现代数学基础

14

微分方程与数学物理问题

经典方法和现代新方法
非线性数学物理问题
对称性和不变性理论

■ [瑞典] Nail H. Ibragimov 著
■ 卢 琦 杨 凯 罗朝俊 胡享平 译
(按姓氏笔画排序)
■ [美] 罗朝俊 校

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

现代数学基础

14

微分方程与数学物理问题

Weifen Fangcheng Yu Shuxue Wuli Wenti

经典方法和现代新方法
非线性数学物理问题
对称性和不变性理论

■ [瑞典] Nail H. Ibragimov 著
■ 卢 琦 杨 凯 罗朝俊 胡享平 译
(按姓氏笔画排序)
■ [美] 罗朝俊 校

高等教育出版社 · 北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

微分方程与数学物理问题 /（瑞典）伊布拉基莫夫（Ibragimov, N. H.）著; 卢琦等译. —北京: 高等教育出版社, 2010.1

ISBN 978-7-04-026547-7

Ⅰ. 微… Ⅱ. ①伊…②卢… Ⅲ. ①微分方程②数学物理方法 Ⅳ. O175 O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 197496 号

策划编辑	王丽萍	**责任编辑**	张耀明	**封面设计**	张　楠
责任绘图	郝　林	**版式设计**	范晓红	**责任校对**	王效珍
责任印制	陈伟光				

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787 × 1092　1/16	**版　　次**	2010 年 1 月第 1 版
印　　张	22	**印　　次**	2010 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	420 000	**定　　价**	48.00 元

物料号 26547-00

校订者序

1996 年, 我推导非线性弹性悬链线的准确解。如果人们用准确的微分方程来描述复杂自然现象, 那么该方程及其解必然存在着完整性和对称性。我正困惑于将这一思想推广。2000 年, 在一次国际非线性振动会议上, 我与土耳其教授嘎赞富 · 尤纳 (Gazanfer Ünal) 一次交谈中, 他向我介绍了纳伊尔 · 伊布拉基莫夫 (Nail Ibragimov) 教授。从那以后, 我与纳伊尔保持着密切联系, 并且将他的《现代群分析引论》通读一遍, 收益颇深, 随后纳伊尔被邀请作为《非线性科学与数值模拟》杂志核心编委会成员。承蒙伊布拉基莫夫教授的邀请为他的新书在中国出版写序, 在此我备感荣幸。

纳伊尔 · 伊布拉基莫夫教授是一位世界著名数学家。他是微分方程群分析资深专家和传人。微分方程群分析是由索菲斯 · 李在 19 世纪末创造, 而且在 20 世纪 60 年代有着惊人的突破。微分方程群分析是用来寻找非线性微分方程的对称性, 从而获得精确解来准确描述复杂自然现象。为获得非线性微分方程解不能沿袭于简单线性叠加原理。李群和李代数有着广泛的应用, 它和其他的现代分析方法一起, 是求非线性微分方程的解析解的重要工具。

纳伊尔 · 伊布拉基莫夫毕业于莫斯科物理及工程技术学院, 后在苏联新西伯利亚州立大学深造。在 1963 年至 1980 年, 纳伊尔在前苏联科学院西伯利亚分院水动力研究室工作。在这期间, 他系统地发展了微分方程群分析方法。1983 年, 纳伊尔 · 伊布拉基莫夫被授予物理学、数学博士头衔和苏联国家科学技术奖以表彰他的突出贡献。从那以后, 他非常积极地主持国际会议, 并推广群理论和李代数在工程和物理上的应用。纳伊尔延伸了欧拉方程守恒定律的存在性定理, 给

出了充分条件, 并且获得了有限李群泛函不变性。他发现了双曲二阶方程解的惠更斯原理与其黎曼空间上保形不变性的相互关系。纳伊尔还揭示了如何有效地应用 Lie-Backlund 理论去解决数学物理问题。为了表彰纳伊尔 · 伊布拉基莫夫在理论物理和纯数学上的贡献, 2008 年在葡萄牙波尔图市举行的第二届非线性科学及复杂性大会上他被授予拉格朗日奖。

由于纳伊尔对科学的执着追求, 他创造了他在科学上的辉煌与成就。在此, 人们在读他的书的同时, 不仅学习他的知识, 更加需要领略他的思维方式和为人之道。他的科学成就将在这本书中反复展现, 并希望中华学子从中获得启迪。

罗朝俊于美国伊利诺依州戊子秋

(Albert C.J. Luo, Illinois, USA, September, 2008)

前言

现代数学有着 300 多年的历史。最初，在数学建模中，我们主要使用微分方程。在物理、工程科学、生物数学等领域的数学建模问题中，经常会产生非线性微分方程。

今天，理工科学生和研究者经常会遇到怎么求解在数学建模中产生的微分方程的问题。有时，这些问题可以从数值方法加上 hoc 的方法来求得其解。尽管我们总结了超过 400 种形式的关于二次微分方程的积分方法，但是，在一般的情况下，我们还是不能从这些方法中求得所有微分方程的解。

然而，由基础的自然规律和技术问题所产生的微分方程可以由李群分析方法求得其解。例如，李群可以将上述的 400 种形式的方程简化为 4 种形式。群分析理论的发展给出了大量的证据证明：当其他的一些积分方法失效的时候，群理论是求解微分方程的通用工具。事实上，群理论是求解非线性微分方程解析解的唯一的通用和有效的方法。那些旧的积分方法在很大程度上依赖于微分方程是线性的以及存在常系数。但群分析理论在处理线性和非线性方程的问题是等同，对于常系数和变系数都是同样的处理。例如，从传统的角度讲，线性方程：

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_n y = 0,$$

其中系数 $a_1, \cdots, a_n$ 和下面方程的系数是不同的：

$$\bar{x}^n \frac{\mathrm{d}^n \bar{y}}{\mathrm{d}\bar{x}^n} + a_1 \bar{x}^{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} \bar{y}}{\mathrm{d}\bar{x}^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \bar{x} \frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}\bar{x}} + a_n \bar{y} = 0,$$

这个方程被称为欧拉方程。然而，从群分析的角度讲，这些方程仅仅只是具有如

下两个已知对称性的同一个方程的两种不同的表示。即:

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y\frac{\partial}{\partial y} \quad 和 \quad \overline{X}_1 = \bar{x}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \quad \overline{X}_2 = \bar{y}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}.$$

这些算子生成两个相似的李代数并且很容易得到其换元法为: $x = \ln|\bar{x}|$。该换元法将欧拉方程转变为常系数的微分方程。我们知道, 李群分析最重要的特点就是使用它来求解微分方程。将这个理论和应用分离开来, 而仅仅只将它看成抽象数学的一个分支的态度是极其错误的。"把数学与科学的实际需求割裂, 就如同把母牛关起来, 而与公牛隔离开一样, 将导致一无所获" (P.L. Chebyshev, 1821—1894)。在今天, 群分析已经成为微分方程和非线性数学建模的一门课程, 而且吸引着越来越多的学生。例如, 在莫斯科理工学院, 对于*偏微分方程*这门课程, 当我使用李群分析理论来进行授课时, 它吸引了 100 多名的学生前来听课, 但是当我们使用传统的方法来授课时, 仅仅只有 10 个学生参加了这门课。这种相似的情况在南非和瑞典授课时也同样发生。

本书以上述课程和思考为基础, 从某种意义上讲, 也是基于我本人的尝试与经历, 最初, 书稿是为布莱京尔理工学院的工程专业及数理专业的学生所上的微分方程课程而设计的。以后, 教材内容又做了修改和扩充, 从而也适用于下列课程:

微分方程: 这门课将解线性常微分方程和偏微分方程的基础经典方法和求非线性方程解析解的一些新方法结合起来; 它主要面向初学者, 学生将学习使用解决定方程和使用数学软件来找到微分方程的对称性。

数学建模中的解析法: 本门课的重点是在物理, 生物和工程科学领域内的非线性数学模型; 它涵盖的主题有: 非线性叠加, 对称和守恒定量, 群不变解系。

微分方程的群分析: 本门课给数学和工程系的学生介绍了群变换和李代数的理论, 这些理论在实际的应用中是非常重要的; 在本门课中, 学生们将提高他们的分析技巧和获得使用现代方法求解非线性常微分和偏微分方程组的技能。

初值问题中的分布和不变性原理: 一篇重点介绍分布理论这一有用工具的论文; 李的无穷小技巧将被延伸到分布空间, 而且将和不变原理一起使用来求基础解系和解常系数或变系数初值问题方程。

我的课堂上, 我一直致力于使理工科学生更容易的接受微分方程的群分析这个理论。因此, 本书的重点在于如何的应用已知的算子而不是它们是如何计算的。为了阐述我 (作者) 解微分方程变量形式的经验, 我改述著名的法国谚语*cherchez la femme* (法语的字面意思为 "寻找那个女人", 用做当一个男人表现异常或者处于困难, 那么寻求女人的智慧) 为: *如果你不能解非线性微分方程*, *cherchez le groupe*(那么寻求群法吧)。

我真诚感谢我的同事 Claes Jogréus 对我持续的帮助。我的妻子 Raisa 阅读了第二版完成各阶段中的原稿, 修正了打印错误和众多相关有价值的批评建议。在此, 我对他们的帮助表示衷心的感谢。也很感谢我的女儿 Sania 和 Alia 给我提出的一些有用的意见。

Nail H. Ibragimov

Karlskrona, 瑞典, 2008 年 6 月 6 日

目 录

第一章　数学分析中的几个话题

本章是为初学者而设计的一章，是预备章，它提供了初等数学和数学分析中的一些背景知识，这些也是后续章节所必须的.

补充阅读: E. Goursat [10].

1.1　初等数学

1.1.1　数字，变量和初等函数

实数大多以小数的形式出现在我们的实际生活中 (例如: 当你测量距离、质量等). 例如，月球到近地点的距离是 S 千米，其中数 S 近似的等于 356 630. 一个更精确的距离值是 356 629 千米再加 744 米. 因此:

$$S \approx 356\,629.744 \equiv 356\,629 + \frac{744}{1\,000} = 356\,629 + \frac{7}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1\,000}.$$

如果我们想得到更加精确的值，我们也会得到更好的近似，最后得到一个用无限小数表示的 S 值. 因此，我们使用如下的定义.

定义 1.1.1　实数和无限小数是等同的.

$$a = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots, \tag{1.1.1}$$

其中 a_0 是整数， $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是数字. 即它们代表阿拉伯数字 0 到 9 中的