这就证明了 f 在 $\mathbb{R}$ 上是严格单调增的.

证法 3 只须证明对 $\forall\, x_0\in\mathbb{R}$，则对 $\forall\, x_1>x_0$，必有 $f(x_1)>f(x_0)$.（反证）取定一 x_0，假设 $\exists\, x_1>x_0$，但 $f(x_1)\leqslant f(x_0)$. 令

$$A=\{x\mid x>x_0,f(x)\leqslant f(x_0)\}.$$

显然 $x_1\in A$，A 非空. 设 $a=\inf A(\geqslant x_0)\in\mathbb{R}$. 由 f 逐点严格单调增知 $a>x_0$ 及 $\exists\,\delta_a>0$，使当 $a-\delta_a<y_2<a\leqslant y_1<a+\delta_a$ 时（见 11 题图(1)），$f(y_2)<f(a)\leqslant f(y_1)$，但 a 是 A 的下确界，可选 $y_1>a$，使得 $f(y_1)\leqslant f(x_0)$，于是



11 题图(1)

$$f(x_0)\geqslant f(y_1)\geqslant f(a)>f(y_2)>f(x_0).$$

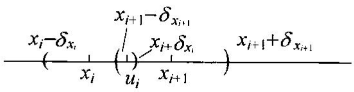
矛盾.

证法 4　$\forall a,b\in\mathbb{R},a<b$,下证 $f(a)<f(b)$.

对 $\forall x_0\in[a,b]$,由题意知 $\exists\delta_{x_0}>0$,当 $u,v\in(x_0-\delta_{x_0},x_0+\delta_{x_0})$,$u<x_0<v$ 时,$f(u)<f(x_0)<f(v)$. 而 $\mathscr{L}=\{(x-\delta_x,x+\delta_x)\mid\forall x\in[a,b]\}$为闭区间$[a,b]$上的一个开覆盖. 由有限覆盖定理知存在$[a,b]$的有限覆盖 $\mathscr{L}^*\subset\mathscr{L}$,

$$\mathscr{L}^*=\{(x_1-\delta_{x_1},x_1+\delta_{x_1}),\cdots,(x_n-\delta_{x_n},x_n+\delta_{x_n})\mid x_i\in[a,b],i=1,2,\cdots,n\}.$$

不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_n$,且任两个开区间互不包含(否则去掉较小的一个).



11 题图(2)

当 $n=1$ 时,则 $x_1-\delta_{x_1}<a\leqslant x_1<b<x_1+\delta_{x_1}$ 或 $x_1-\delta_{x_1}<a<x_1\leqslant b<x_1+\delta_{x_1}$,于是必有 $f(a)<f(b)$.

当 $n\geqslant 2$ 时,由 $\mathscr{L}^*$ 所满足的条件知,$(x_i-\delta_{x_i},x_i+\delta_{x_i})\cap(x_{i+1}-\delta_{x_{i+1}},x_{i+1}+\delta_{x_{i+1}})\neq\varnothing$,故可取 u_i,s. t. $x_i<u_i<x_{i+1}(i=1,2,\cdots,n-1)$(见 11 题图(2)).

于是,可取到 $u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}$,s. t.

$$a\leqslant x_1<u_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<u_{n-1}\leqslant b,$$

$$f(a)\leqslant f(x_1)<f(u_1)<f(x_2)<\cdots<f(x_{n-1})<f(u_{n-1})\leqslant f(b).$$

这就证明了 $f(a)<f(b)$. 由 a,b 的任意性,可知 f 在$\mathbb{R}$上严格单调增. □

12. *应用反证法和闭区间套原理证明:直线上任何开区间(有穷开区间或无穷开区间)不能表示成至多可数个两两不相交的闭区间的并.*

如果将"闭区间"改为"闭集",上述结论是否仍正确.

证明　(反证)设$(a,b)\subset\mathbb{R}$为一开区间,假设它可以表示成至多可数个两两不相交的闭区间 $F_i=[a_i,b_i]$ 的并. 即$(a,b)=\bigcup\limits_i F_i=\bigcup\limits_i[a_i,b_i]$.

(1) 如果闭区间个数有限,即$(a,b)=\bigcup\limits_{i=1}^n F_i=\bigcup\limits_{i=1}^n[a_i,b_i]$,那么

$$(a,b)=\bigcup_{i=1}^n F_i=[\min_{1\leqslant i\leqslant n}a_i,\max_{1\leqslant i\leqslant n}b_i]\supsetneqq(a,b).$$

矛盾.

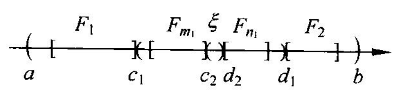
(2) 如果$\{F_i\}$为可数个集合. 因为 $F_1\cap F_2=\varnothing$,令

$$(c_1,d_1)=(\min\{b_1,b_2\},\max\{a_1,a_2\}),$$

则$(c_1,d_1)\cap(F_1\cup F_2)=\varnothing$. 设含在$(c_1,d_1)$的闭区间中下标最小为 m_1,次小的为 n_1,同上 $F_{m_1}\cap F_{n_1}=\varnothing$. 令

$$(c_2,d_2)=(\min\{b_{m_1},b_{n_1}\},\max\{a_{m_1},a_{n_1}\}),$$

显然$(c_2,d_2)\subset(c_1,d_1)$且$(c_2,d_2)\cap(F_{m_1}\cup F_{n_1})=\varnothing$. 依次类推,得到$(c_k,d_k)\subset(c_{k-1},d_{k-1})$且$(c_k,d_k)\cap(F_{m_{k-1}}\cup F_{n_{k-1}})=\varnothing$,于是由闭区间套原理可知,一定存在 $\xi\in[c_k,d_k]$,$k=1,2,\cdots$(12 题图). 由(c_k,d_k)的构造法知 $\xi\notin\bigcup\limits_{i=1}^\infty F_i$,但 $\xi\in(a,b)=\bigcup\limits_{i=1}^\infty F_i$,矛盾.



12 题图