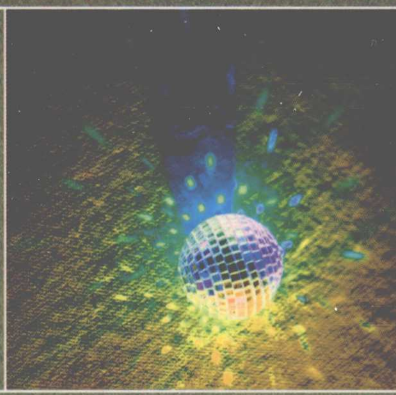
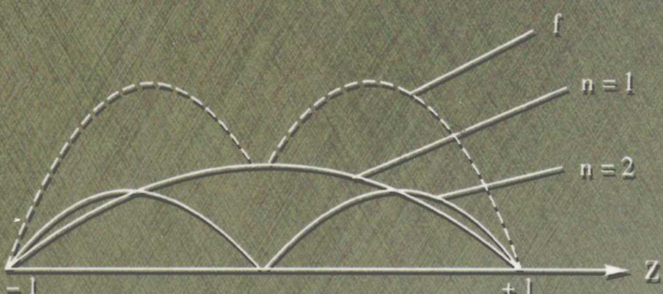
国家自然科学基金资助(69971001)
安徽大学“211”工程专著基金资助

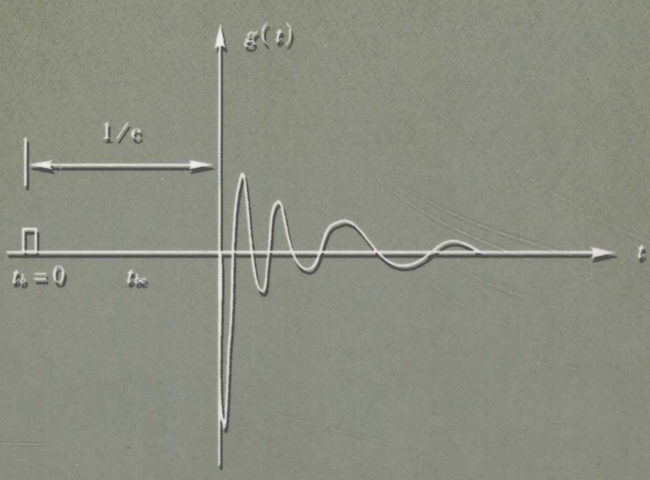
谢处方　吴先良

DIANCI
SANSHE
LILUN
YU
JISUAN



电磁散射理论与计算





安徽大学出版社

国家自然科学基金资助(69971001)
安徽大学“211”工程专著基金资助

电磁散射理论与计算

谢处方　　吴先良

安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

电磁散射理论与计算／谢处方，吴先良著．—合肥：安徽大学出版社，2002.10

ISBN 7-81052-551-4

Ⅰ.电…　Ⅱ.①谢…②吴…　Ⅲ.①电磁波散射—理论②电磁波散射—计算　Ⅳ.0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 030938 号

电磁散射理论与计算　　谢处方　吴先良　著

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路 3 号　邮编 230039)	**经　销**	新华书店
联系电话	编辑室 0551-5106428 发行部 0551-5107784	**印　刷**	合肥远东印刷厂
电子信箱	ahdxchps@mail.hf.ah.cn	**开　本**	787×1092　1/16
责任编辑	李　虹	**印　张**	10
封面设计	孟献辉	**字　数**	220 千
		版　次	2002 年 10 月第 1 版
		印　次	2002 年 10 月第 1 次印刷
		印　数	500

ISBN 7-81052-551-4/T·67　　**定价**　20.00 元

序　　言

本书为电子工程与信息科学方向的研究生教材。全书共七章,内容包括导体的散射、介质体的散射、包层体的散射、组合体与多体散射、吸收边界条件、半空间的散射以及瞬变波的散射。有关电大物体采用高频近似理论计算其散射场的方法因属另一门专业课程内容,本书不再重复介绍。另外,有关电磁散射的应用部分,例如应用于遥感的随机散射,包括粗糙地面的散射、周期结构的散射以及应用于电磁探测的目标识别与成像、逆散射理论、应用于电磁兼容的多源近场耦合,以及散射测量等等方面的内容也不列入本书范围,将在以后开设的其他专业课教材中介绍。

据我们了解,目前还没有一本适合研究生阅读的较为基本而又比较系统地介绍电磁散射理论方面的教材。但有关这方面的论文,散见在众多期刊杂志上已有成千上万篇。其牵涉内容之广泛,研究问题之专深,犹如置身于汪洋大海之中,浩瀚无边,深不可测。因此我们在编写本书时,对内容的取舍只限于选取那些最基本的和最重要的内容,以及曾经被人们广泛关注的问题编入教材。

对于教材内容的组织可以有两种方案:一种是按散射体的不同组成材料来划分,另一种则按计算散射场的方法来划分,这两种体系各有优缺点。考虑到结合散射体的组成材料来叙述比较具体,本书采用前一种方案,并把各种计算方法尽可能按不同散射体多半采用的情况穿插其中。在这里必须强调的是,各种方法和组成材料的散射体之间并不是一一对应,固定不变的。例如,同一种方法既可用于计算导电体的散射,也可用于计算介质体的散射。

对一维、二维、三维散射体,我们一般只分析二维的情况,以便让读者可以举一反三。在计算方法中有一些是以静态场为例来介绍的,读者也可以由此举一反三,分析其应用于交变场和瞬变场的可能性。总之,我们编写本书的宗旨是希望读者通过阅读本书初步了解电磁散射的基本原理和基本计算方法,为研究生以后阅读其他专题论著打下基础。

本书在编写过程中曾参考并引用了一些国内外作者的有关论著,有的已在书中分别注明出处,谨此致谢。本书在付印出版过程中得到安徽大学电子工程与信息科学系和安徽大学出版社的大力支持,赵瑾和其他教师积极协助制图和校对,并提出不少宝贵建议,谨在此一并表示衷心的感谢。

由于时间仓促,加上我们水平有限,书中难免有错误与不妥之处,热诚欢迎广大读者给予批评指正。

谢处方　吴先良

2002 年 5 月于合肥

绪　论

电磁波在传播过程中遇到障碍物就会产生散射。我们把产生散射的物体称为散射体。散射体的大小、形状以及组成材料的不同,可以影响散射场强的大小与分布情况。

研究电磁波的散射机理以及计算其散射场强的大小与分布,具有十分重要的实际意义。最明显的例子是雷达利用飞机的散射回波来进行搜索与跟踪。现在还发展到利用散射回波来识别目标。隐身飞机则是设法减低散射波的场强使雷达无法发现。此外,在通信方面,利用电离层,对流层进行散射通信;在遥感方面,需要了解、分析地面植被和海浪波动的随机散射情况。其他如山地传播、地下勘探、电磁兼容、干扰抗干扰等等问题都牵涉到电磁波的散射。因此《电磁散射理论与计算》是一门十分重要的专业课程。

分析物体的散射特性,一是取决于它的组成材料,二是取决于它的电尺寸。组成材料有导电体、介质体、导体外包介质的包层体以及由多种材料组合在一起的组合体等等,而介质又有无耗、有耗、各向同性与各向异性等区别。

关于计算散射场的方法除极少数形状规则的物体可以用严格的解析法来求解之外,对于电大物体我们可以用高频近似方法,例如 GO,PO,GTD,UTD,复射线理论等来求散射场。反之,对于电小物体,我们可用准静场来进行分析。介乎这两者之间的物体,一般采用数值方法。数值法又可分为从积分方程出发与从微分方程出发来求解散射场的两种方法。经过约二三十年的不断发展和完善,目前已经提出了许许多多计算散射场的方法,例如,MM,FD,FDTD,FE,BE,CG,FMM 等等方法。这些方法各有优缺点,有的是为了避免矩阵求逆,有的是为了加快收敛,有的是为了提高精度,还有的是为了减少贮存等。

因此无论从散射体的组成材料来说或从计算散射场的方法来说,它们的内容都是非常广阔的。作为一本教材,我们只能介绍那些最基本的,也是最重要的内容。

在确定教材的体系时,我们面临这样一个选择:是按散射体的组成材料来划分章节,还是按计算方法来划分章节。前者需要把各种计算方法穿插在不同的组成材料中介绍;而后者则需要把各种具体材料结合到各种计算方法中介绍。为了更好地结合实际,加深形象观点,同时也为了讲解方便,我们选择了前者。因此本书第一章到第四章的标题是依次按导体、介质体、包层体和组合体与多体散射来排分的。同时将各种计算方法分别插到有关章节中介绍。这里要特别强调的是这些方法都与组成材料无关。把矩量法放在导体一章与把有限差分法放在介质体一章没有任何的约束规定。在解介质体的积分方程仍需用矩量法;同样,有限差分法也可用来求解导体的散射。换句话说,这些方法都有其独立性,并不因为放在导体一章就只能解导体的散射;放在介质体一章就只能用来求解介质体的散射。

在采用 FD 和 FE 等方法计算散射场时需要有截断的人工边界来模拟行波。因此在第五章中我们专门介绍各种吸收边界条件。第六章介绍半空间的散射问题,包括分层半

空间、近地天线和埋地体的散射等内容。最后第七章介绍瞬变波,使读者能了解用正弦波激励产生的散射场与用冲击波激励产生的散射场有什么区别,以及冲击波响应与目标识别的关系。

我们希望读者通过阅读本书了解各种材料散射体的散射机理和掌握最基本的计算散射场的各种方法。作为一个入门台阶,让读者可以在这一基础上,阅读更加专门的文献并进行一些深入的研究工作。例如,关于复杂形体的散射、非均匀媒质、各向异性媒质、Chiral 媒质的散射,以及新近提出的 HFEM 混合计算方法,在 FE - BI 中用 FMM 求解边界积分的方法等等。

目　　次

第一章　导体的散射

求解散射场的方法可分为解析法与数值法两大类型。严格的解析法只能求解少数规则形状的散射体。例如,利用分离变量法求解圆柱、圆球等的散射问题。对于电大物体,即当频率很高,工作波长 λ 与物体的线长 l 之比 $\lambda/l \ll 1$ 时,可采用高频近似方法,例如,PO,GO,GTD,UTD 以及复射线等方法求解散射场。反之,对于电小物体,即当频率很低,$\lambda/l \gg 1$ 时,可以看成是准静态场来求解。介乎这两种情况之间的 λ/l,一般采用数值方法来求解。

数值方法又可分为从微分方程出发与从积分方程出发两大类型。前者如 FD,FE 等方法,后者主要采用矩量法。

本章我们主要介绍积分方程法,并采用矩量法求解积分方程。在用矩量法求解积分方程时主要有以下一些问题:

(1) 当矩阵很大时,贮存量和计算工作量都很大,矩阵求逆很困难。

(2) 当工作波长接近物体的谐振波长时,矩阵变成病态,既不稳定,又不准确。为此提出了许多解决这种内谐振的方法。本章介绍其中几种常用的方法,如:CFIE、最小范数解、奇值分解法(SVD)、谱域迭代法(SIT)以及共轭梯度法(CG)等。这些方法既可克服谐振问题,又可避开矩阵求逆,并具有运算快速精确的优点。

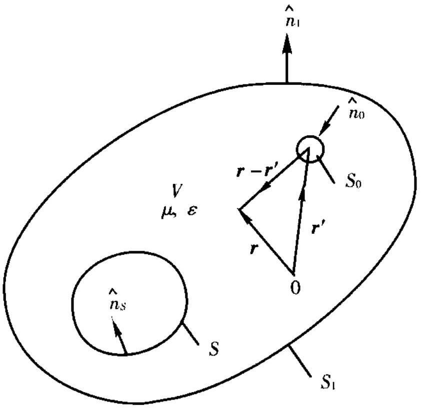


图 1.1

1.1　积分方程

1. 矢量波动方程和矢量格林定理

设图 1.1 的 V 区由边界 $\Sigma = S + S_1$ 封闭,其内有分布源电磁流密度 $\boldsymbol{J}$ 及 $\boldsymbol{M}$,媒质参量为 ε,μ,则由麦克斯韦方程

$$\left.\begin{aligned} &\nabla \times \boldsymbol{E} + \mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{M} \\ &\nabla \times \boldsymbol{H} - \mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E} = \boldsymbol{J} \\ &\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \nabla \cdot \boldsymbol{H} = \frac{\rho_m}{\mu} \end{aligned}\right\} \tag{1.1.1}$$

可导出非齐次矢量波动方程

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} - k^2\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{J} - \nabla \times \boldsymbol{M} \tag{1.1.2a}$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} - k^2 \boldsymbol{H} = -\mathrm{j}\omega\mu \boldsymbol{M} - \nabla \times \boldsymbol{J} \tag{1.1.2b}$$

式中

$$k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon \tag{1.1.3}$$

已知标量格林定理为

$$\iiint_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) \mathrm{d}v = \oiint (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1.1.4}$$

现在让我们来求矢量格林定理

在矢量代数恒等式

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})$$

中令 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}, \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{Q}$,可得

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{P} \times \nabla \times \boldsymbol{Q}) = \nabla \times \boldsymbol{Q} \cdot \nabla \times \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P} \cdot \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{Q}$$

若令 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}, \mathrm{B} = \nabla \times \boldsymbol{P}$,则得

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{Q} \times \nabla \times \boldsymbol{P}) = \nabla \times \boldsymbol{P} \cdot \nabla \times \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q} \cdot \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{P}$$

将所得二式相减,可得

$$\boldsymbol{P} \cdot \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q} \cdot \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{P} = \nabla \cdot (\boldsymbol{Q} \times \nabla \times \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P} \times \nabla \times \boldsymbol{Q})$$

上式在体积 V 内积分,并利用散度定理将右边的体积分化为面积分,即得矢量格林定理

$$\begin{aligned} &\iiint_V (\boldsymbol{P} \cdot \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q} \cdot \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{P}) \mathrm{d}v \\ &= \oiint_\Sigma (\boldsymbol{Q} \times \nabla \times \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P} \times \nabla \times \boldsymbol{Q}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

这里要求函数 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 在体积 V 内及其表面 Σ 上的一级和二级微商连续。

对于电磁场问题,令

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{a}\mathrm{g}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tag{1.1.6}$$

式中 $\boldsymbol{a}$ 为常矢量,G 为自由空间标量格林函数,

$$\mathrm{g}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{e}^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{1.1.7}$$

现在将(1.1.6)(1.1.7)代入(1.1.5),首先由

$$\nabla \times \boldsymbol{P} = \nabla \times \mathrm{g}\boldsymbol{a} = \nabla \mathrm{g} \times \boldsymbol{a} \tag{1.1.8}$$

可得

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{P} &= \nabla \times (\nabla \mathrm{g} \times \boldsymbol{a}) = \nabla \nabla \cdot (\mathrm{g}\boldsymbol{a}) - \nabla^2 (\mathrm{g}\boldsymbol{a}) \\ &= \nabla (\boldsymbol{a} \cdot \nabla \mathrm{g}) - \nabla^2 (\mathrm{g}\boldsymbol{a}) = \nabla (\boldsymbol{a} \cdot \nabla \mathrm{g}) - \boldsymbol{a} \nabla^2 \mathrm{g} \end{aligned}$$

由于 G 满足下式:

$$\nabla^2 \mathrm{g} + k^2 \mathrm{g} = 0 (\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}') \tag{1.1.9}$$

因此

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{P} = \nabla (\boldsymbol{a} \cdot \nabla \mathrm{g}) + \boldsymbol{a} \mathrm{k}^2 \mathrm{g} \tag{1.1.10}$$

其次,由(1.1.2a)式

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{Q} = \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = k^2 \boldsymbol{E} - \mathrm{j}\omega\mu \boldsymbol{J} - \nabla \times \boldsymbol{M} \tag{1.1.11}$$

将(1.1.6)(1.1.10)(1.1.11)代入(1.1.5)式,可得(1.1.5)式之左边为

$$\iiint_v [g\boldsymbol{a}\cdot(k^2\boldsymbol{E}-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{J}-\nabla\times\boldsymbol{M})-\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{a}k^2\mathrm{g}+\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\nabla\mathrm{g}))]\mathrm{d}v$$

$$=\iiint_v \boldsymbol{a}\cdot[-\mathrm{j}\omega\mu\mathrm{g}\boldsymbol{J}-\mathrm{g}(\nabla\times\boldsymbol{M})]\mathrm{d}v-\iiint_v \boldsymbol{E}\cdot\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\nabla\mathrm{g})\mathrm{d}v \qquad (1.1.12)$$

(1.1.12)式右边第二个体积分的被积函数为

$$\boldsymbol{E}\cdot\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\nabla\mathrm{g})=\nabla\cdot[(\boldsymbol{a}\cdot\nabla\mathrm{g})\boldsymbol{E}]-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla\mathrm{g})\nabla\cdot\boldsymbol{E}$$

$$=\nabla\cdot[(\boldsymbol{a}\cdot\nabla\mathrm{g})\boldsymbol{E}]-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla\mathrm{g})\frac{\rho}{\varepsilon}$$

因此

$$\iiint_v \boldsymbol{E}\cdot\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\nabla\mathrm{g})\mathrm{d}v=\iiint_v\nabla\cdot[(\boldsymbol{a}\cdot\nabla\mathrm{g})\boldsymbol{E}]\mathrm{d}v-\iiint_v(\boldsymbol{a}\cdot\nabla\mathrm{g})\frac{\rho}{\varepsilon}\mathrm{d}v$$

$$=\oiint_\Sigma(\boldsymbol{a}\cdot\nabla\mathrm{g})\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}-\iiint_v(\boldsymbol{a}\cdot\nabla\mathrm{g})\frac{\rho}{\varepsilon}\mathrm{d}v$$

以之代入(1.1.12)式,即得(1.1.5)式的左边为

$$\iiint_v \boldsymbol{a}\cdot[-\mathrm{j}\omega\mu\mathrm{g}\boldsymbol{J}-\mathrm{g}(\nabla\times\boldsymbol{M})+\rho/\varepsilon\nabla\mathrm{g}]\mathrm{d}V-\oiint_\Sigma(\boldsymbol{a}\cdot\nabla\mathrm{g})\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \qquad (1.1.13)$$

将(1.1.6)(1.1.8)代入(1.1.5)式右边的面积分中,并将(1.1.13)式中的面积分一项也移到(1.1.5)式的右边,可得

$$\oiint_\Sigma[\boldsymbol{E}\times(\nabla\mathrm{g}\times\boldsymbol{a})-\mathrm{g}\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}+\oiint_\Sigma(\boldsymbol{a}\cdot\nabla\mathrm{g})\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \qquad (1.1.14)$$

上式中的第一项

$$\hat{n}\cdot[\boldsymbol{E}\times(\nabla\mathrm{g}\times\boldsymbol{a})]=(\nabla\mathrm{g}\times\boldsymbol{a})\cdot(\hat{n}\times\boldsymbol{E})$$

$$=\boldsymbol{a}\cdot[(\hat{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla\mathrm{g}]$$

第二项的

$$-\hat{n}\cdot[\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})\mathrm{g}]=-\hat{n}\cdot[\boldsymbol{a}\times(-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}-\boldsymbol{M})\mathrm{g}]$$

$$=-\boldsymbol{a}\cdot[\hat{n}\times(\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})\mathrm{g}]$$

于是(1.1.14)式可写成

$$\oiint_\Sigma\boldsymbol{a}\cdot[-\mathrm{j}\omega\mu(\hat{n}\times\boldsymbol{H})\mathrm{g}+(\hat{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla\mathrm{g}+(\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla\mathrm{g}-\hat{n}\times\boldsymbol{M}\mathrm{g}]\mathrm{d}s \qquad (1.1.15)$$

将(1.1.13)式的体积分和(1.1.15)式的面积分代入(1.1.5)式左右两边,可得

$$\boldsymbol{a}\cdot\iiint_v[-\mathrm{j}\omega\mu\mathrm{g}\boldsymbol{J}-\mathrm{g}\nabla\times\boldsymbol{M}+\frac{\rho}{\varepsilon}\nabla\mathrm{g}]\mathrm{d}v$$

$$=\boldsymbol{a}\cdot\oiint_\Sigma[-\mathrm{j}\omega\mu\mathrm{g}(\hat{n}\times\boldsymbol{H})+\hat{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla\mathrm{g}+(\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla\mathrm{g}-\hat{n}\times\mathrm{g}\boldsymbol{M}]\mathrm{d}s \qquad (1.1.16)$$

上式左边第二个积分

$$-\boldsymbol{a}\cdot\iiint_v(\mathrm{g}\nabla\times\boldsymbol{M})\mathrm{dv}=\boldsymbol{a}\cdot\iiint_v(\nabla\mathrm{g}\times\boldsymbol{M}-\nabla\times\mathrm{g}\boldsymbol{M})\mathrm{d}v$$

$$= \boldsymbol{a} \cdot \iiint_{v} (\nabla g \times \boldsymbol{M}) \mathrm{d}v - \boldsymbol{a} \cdot \iiint_{v} (\nabla \times g\boldsymbol{M}) \mathrm{d}v$$ 其中

$$\boldsymbol{a} \cdot \iiint_{v} (\nabla \times g\boldsymbol{M}) \mathrm{d}v = \iiint_{v} \nabla \cdot (g\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{a}) \mathrm{d}v = \oiint_{\Sigma} (g\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{a}) \mathrm{d}s$$

$$= \hat{n} \cdot \oiint_{\Sigma} (g\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{a}) \mathrm{d}s = \boldsymbol{a} \cdot \oiint_{\Sigma} (\hat{n} \times g\boldsymbol{M}) \mathrm{d}s$$，因此(1.1.16)式变为

$$\iiint_{v} [-\mathrm{j}\omega\mu g\boldsymbol{J} - \boldsymbol{M} \times \nabla g + \frac{\rho}{\varepsilon} \nabla g] \mathrm{d}v$$

$$= \oiint_{\Sigma} [-\mathrm{j}\omega\mu g(\hat{n} \times \boldsymbol{H}) + (\hat{n} \times \boldsymbol{E}) \times \nabla g + (\hat{n} \cdot \boldsymbol{E}) \nabla g] \mathrm{d}s \qquad (1.1.17)$$

2. Stratton 和 Chu 公式

现在假设场点 $\boldsymbol{r}$ 在 V 内，但不在 Σ 面上。如果 V 内有体分布源，则当 $\boldsymbol{r}$ 落在源点上时，即 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$ 时，(17)式的积分将出现奇异问题。为此我们以 $\boldsymbol{r}'$ 源点为圆心作一小球面 S_0，即此时 $\Sigma = S + S_1 + S_0$。S_0 面的单位外法向矢量为 $\hat{n}_0$ 指向球心。下面我们来求(17)式右边在小球面上的积分，以 I_0 表示：

$$I_0 = \oiint_{S_0} [-\mathrm{j}\omega\mu g(\hat{n}_0 \times \boldsymbol{H}) + (\hat{n}_0 \times \boldsymbol{E}) \times \nabla g + (\hat{n}_0 \cdot \boldsymbol{E}) \nabla g] \mathrm{d}s \qquad (1.1.18)$$

已知 $g = \dfrac{e^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$，令 $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}$，可得 $g = \dfrac{e^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{R}|}}{|\boldsymbol{R}|}$，

$$\nabla g = \frac{-\boldsymbol{R}}{R^3} e^{-\mathrm{j}kR} (\mathrm{j}kR + 1) = \frac{1}{R^2} e^{-\mathrm{j}kR} (\mathrm{j}kR + 1) \hat{n}_0$$

因为在小球面上 $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}$ = 小球的半径 R_0，指向与 $\hat{n}_0$ 相反(参见图 1.1)，于是(1.1.18)式可写成

$$I_0 = \oiint_{S_0} e^{-\mathrm{j}kR_0} \{-\mathrm{j}\omega\mu \frac{\hat{n}_0 \times \boldsymbol{H}}{R_0} + [(\hat{n}_0 \times \boldsymbol{E}) \times \hat{n}_0 + (\hat{n}_0 \cdot \boldsymbol{E}) \hat{n}_0](\frac{1}{R_0^2} + \frac{\mathrm{j}k}{R_0})\} \mathrm{d}s$$

上式右边方括弧部分 $[(\hat{n}_0 \times \boldsymbol{E}) \times \hat{n}_0 + (\hat{n}_0 \cdot \boldsymbol{E}) \hat{n}_0] = \boldsymbol{E}$，因此

$$I_0 = e^{-\mathrm{j}kR_0} [-\mathrm{j} \frac{\omega\mu}{R_0} \oiint_{S_0} (\hat{n}_0 \times \boldsymbol{H}) \mathrm{d}s + \frac{1}{R_0^2} \oiint_{S_0} \boldsymbol{E} \mathrm{d}s + \frac{\mathrm{j}k}{R_0} \oiint_{S_0} \boldsymbol{E} \mathrm{d}s]$$

当小球的 R_0 很小时，其球面上的 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ 可认为是常数，即

$$\frac{1}{R_0^2} \oiint_{S_0} \boldsymbol{E} \mathrm{d}s = \boldsymbol{E} \frac{1}{R_0^2} \oiint_{S_0} \mathrm{d}s = 4\pi \boldsymbol{E}$$

于是 $I_0 = e^{-\mathrm{j}kR_0} [-j\omega\mu R_0 4\pi (\hat{n}_0 \times \boldsymbol{H}) + 4\pi \boldsymbol{E} (1 + \mathrm{j}kR_0)]$

当 $R_0 \to 0$，$e^{-\mathrm{j}kR_0} \approx 1$，上式只剩

$$I_0 = 4\pi \boldsymbol{E} \qquad (1.1.19)$$

将奇异点从积分区域 V 中分离出去后，不含奇异点的体积分用 $⨍\!\!\!\iiint_{v}$ 表示，或简写为 $⨍_{v}$ 称为主值积分，于是(1.1.17)式可写成

$$⨍_{v} [\ ] \mathrm{d}v = \oint_{S+S_1} [\ ] \mathrm{d}s + I_0 \qquad (1.1.20)$$

即

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{v}[\mathrm{j}\omega\mu g\boldsymbol{J} + \boldsymbol{M}\times\nabla g - \frac{\rho}{\varepsilon}\nabla g]\mathrm{d}v$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}[-\mathrm{j}\omega\mu g(\hat{n}\times\boldsymbol{H} + (\hat{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla g + (\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla g]\mathrm{d}s \qquad (1.1.21)$$

式中　$\Sigma = S + S_1$

利用对偶性关系,可由(1.1.21)式直接写出磁场的对应公式:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{v}[-\mathrm{j}\omega\varepsilon g\boldsymbol{M} + \boldsymbol{J}\times\nabla g + \frac{\rho_m}{\mu}\nabla g]\mathrm{d}v$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}[\mathrm{j}\omega\varepsilon g(\hat{n}\times\boldsymbol{E}) + (\hat{n}\times\boldsymbol{H})\times\nabla g + (\hat{n}\cdot\boldsymbol{H})\nabla g]\mathrm{d}s \qquad (1.1.22)$$

(1.1.21)(1.1.22)式给出了区域 V 内任一点 $\boldsymbol{r}$(不在 Σ 上)的电磁场计算公式,它们是由 V 内的体分布源和 Σ 上的等效面源 $\boldsymbol{J}_s = \hat{n}\times\boldsymbol{H}, \boldsymbol{M}_s = -\hat{n}\times\boldsymbol{E}, \rho_s = \varepsilon\hat{n}\cdot\boldsymbol{E}$ 和 $\rho_{ms} = \mu\hat{n}\cdot\boldsymbol{H}$ 的积分产生的。这两个公式不仅可以计算 V 内的电磁场,而且还可以由它们推导出求解散射、绕射等问题的积分方程,称为 Stratton 和 Chu 公式。

3. 电场积分方程和磁场积分方程(EFIE 和 MFIE)

当图 1.1 的封闭面扩大到无限远,V 内没有体分布源,但有从无限远处来的入射场 $\boldsymbol{E}^i, \boldsymbol{H}^i$,又 S 面为散射体的封闭面时,求 V 内的电磁场问题就是我们所讨论的散射问题(图 1.2)。

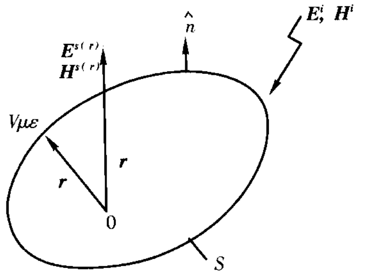


图 1.2

此时(1.1.21)式的 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 为 V 区内某点的总场,它等于入射场 $\boldsymbol{E}^i$ 与散射场 $\boldsymbol{E}^s$ 之和,即

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^i + \boldsymbol{E}^s \qquad (1.1.23)$$

(1.1.21)式右边,由于没有体分布源,只有面积分。S_1 面上积分的贡献就是入射场 $\boldsymbol{E}^i, \boldsymbol{H}^i$,因此

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^i + \boldsymbol{E}^s = -\frac{1}{4\pi}\{\oint_{s} + \oint_{s_1}\}[-\mathrm{j}\omega\mu g(\hat{n}\times\boldsymbol{H}) + (\hat{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla g + (\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla g]\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{4\pi}\oint_{s}[-\mathrm{j}\omega\mu g(\hat{n}\times\boldsymbol{H}) + (\hat{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla g + (\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla g]\mathrm{d}s + \boldsymbol{E}^i \qquad (1.1.24)$$

(1.1.24)式右边由于 S 面上的 $\hat{n}_2$ 已改为指向 V 区而改用正号。

由此可得散射场的计算公式

$$\boldsymbol{E}^s(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\oint_{s}[-\mathrm{j}\omega\mu g(\hat{n}\times\boldsymbol{H}) + (\hat{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla g + (\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla g]\mathrm{d}s \qquad (1.1.25)$$

仿此可得

$$\boldsymbol{H}^s(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\oint_{s}[\mathrm{j}\omega\varepsilon g(\hat{n}\times\boldsymbol{E}) + (\hat{n}\times\boldsymbol{H})\times\nabla g + (\hat{n}\cdot\boldsymbol{H})\nabla g]\mathrm{d}s \qquad (1.1.26)$$

(1.1.25)(1.1.26)式是用散射体表面的电磁场来求散射体外 V 空间的散射场,但表面上的电磁场分布并不知道,下面我们将先解决这一问题。

我们先仍从(1.1.17)式出发,将场点 $\boldsymbol{r}$ 移到 S 面上来求表面上的电磁场。但在 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'$ 重合处将产生奇异问题,为此我们仍用一小球面 S_0 将源点隔开,此时 S 面可分为两部分, $S = S_2 + S_3$(图 1.3),S_3 为与 S_0 相对应的小半球面,S_2 为其余部分。相应于(1.1.17)式,现在是

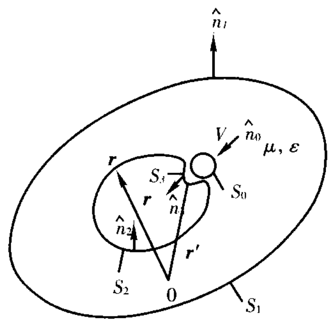


图 1.3

$$\int_V [\,]\mathrm{d}v = \left\{\oint_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{S_3} + \oint_{S_0}\right\}[\,]\mathrm{d}s \tag{1.1.27}$$

式中[ ]部分与(1.1.17)式的相同。

令 $I = \left\{\oint_{S_0} + \int_{S_3}\right\}[\,]\mathrm{d}s$

其中: $\oint_{S_0}[\,]\mathrm{d}s = 4\pi\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$;由于$\hat{n}_3 = -\hat{n}_0$,且 S_3 为半个球面,故

$$\int_{S_3}[\,]\mathrm{d}s = -2\pi\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

于是

$$I = 4\pi\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - 2\pi\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 2\pi\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.28}$$

将 S_3 的奇异值分离出去之后,S 面上其余部分的积分为主值积分,(1.1.27)式可写成

$$\int_V [\,]\mathrm{d}v = \left\{\oint_{S_1} + \fint_S\right\}[\,]\mathrm{d}s + 2\pi\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

由此可得 S 面上的电场积分表示式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = & -\frac{1}{2\pi}\int_V\left[\mathrm{j}\omega\mu g\boldsymbol{J} + \boldsymbol{M}\times\nabla g - \frac{\rho}{\varepsilon}\nabla g\right]\mathrm{d}v \\ & -\frac{1}{2\pi}\left\{\oint_{S_1} + \fint_S\right\}\times\left[-\mathrm{j}\omega\mu g(\hat{n}\times\boldsymbol{H}) + (\hat{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla g + (\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla g\right]\mathrm{d}s \qquad (\boldsymbol{r}\in S)\end{aligned} \tag{1.1.29}$$

相应的磁场积分表示式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = & \frac{1}{2\pi}\int_V\left[-\mathrm{j}\omega\varepsilon g\boldsymbol{M} + \boldsymbol{J}\times\nabla g + \frac{\rho_m}{\mu}\nabla g\right]\mathrm{d}v \\ & -\frac{1}{2\pi}\left\{\oint_{S_1} + \fint_S\right\}\times\left[-\mathrm{j}\omega\varepsilon g(\hat{n}\times\boldsymbol{E}) + (\hat{n}\times\boldsymbol{H})\times\nabla g + (\hat{n}\cdot\boldsymbol{H})\nabla g\right]\mathrm{d}s(\boldsymbol{r}\in S)\end{aligned} \tag{1.1.30}$$

现在我们来讨论散射问题。在散射问题中，V 内不存在体分布源，因此(1.1.29)(1.1.30)式中的体积分为零，又 $\oint_{s_1}[\quad]\mathrm{d}s$ 用入射场来取代，由此可得散射体表面上的电场

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2\pi}\oint_s[-\mathrm{j}\omega\mu g(\hat{n}\times\boldsymbol{H}) + (\hat{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla g + (\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla g]\mathrm{d}s(\boldsymbol{r}\in \mathrm{S}) \tag{1.1.31}$$

仿此，磁场

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2\pi}\oint_s[\mathrm{j}\omega\epsilon g(\hat{n}\times\boldsymbol{E}) + (\hat{n}\times\boldsymbol{H})\times\nabla g + (\hat{n}\cdot\boldsymbol{H})\nabla g]\mathrm{d}s(\boldsymbol{r}\in \mathrm{S}) \tag{1.1.32}$$

面积分前改用正号，是考虑到$\hat{n}$的指向与$\hat{n}_2$ 和$\hat{n}_3$ 相反。积分方程(1.1.31)(1.1.32)分别称为电场积分方程(EFIE)和磁场积分方程(MFIE)。

(1.1.31) 和(1.1.32) 式左边是散射体表面的电磁场，但右边积分符号里面也有待求的表面电磁场。要从这两个积分方程解出 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$，然后再代入(1.1.25)(1.1.26) 式求出空间任一点的散射场。

4. 散射体为导电体的积分方程

当散射体为导电体时($\sigma\to\infty$)，在封闭面 S 上$\hat{n}\times\boldsymbol{E}=0$，$\hat{n}\cdot\boldsymbol{H}=0$。以$\hat{n}$ 叉乘(1.1.31)(1.1.32) 式两边得

$$\hat{n}\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\hat{n}\times\oint_s[\mathrm{j}\omega\mu g(\hat{\mathrm{n}}\times\boldsymbol{H}) - (\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla g]\mathrm{d}s \quad (\boldsymbol{r}\in \mathrm{S}) \tag{1.1.33}$$

$$\hat{n}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = 2\,\hat{n}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2\pi}\hat{n}\times\oint_s[(\hat{n}\times\boldsymbol{H})\times\nabla g]\mathrm{d}s \quad (\boldsymbol{r}\in \mathrm{S}) \tag{1.1.34}$$

在面积分中的$\hat{n}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$ 为导体面上的感应电流密度。另由

$\nabla\cdot(\hat{n}\times\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\hat{n}) - \hat{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}) = -\hat{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}) = -\hat{n}\cdot\mathrm{j}\omega\epsilon\boldsymbol{E}$，可得

$$\hat{n}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\mathrm{j}}{\omega\epsilon}\nabla\cdot(\hat{n}\times\boldsymbol{H}) = \frac{\mathrm{j}}{\omega\epsilon}\nabla\cdot\boldsymbol{J} \tag{1.1.35}$$

因此(1.1.33)(1.1.34)式可写成

$$\hat{n}\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\mathrm{j}\omega\epsilon}\hat{n}\times\oint_s[-k^2 g\boldsymbol{J} + (\nabla\cdot\boldsymbol{J})\nabla g]\mathrm{d}s \quad (\boldsymbol{r}\in \mathrm{S}) \tag{1.1.36}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = 2\,\hat{n}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2\pi}\hat{n}\times\oint_s[\boldsymbol{J}\times\nabla g)\mathrm{d}s \quad (\boldsymbol{r}\in \mathrm{S}) \tag{1.1.37}$$

(1.1.36)(1.1.37)是导电体的 EFIE 和 MFIE。

5. 用 L，K 算子表示的 EFIE 和 MFIE

由(1.1.35)式，我们同样可以求得

$$\hat{n}\cdot\boldsymbol{H} = \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\nabla\cdot\boldsymbol{M} \tag{1.1.38}$$

此处

$$\boldsymbol{M} = -\hat{n} \times \boldsymbol{E} \tag{1.1.39}$$

是表面磁流密度。

将 $\boldsymbol{J} = \hat{n} \times \boldsymbol{H}, \boldsymbol{M} = -\hat{n} \times \boldsymbol{E}, \hat{n} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\mathrm{j}}{\omega\varepsilon}\nabla \cdot \boldsymbol{J}, \hat{n} \cdot \boldsymbol{H} = \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\nabla \cdot \boldsymbol{M}$,又以

$$G = \frac{1}{4\pi}\mathrm{g} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{1.1.40}$$

代入(1.1.31)式中,可得

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) + \oint_s [-\mathrm{j}\omega\mu G\boldsymbol{J} - \boldsymbol{M} \times \nabla G + \frac{\mathrm{j}}{\omega\varepsilon}\nabla \cdot \boldsymbol{J}\nabla G]\mathrm{d}s \tag{1.1.41}$$

将(1.1.25)与(1.1.31)式进行比较后,可以将此二式合并用下式表示:

$$\theta(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) - \mathrm{j}\omega\mu\oint_s \boldsymbol{J}G\mathrm{d}s + \frac{j}{\omega\varepsilon}\oint_s \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{J}G\mathrm{d}s + \oint_s \boldsymbol{M} \times \nabla G\mathrm{d}s$$

$$= \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) - \mathrm{j}\omega\mu\oint_s [J - \frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon}\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{J}]G\mathrm{d}s + \oint_s \boldsymbol{M} \times \nabla G\mathrm{d}s = \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) - L\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) + K\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.42}$$

式中

$$\theta = \begin{cases} 1, 当\ \boldsymbol{r} \in \mathrm{v} \\ 1/2, 当\ \boldsymbol{r} \in S \\ 0, 其他 \end{cases} \tag{1.1.43}$$

算子 L 及 K 定义为

$$L\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{j}\omega\mu\int_s [\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r}') - \frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon}\nabla\nabla' \cdot \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r}')]G\mathrm{d}s' \tag{1.1.44}$$

$$K\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r}) = -\int_s \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r}') \times \nabla G\mathrm{d}s' \tag{1.1.45}$$

仿此,可得

$$\theta(\boldsymbol{r})\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) - K\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) - \frac{1}{\eta^2}L\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.46}$$

此处

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{1.1.47}$$

1.2 矩量法(MM)

矩量法(MM)(Moment Method 之简写)是求解微分方程或积分方程的一种重要的数值方法,在如下形式的非齐次方程

$$L(f) = g \tag{1.2.1}$$

中,L 为微分算子或积分子算子,f 为待求的场量或响应,g 为已知的源或激励,矩量法就是将(1.2.1)式所描述的连续方程离散化为代数方程组,用数值法求出近似解,具体步骤

如下：

(1) 设空间为线性的，在算子 L 的定义域内选择一组函数 $\{f_n\}$，将待求函数 f 展开为它们的组合：

$$f = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n f_n \tag{1.2.2}$$

式中 α_n 为待求系数，f_n 称为基函数，或展开函数，由我们选取。将(1.2.2) 式代入(1.2.1) 式，并因 L 为线性算子，可得

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n L(f_n) \approx g \tag{1.2.3}$$

(2) 在 L 域内选择一组加权函数(或检验函数) $W_1, W_2, \cdots W_n$ 的集合 $\{W_m\}$，并以每一 W_m 对(1.2.3) 式两边求内积，得

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \langle W_m, L(f_n)\rangle \approx \langle W_m, g\rangle (m = 1,2,\cdots,N) \tag{1.2.4}$$

函数 $W(x)$ 与 $f(x)$ 的内积定义为

$$\langle W(x), f(x)\rangle = \int W(x) f(x) \mathrm{d}x \tag{1.2.5}$$

(1.2.3)(1.2.4)式可写成如下的矩阵形式

$$[l_{mn}][\alpha_n] = [g_m] \tag{1.2.6}$$

式中

$$[l_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle W_1, Lf_1\rangle & \langle W_1, Lf_2\rangle & \cdots & \langle W_1, Lf_N\rangle \\ \langle W_2, Lf_1\rangle & \langle W_2, Lf_2\rangle & \cdots & \langle W_2, Lf_N\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle W_N, Lf_1\rangle & \langle W_N, Lf_2\rangle & \cdots & \langle W_N, Lf_N\rangle \end{bmatrix}$$

$$[\alpha_n] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}, [g_m] = \begin{bmatrix} \langle W_1, g\rangle \\ \langle W_2, g\rangle \\ \vdots \\ \langle W_N, g\rangle \end{bmatrix} \tag{1.2.7}$$

(3) 现在我们已经把(1.2.1) 的连续方程离散化为(1.2.6) 的代数方程组了。如果 $[l_{mn}]$ 有逆矩阵存在，记为$[l_{mn}]^{-1}$，则待求系数 α_n 可由下式解得

$$[\alpha_n] = [l_{mn}]^{-1}[g_m] \tag{1.2.8}$$

解出 α_n 之后，以之代入(1.2.2)，就可求得我们需要的 f。

用矩量法求解电磁场问题的关键是如何选择好基函数 f_n 和加权函数 W_m，这些函数的选择是否合适关系到以下几个问题：

(1) 计算矩阵元素的难易程度

(2) 矩阵$[l_{mn}]$是否良态

(3) 收敛的快慢