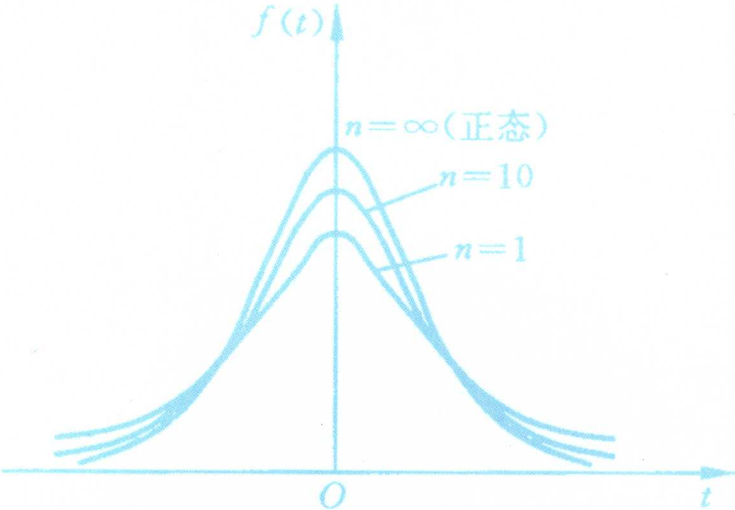
《高等数学》学习指导与作业设计丛书

丛书主编 周之虎

丛书副主编 董 毅 张裕生 梅 红



概率统计学习指导与作业设计

董 毅 主编

安徽大学出版社

《高等数学》学习指导与作业设计丛书

安徽省精品课程《高等数学》建设成果

安徽省省级教学研究项目成果

概率统计
学习指导与作业设计

董　毅　主编

安徽大学出版社

内容提要

本书是浙江大学盛骤等编写的《概率论与数理统计(第三版)》的辅助教材。全书分为9章。主要内容包括教学要求、知识要点、答疑解惑、应用案例、作业设计。通过教学要求、知识要点与答疑解惑,说明重点,注重联系,构建知识结构,凸显思想方法。全书按照作业设计的思想,按内容分层次多形式设计作业。每节设计基本作业A和提高作业B两类,每章设计综合作业C、综合作业D与自测作业。作业均给出参考答案与提示。本书便于教学,可与教材配合使用,作为各专业学生的参考书,也可作为全国硕士研究生入学考试的复习用书。

图书在版编目(CIP)数据

概率统计学习指导与作业设计/董毅主编.
—合肥:安徽大学出版社,2009.8
(高等数学学习指导与作业设计丛书/周之虎主编)

ISBN 978-7-81110-602-2

Ⅰ.概… Ⅱ.董… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料
②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第155740号

概率统计学习指导与作业设计

董 毅 主编

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路3号 邮编230039)	**经 销**	各地新华书店
		印 刷	合肥创新印务有限公司
联系电话	编辑室 0551-5106428 发行部 0551-5107716 5108397	**开 本**	710×1000 1/16
		印 张	20.25
E-mail	ahdxchps@mail.hf.ah.cn	**字 数**	386千
责任编辑	李镜平	**版 次**	2009年10月第1版
特约编辑	罗季重	**印 次**	2009年10月第1次印刷
封面设计	孟献辉		

ISBN 978-7-81110-602-2 **定价 36.00元**

前 言

本书是按照浙江大学盛骤等编写的《概率论与数理统计(第三版)》教材体系编写的.主要内容包括:

教学要求:按章编写,提出教学基本要求,便于学生明确要求,掌握重点.

知识要点:按章编写,概括本章主要内容,便于复习.

串讲小结:按章编写,说明本章在全书中的地位与作用,串讲本章内容和方法、体系主线、重点,小结方法,帮助学生把握知识结构与联系.

答疑解惑:按章编写,对本章学习中常见的疑难问题展开分析,帮助学生理解,启迪学习者思考.

应用案例:按章编写,列举本章知识的应用,或利用计算机来计算或体验概率统计问题的案例,引导理论联系实际,应用理论解决实际问题,激发学生的学习兴趣.

作业设计:按章节编写,一般分四层设计作业.每节设计基础作业A和提高作业B两类,内容只涉及本节,A类是基础性的,B类是提高性的;每章设计综合作业C(内容涉及本章中几节)与综合作业D(内容涉及本章和以前章节)两类.

自测作业:按章编写,便于学生及时巩固所学知识,检查对本章内容的掌握情况.

附录:包括考卷选编、常用求和与积分公式、计数方法及考卷的参考答案与提示.

本书是周之虎教授主持的安徽省精品课程《高等数学》建设成果之一,也是董毅副教授主持的安徽高等学校省级教学研究项目(项目编号:2008jyxm425)、蚌埠学院教育教学研究重点项目(项目编号:yjjy0816)、蚌埠学院自然科学研究项目(项目编号:BBXY2007—203A)成果之一.

本书吸收了作者与许多专家的教学研究新成果,具有如下特点:

第一,方便教学,有利自学;

第二，注重阐述知识结构与联系；

第三，注重阐述、凸显以哲学思想统帅的概率统计思想方法；

第四，按照作业设计的思想，按内容分层次多形式设计作业.

本书由董毅设计、主编.《参考答案与提示》部分的第1、2、3、5章内容由赵玉梅编写，第4章内容由亓传胜编写，第6、7、8、9章内容以及附录1、3由张相蓉编写；其他均由董毅编写. 全书由周之虎教授审阅.

本教材可供高等院校本科理工类学生使用. 略去带星号的内容，也可供高等院校专科理工类学生使用.

由于编者水平所限，本书缺点和不当之处在所难免，恳请读者、专家学者批评指正.

编　者

2009年6月20日

符号说明

对本书中可能与其他教材表示不同的符号作如下说明：

$B(n,p)$ 表示参数为 n、p 的二项分布；

$P(\lambda)$ 表示参数为 λ 的泊松分布；

$G(p)$ 表示参数为 p 的几何分布；

$U[a,b]$ 表示$[a,b]$区间上的均匀分布；

$E(\lambda)$ 表示参数为 λ 的指数分布；

$N(\mu,\sigma^2)$ 表示均值为 μ，方差为 σ^2 的正态分布；

$F(x)=P(X\leqslant x)$ 表示随机变量 X 的分布函数；

$\Phi(x)$ 表示标准正态分布的分布函数；

$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 表示样本均值；

$S^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 表示样本方差；

$\tilde{S}^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 表示样本修正方差；

$x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$ 表示数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 由小到大的重排；

z_α 表示标准正态分布的概率为 α 的上临界值；

$\chi^2_\alpha(n)$ 表示自由度为 n 的 χ^2 分布的概率为 α 的上临界值；

$t_\alpha(n)$ 表示自由度为 n 的 t 分布的概率为 α 的上临界值；

$F_\alpha(m,n)$ 表示自由度为 m、n 的 F 分布的概率为 α 的上临界值；

$S_w^2=\dfrac{1}{m+n-2}\left[\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2\right]$ 表示两个总体样本的修正方差，其中 $\overline{X}=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}X_i$，$\overline{Y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i$；

$i.i.d.$ 表示独立同分布；

$X\sim$ 表示 X 服从的分布；

$X\dot{\sim}$ 表示 X 近似服从的分布；

$r.v.$ 表示随机变量或随机向量.

目　录

第1章　概率论的基本概念

1.1　教学要求

1. 理解样本空间、随机事件、完备事件组等概念，掌握事件之间的关系和运算.

2. 熟练掌握概率的定义与性质、等可能概型，理解频率与概率的关系.

3. 理解条件概率的概念，掌握乘法定理、全概率公式和贝叶斯公式，并能灵活运用.

4. 理解事件相互独立的概念，会用事件的独立性进行运算.

5. 掌握伯努利概型，能够将实际问题归结为伯努利概型，并计算其概率.

1.2　知识要点

【知识要点】

1. 随机试验与样本空间

具有下列3个特性的试验称为"随机试验"：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，但事先知道每次试验所有可能的结果；

(3) 每次试验前不能确定哪一个结果会出现.

试验的所有可能结果所组成的集合称为样本空间，用 Ω 表示，其中的每一个结果用 w 表示，w 称为样本空间中的样本点或基本事件.

2. 随机事件

在随机试验中，把一次试验中可能发生也可能不发生的事情称为随机事件（简称事件）. 一次试验中必然发生的事件称为必然事件，记作 Ω. 一次试验中不可能发生的事件称为不可能事件，记作 $\varnothing$. 通常把必然事件与不可能事件看做特殊的随机事件.

3. 事件的关系及运算

(1) 包含:若事件 A 发生,则事件 B 一定发生,那么,称事件 B 包含事件 A,或称事件 A 包含于事件 B,记作 $A \subset B$(或 $B \supset A$).

(2) 相等:若两事件 A 与 B 相互包含,即 $A \supset B$,且 $B \supset A$,那么,称事件 A 与 B 相等;记作 $A = B$.

(3) 和事件:"事件 A 与事件 B 中至少有一个发生"这一事件称为 A 与 B 的和事件,记作 $A \cup B$;"n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个事件发生"这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和,记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$(简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$).

(4) 积事件:"事件 A 与事件 B 同时发生"这一事件称为 A 与 B 的积事件,记作 $A \cap B$(简记为 AB);"n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生"这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件,记作 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$(简记为 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$).

(5) 互不相容:若事件 A 和 B 不能同时发生,即 $AB = \varnothing$,那么称事件 A 与 B 互不相容(或互斥);若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件不能同时发生,即 $A_iB_j = \varnothing (1 \leqslant i < j \leqslant n)$,那么称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容(或两两互斥).

(6) 对立事件:若事件 A 与 B 互不相容,且它们中至少有一个事件发生,即 $AB = \varnothing$ 且 $A \cup B = \Omega$,那么称 A 与 B 是对立的(或互逆的),或称 B 是 A 的对立(或逆)事件. 事件 A 的对立事件记作 $\overline{A}$.

(7) 差事件:"事件 A 发生且事件 B 不发生"这一事件称为事件 A 与 B 的差事件,记作 $A - B$(或 $A\overline{B}$).

(8) 交换律:对任意两个事件 A 和 B,有

$$A \cup B = B \cup A, \quad AB = BA.$$

(9) 结合律:对任意事件 A, B, C,有

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

(10) 分配律:对任意事件 A, B, C,有

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(11) 德·摩根(De Morgan)法则:对任意事件 A 和 B 有

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

4. 频率与概率的定义

(1) 频率的定义:设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 n_A 次,则称 $\dfrac{n_A}{n}$ 为随机事件 A 发生的频率,记作 $f_n(A)$.

(2) 概率的统计定义:当试验次数 n 很大时,事件 A 的频率 $f_n(A)$ 在一个稳定的值 $p(0 < p < 1)$ 附近摆动,则称 p 为事件 A 的概率,即 $P(A) = p$.

(3) 古典概率的定义:具有下列两个特征的随机试验称为古典概型:

(i)试验的样本空间 Ω 是个有限集,不妨记作 $\Omega=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$;

(ii)在每次试验中,每个样本点 $w_i(i=1,2,\cdots,n)$ 出现的概率相同,即

$$P(\{w_1\})=P(\{w_2\})=\cdots=P(\{w_n\})=\frac{1}{n}.$$

在古典概型中,事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含样本点的个数}}{\Omega\text{ 中所含样本点的个数}}=\frac{|A|}{|\Omega|}.$$

*(4) 几何概率的定义:如果随机试验的样本空间是一个区域(可以是直线上的区间或平面、空间中的区域),且样本空间中每个试验结果的出现具有等可能性,那么事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的长度(或面积、体积)}}{\text{样本空间的长度(或面积、体积)}}.$$

*(5) 概率的公理化定义:设随机试验的样本空间为 Ω,随机事件 A 是 Ω 的子集,$P(A)$ 是实值函数.且满足下列三条公理:

公理 1(非负性):对于任一随机事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

公理 2(规范性):对于必然事件 Ω,有 $P(\Omega)=1$;

公理 3(可列可加性):对于两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i);$$

则称 $P(A)$ 为随机事件 A 的概率.

5. 概率的性质

由概率的 3 条公理可导出概率的一些重要性质:

(1) $P(\varnothing)=0$.

(2) (有限可加性)设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

(3) 对于任意一个事件 A,有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

(4) 若事件 A,B 满足 $A\subset B$,则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),\text{且 }P(A)\leqslant P(B).$$

(5) 对于任意两个事件 A,B,有

$$P(B-A)=P(B)-P(AB).$$

(6) 对于任意一个事件 A,有

$$P(A)\leqslant 1.$$

(7) (加法公式)对于任意两个事件 A,B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

一般地，对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n).$$

6. 条件概率与乘法公式

(1) 条件概率：设 A 与 B 是两个事件，$P(B)>0$，在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率称为条件概率，记作 $P(A|B)$，

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

在同一条件下，条件概率具有概率的一切性质.

(2) 乘法公式：对于任意两个事件 A 与 B，当 $P(A)>0$，$P(B)>0$ 时，有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B).$$

7. 随机事件的相互独立

如果事件 A 与 B 满足

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

称事件 A 与 B 相互独立.

关于事件 A,B 的独立性有下列两条性质：

(1) 如果 $P(A)>0$，那么，事件 A 与 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B|A)=P(B)$；如果 $P(B)>0$，那么事件 A 与 B 相互独立的充分必要条件是 $P(A|B)=P(A)$. 这条性质的直观意义是"事件 A 与 B 发生与否互不影响".

(2) 下列 4 个命题是等价的：

(i) 事件 A 与事件 B 相互独立；

(ii) 事件 A 与事件$\overline{B}$相互独立；

(iii) 事件$\overline{A}$与事件 B 相互独立；

(iv) 事件$\overline{A}$与事件$\overline{B}$相互独立.

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立的定义：若对任意一个 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 与任意的 $i_1,i_2,\cdots,i_n(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$，总满足

$$P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立. 这里实际上包含了 2^n-n-1 个等式.

8. 伯努利概型与二项概率

伯努利概型是关于独立重复试验序列的一类重要的概率模型，其特点是各个重复试验是独立进行的，且每次试验中仅有两个对立的结果：事件 A 发生或不发生. 设在每次试验中，随机事件 A 发生的概率 $P(A)=p(0<p<1)$，则在 n 次独立重复试验中，事件 A 恰发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\cdots,n,$$

称这组概率为二项概率.

9. 全概率公式与贝叶斯公式

(1) 全概率公式:如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容,且 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \supset B$, $P(A_i) > 0$, $i = 1, \cdots, n$, 则

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i).$$

(2) 贝叶斯公式:在全概率公式条件下,再设 $P(B) > 0$,则

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

【串讲小结】

本章规定了事件之间的和、积、差运算,介绍了事件之间的包含、相等、互斥、对立、独立关系;定义了频率、概率、样本空间、随机事件、等可能概型、完备事件组、条件概率等基本概念,讨论了频率与概率的关系、概率的性质,给出了六种基本的计算概率的方法:

一是利用概率的性质通过转化计算;二是利用等可能概型计算;三是利用乘法定理计算;四是利用全概率公式和贝叶斯公式计算;五是利用独立性计算;六是利用伯努利概型计算.

基本概念、事件的关系与运算是基础.事件运算及法则与集合运算及法则是完全类似的,事件之间的关系和集合之间的关系是对应的,见表 1.

表 1 事件与集合对比表

符号	概率论	集合论
Ω	样本空间 必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
w	样本点 基本事件	元素
A	事件	子集
$A \subseteq B$	事件 A 发生必然导致事件 B 发生	集合 A 包含于集合 B
$A = B$	事件 A 与事件 B 相等(等价)	集合 A 与集合 B 相等
$A \cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	集合 A 与集合 B 的并集
$A \cap B$	事件 A 与事件 B 同时发生	集合 A 与集合 B 的交集
$A \cap B = \varnothing$	事件 A 与事件 B 互斥	集合 A 与集合 B 不交
$\overline{A}$	事件 A 的对立事件	集合 A 的余集
$A - B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	集合 A 与集合 B 的差集

事件的概率是从同一事件的一系列频率中概括抽象出来的统计规律.利用频率与概率的关系,可以帮助我们体会和理解概率.但频率并不是概率,两者存在着内在的统一,即同一事件多次试验的频率稳定于其概率.

概率的性质是本章重点之一,也是全书重点之一,贯穿始终,必须很好掌握.

计算概率的方法也是本章重点之一.等可能概型是常用的计算概率概型,运用它需要掌握计数方法.要掌握抽签问题、抽样问题、生日问题等典型问题.

通过概率的性质,转化问题来计算概率.如求若干个事件中"至少"有一个事件发生的概率,一般转化为求其对立事件的概率比较方便;对立事件的概率公式、概率加法公式、差事件概率公式、概率乘法公式,都可以在一定条件下将问题转化解决.

运用全概率公式和贝叶斯公式计算是本章比较精彩的内容,它们不仅可以简化等可能概型中概率的计算,而且还可以解决一些等可能概型无法解决的、过程比较复杂的概率计算.当所求的事件概率为许多因素引发的某种结果,而该结果又不能简单地看作这诸多事件之和时,可考虑用全概率公式.贝叶斯公式用于试验结果已知,追查是何种原因(情况、条件)下引发的概率.

重复独立试验下的事件相互独立;在事件独立条件下,乘积事件的概率等于概率的乘积,利用此可使概率的计算大大简化.若给出的试验可分解为 0-1 的 n 次重复独立试验,则马上联想到伯努利试验,可以利用二项概率模型计算概率.

1.3 答疑解惑

1.样本空间选择的一般原则

样本空间是试验的一切可能结果的集合.同一试验可以用不同的模型来描述,建立不同的样本空间.对于一个随机试验,如何恰当地选取样本空间来描述它,值得研究.

(1) 样本空间选择的一般原则.样本空间选择的一般原则有两点:

① 能反映试验要观察的内容;

② 尽量简单.

其中①是原则性要求,必须满足.②是非原则性的,若它满足了,能更方便地解决问题.

例 1 设某学院 2008 级有 5 个班,每班人数相等.数学、物理、化学专业各有一个班,英语专业有 2 个班.试验:随机地观察 2008 级一个学生的专业.用样本空间描述这个试验.

解析:下面几个样本空间都可用来描述这个试验.

$\Omega_1=\{$数,理,化,英$\}$;

$\Omega_2=\{$数,理,化,英 1,英 2$\}$;

$\Omega_3=\{$2008 级学生全体$\}$.

因为它们都可作为试验的一切结果的集合,都能反映试验要观察的内容:学生的专业.但它们观察细致程度是不同的.Ω_1仅观察专业,Ω_2观察专业、班级,Ω_3观察专业、班级、人.Ω_1是最好的样本空间.而$\Omega_0=\{$理,文$\}$不能作为试验的样本空间.因为Ω_0对应的观察太"粗糙",不能反映试验要观察的内容.

(2) 古典概型样本空间的选取.古典概型中要求样本点有限等可能.基于这一点,古典概型中样本空间的选择原则除(1)中的①、②,还有:③样本点有限等可能.其中①、③是原则性要求,必须满足.这里的"尽量简单"是指:样本点总数和欲求事件的有利点数容易计算,未必是样本点越少就越简单.

用古典概型来解决问题时,建立的样本空间必须满足要求.初学者容易在等可能性上犯错误.例 1 中的Ω_1就不能作为古典概型的样本空间,因为Ω_1中的样本点不具有等可能性,而Ω_2、Ω_3都行,且Ω_2比Ω_3简单一些.

例 2　随机抛两枚均匀硬币,求出现两个正面的概率.

解析:这个概率应是$\frac{1}{4}$.初学者常取{两正,一正一反,两反}为样本空间,错误地得出概率是$\frac{1}{3}$.类似的错误,如把随机抛 3 颗均匀骰子得{6,6,6}的概率算为$1/C_{6+3-1}^{3}$等.这类错误的原因可归结为,将可重组合的所有不同结果视为等可能了.我们指出:一般每次抽取是随机的;试验中,可重排列、无重排列、无重组合这 3 种情况的全部可辨结果一般是等可能出现的.这一点可借助于抛两枚硬币的实验,由频率和概率的关系来证实.只有在明确假设下和一些描述微观粒子问题(如描述质点动态的波司—爱因斯坦法则)中才将可重组合的不同结果作为等可能的.

例 3　袋中有 5 只白球,4 只黑球,陆续从中取出 3 个球(不放回),求顺序为"黑白黑"的概率.

解析:设A表示"陆续取出 3 球顺序为黑白黑".将不放回地陆续取出 3 个球看作一次取出 3 个球,则所有可能出现的结果数是C_9^3.取出 3 个球顺序为黑白黑,第一个球可从 4 只黑球中任取,有 4 种取法;第二个球可从 5 只白球中任取,有 5 种取法;第 3 个球可从剩下的 3 只黑球中任取,有 3 种取法.由乘法原理得,A所含的结果数为$4\times5\times3=60$.从而$P(A)=60/C_9^3=5/7$.

这个做法是错误的.原因是:在计算A包含的基本事件时,将 3 个球的排列作为一个基本事件.而在计算样本点总数时,将 3 个球的组合作为一个基本事件,这时A中的(黑,黑,白)、(黑,白,黑)、(白,黑,黑)这 3 个基本事件被算作一个基本事件了.本例中问题本身考虑次序,所以必须用排列.正确的答案是:

$60/A_9^3=5/42$.

古典概型中,要求事件 A 包含的基本事件是样本空间中的一部分.

例 2、例 3 中必须用排列的所有结果来建立样本空间.有些问题中既可用排列也可用组合.一般可借助于组合来解决的问题,都可用排列,反之却不然.

(3) 古典概型样本空间的等价浓缩."等价浓缩"是选取样本空间的一种方法.下面通过例子来说明.

例 4 求任取一自然数能被 5 整除的概率.

解析:试验是从全体自然数中任取一个.首先想到的可能是取 $\Omega_3=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$为样本空间,这时样本点具有等可能性但非有限,不满足古典概型的要求.因为任一自然数除以 5 的余数是 0,1,2,3,4 之一,且由于取数是随机的,故得到的余数也是随机的.因此可取 $\Omega_2=\{0,1,2,3,4\}$为样本空间,这时"被 5 除尽"等价于"余数为 0",从而要求的概率为 1/5.这是一个典型的用等价浓缩方法的例子.

Ω_2中样本点是等可能的,称它是 Ω_3的等价浓缩.等价是指 Ω_2保持了 Ω_3的等可能性,浓缩是指无限的 Ω_3被浓缩为有限的 Ω_2.事件的概率在等价浓缩下不会改变.

在作等价浓缩时必须要保证"等价"和能解决问题.本例中,如果将 Ω_3浓缩为 $\Omega_1=\{$"能被 5 除尽","不能被 5 除尽"$\}$,则不是等价浓缩;如果将 Ω_3浓缩为 $\Omega_0=\{$"取得奇数","取得偶数"$\}$,是等价浓缩,但 Ω_0不能反映我们关心的内容——"被 5 除尽",故不能采用.在例 1 中,Ω_0,Ω_1,Ω_2都是 Ω_3的浓缩,但只有 Ω_2是等价浓缩.

*(4) 几何概型中样本空间的等价浓缩.几何概型中也有等价浓缩的思想.比如,在"向平面上平行线族任意投一枚长为 a 的针"的蒲丰问题中,把针和一族平行线中直线相交情况等价浓缩为和一条直线相交情况来讨论.又如在问题:"平面上有两组相互垂直的平行线把平面划分为一系列边长为 a 的正方形,向平面上任意投一半径为 $r(2r<a)$的硬币,求硬币不与直线相交的概率"中,将硬币和各个正方形边相交的情况,等价浓缩到和一个正方形边相交情况来解决:硬币中心可能投在正方形中任一点,而要硬币和线不交,硬币中心必投在正方形内各边分别与正方形边平行的,边长为$(a-2r)$的小正方形中.因此要求的概率是$(a-2r)^2/a^2$.

2.频率与概率关系及其意义

(1) 频率与概率关系.事件的频率能反映事件发生的可能性大小,那为什么还要引入概率来度量事件发生的可能性大小呢?因为同一事件的频率很多,不唯一.如投均匀硬币中正面出现的频率可能有:

$$0.49,\ 0.52,\ 0.512,\ 0.494,\cdots$$