21世纪高等院校教材

数学基础教程系列

复变函数

陈宗煊　孙道椿　刘名生 编

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi$$

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

数学基础教程系列

复变函数

陈宗煊　孙道椿　刘名生　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书介绍了复变函数的基本概念、基本理论和方法，包括复数及复平面、复变函数的极限与连续性、复函数的积分理论、级数理论、留数理论及其应用、保形映射与解析延拓等. 本书在内容的安排上深入浅出，表达清楚，系统性和逻辑性强. 书中列举了大量例题来说明复变函数的定义、定理及方法，并提供了丰富的习题，便于教师教学与学生自学. 每章末都有小结，并配有复习题. 小结对该章的主要内容作了归纳和总结，方便学生系统复习.

本书可作为高等师范院校数学系各专业学生的教学用书，也可供相关专业的教师和科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数/陈宗煊，孙道椿，刘名生编. —北京：科学出版社，2010
21世纪高等院校教材・数学基础教程系列
ISBN 978-7-03-026487-9

Ⅰ. 复… Ⅱ. ①陈… ②孙… ③刘… Ⅲ. ①复变函数-师范大学-教材 Ⅳ. O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 014688 号

责任编辑：姚莉丽 房 阳 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
丽源印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010年2月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010年2月第一次印刷 印张：9 3/4
印数：1—4 000 字数：196 000

定价：17.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

本书根据我们在华南师范大学长期讲授复变函数课的实际经验, 并参考了现有的许多复变函数教材编写而成.

复变函数是数学专业的一门重要基础课程. 目前已有了许多复变函数教材, 它们有着各自的特色和优点. 由于编者的出发角度不同, 也存在一定的局限性. 我们站在省属师范院校的角度编写了本书, 基本想法如下:

第一, 选取教材内容 "少而精", 强调基础性.

"少而精" 是教学的基本原则之一, 是培养人才的一个重要手段. 讲授过多、过难的东西只会适得其反, 使学生越来越模糊. 基于这个原则, 在本书中, 我们仅选取了复变函数领域中最重要的基本理论, 而略去了一些难度过大、内容过于专门化的理论. 例如, 略去了 Dirichlet 问题、特殊函数、Christoffel 多角形映射定理、过于复杂的积分计算、无穷乘积及部分分式等, 因为这些内容可通过专门化的教材来学习. 对 Riemann 映射定理、解析延拓, 我们也仅作了简单的介绍. 重点强化了本学科的基本内容: 解析函数、Cauchy 积分、幂级数和 Laurent 级数、留数、分式线性变换和最大模定理.

多值函数部分是被普遍认为的一个难点, 我们重点介绍了它的产生及处理方法, 让学生学其基本部分, 而删除其复杂部分. 例如, 第 2 章删除了多个有限支点的问题, 第 5 章删除了多值函数的积分. 如果这些问题不删除, 学生只会越学越糊涂.

第二, 力求可读、严谨和系统.

一本专业基础教材要有好的教学效果, 必须具有良好的可读性和系统性. 从数学史可以知道, 许多概念开始出现于一些简单的事件, 直观易懂; 后来人们为了完善它, 给出了一系列严谨的理论, 这些理论是重要的, 但也是难懂的. 为了将两者结合起来, 我们在引入复数时, 开始用了常规的方法, 然后用标注星号的部分介绍其严谨的引入理论. 对幂级数部分, 在介绍了收敛半径后, 再用标注星号部分介绍产生收敛半径的本质问题.

对于复积分、复级数这些部分, 因为它们是复变函数理论最基础、最重要的部分, 我们给出了特别详细、系统完整的阐述.

第三, 分层次教学.

华南师范大学复变函数课程的教学分两个层次, 即为每周 4 课时与 3 课时两个层次. 其他许多省属师范院校也存在对这门课程实施每周 4 课时或 3 课时的教学. 为了适应这两个层次的教学, 本书在部分内容上标注了星号, 这部分内容仅供

每周 4 课时的教学班使用, 而每周 3 课时的教学班则可不予讲授. 经我们多个班级的试用, 一学期内每周 4 课时的教学班, 可完成包括标注星号在内的全部内容的教学, 而每周 3 课时的教学班, 则可完成除标注星号外的所有内容的教学.

第四, 引导学生抓住重点, 加强基础训练.

为了帮助学生抓住每章的重点内容, 在每章的后面给出了一个 “小结”, 学生可以沿着小结中的指示复习功课.

本书在每一节后面都留有适量的习题, 大部分是为了复习、巩固、理解和运用本节所学的知识, 一般来说是基础题, 难度不大, 仅有很少量的题目有一定难度. 在每章的后面还留有复习题, 难度中等, 仅有少量的题目偏难, 目的在于帮助学生进一步熟练、深化本章所学的知识, 并训练综合运用能力. 本书没有过偏、过难的习题. 在本书的后面, 对所有的习题给出了答案或提示, 以帮助学生解决做习题时遇到的困难.

陈宗煊教授编写了第 4, 6 章, 孙道椿教授编写了第 1, 5 章, 刘名生教授编写了第 2, 3 章. 所有章节都是经过了集体讨论, 多次试用, 反复修改而成. 黄志波博士参与了试用、讨论、修改等一系列工作. 陈奇斌老师和孙艳芹老师绘制了本书的所有插图.

中山大学的林伟教授和山东大学的仪洪勋教授审阅了本书, 并提出了许多宝贵意见.

本书在编写过程中得到了华南师范大学数学科学学院许多同事的大力支持, 并得到了广东省名牌专业建设专项经费和国家特色专业建设点专项经费的资助.

在此对以上数学同仁表示衷心的感谢! 同时感谢科学出版社的指导和帮助.

鉴于我们的水平有限, 书中难免有疏漏和不妥之处, 恳请广大教师和读者批评指正.

陈宗煊　孙道椿　刘名生

2009 年 10 月

目　录

第 1 章　复数及复平面

1.1　复数及其几何表示

1.1.1　复数域与复数的公理化定义

1. 复数域

早在公元 3 世纪, 人们就能解数字系数的某些一元方程, 但是对于方程 $x^2+1=0$ 却无办法, 原因是受实数范围的限制. 为了突破实数范围的限制而引入虚数 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, 这样方程 $x^2+1=0$ 有解 $x_1=\mathrm{i}$, $x_2=-\mathrm{i}$, 并且使数域扩大, 由此产生了数 $\mathrm{i}\notin\mathbb{R}$.

称形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数为**复数**, 其中 i 称为**虚单位**, $x,y\in\mathbb{R}$ 分别称为复数 z 的**实部与虚部**, 记作

$$x=\operatorname{Re}z,\quad y=\operatorname{Im}z.$$

特别地, 当 $\operatorname{Im}z=0$ 时, 把 z 看成实数, 记作 $z=\operatorname{Re}z$; 当 $\operatorname{Im}z\neq0$ 时, 称 z 为**虚数**; 当 $\operatorname{Im}z\neq0$ 且 $\operatorname{Re}z=0$ 时, 称 z 为**纯虚数**. 全体复数的集合记为 $\mathbb{C}$.

复数相等: $z_1=z_2\Leftrightarrow\operatorname{Re}z_1=\operatorname{Re}z_2$ 且 $\operatorname{Im}z_1=\operatorname{Im}z_2$.

由此易得 $z=0\Leftrightarrow\operatorname{Re}z=\operatorname{Im}z=0$.

设 $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$, 则复数的加法和乘法定义如下:

$$\begin{aligned}(a_1+\mathrm{i}b_1)+(a_2+\mathrm{i}b_2)&=(a_1+a_2)+\mathrm{i}(b_1+b_2),\\(a_1+\mathrm{i}b_1)\cdot(a_2+\mathrm{i}b_2)&=a_1a_2+b_1b_2\mathrm{i}^2+\mathrm{i}(a_1b_2+a_2b_1)\\&=a_1a_2-b_1b_2+\mathrm{i}(a_1b_2+a_2b_1),\end{aligned}$$

并且复数的加、乘运算也满足与实数的相应运算一样的一些法则 (交换律、结合律、分配律等, 详细证明见 1.1.3 小节), 这样复数集 $\mathbb{C}$ 成为一个域, 称为**复数域**$\mathbb{C}$. 它可看成是由实数域 $\mathbb{R}$ 扩张而得到的.

上面的定义简明易接受, 但在逻辑上是有缺陷的. 为了克服这一缺陷, 下面只用实数给出复数的公理化定义.

*2. 复数的公理化定义

在承认实数域 $\mathbb{R}$ 的所有规定、性质的前提下, 定义复数域如下:

一个复数是一对有序实数, 记为 (a,b). 称 $a\in\mathbb{R}$ 为这个复数的**实部**, $b\in\mathbb{R}$ 为这个复数的**虚部**. 记一切复数所成之集为 $\mathbb{C}$. 若对任意两个 $(a,b),(c,d)\in\mathbb{C}$, 满足

(1) 复数相等: $(a,b)=(c,d)$, 当且仅当 $a=c, b=d$, 即实部与实部相等, 虚部与虚部相等;

(2) 复数相加: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$, 即实部与实部相加, 虚部与虚部相加;

(3) 复数相乘: $(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$,

则称 $\mathbb{C}$ 为**复数域**.

*1.1.2　复数域是实数域的扩充

让形如 $(a,0)$ 的复数与实数 a 对应, 记作 $(a,0)\sim a$. 由定义可看出它们的和、积

$$(a,0)+(c,0)=(a+c,0)\sim a+c,\quad (a,0)(c,0)=(ac,0)\sim ac,$$

因此, $\sim$ 是一个同构对应. 在同构的意义下, 简记 $(a,0)=a$. 因此, 实数集 $\mathbb{R}:=\{(a,0)=a\}\subset\mathbb{C}$ 是复数集的子集, 复数域是实数域的扩充.

由乘法的规定, $(0,1)^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$, 即复数 $(0,1)$ 的平方等于负实数 -1, 简记复数 $(0,1)=\mathrm{i}$. 称 i 为**虚单位**, 它是一个复数且有性质 $\mathrm{i}^2=-1$.

分别由简单记法及乘法定义

$$\mathrm{i}b=(0,1)(b,0)=(0,b),$$

即复数中的 $\mathrm{i}b$ 可看成是虚单位乘以实数 b. 称复数 $\mathrm{i}b=(0,b)$ 为**纯虚数**.

为了方便, 常用一个字母表示复数, $z:=(a,b)\in\mathbb{C}$. 记其实部为 $a=\mathrm{Re}\,z$, 虚部为 $b=\mathrm{Im}\,z$. 结合上面的简单记法,

$$z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+b\mathrm{i},$$

即复数 z 可看成实数 a 加上一个纯虚数 $\mathrm{i}b$ 或 $(a,b)=a+\mathrm{i}b$.

1.1.3　复数的运算

性质　任取 $a+\mathrm{i}b$, $c+\mathrm{i}d$, $u+\mathrm{i}v\in\mathbb{C}$, 则它们满足

(1) 交换律:

$$(a+\mathrm{i}b)+(c+\mathrm{i}d)=(c+\mathrm{i}d)+(a+\mathrm{i}b),\quad (a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d)=(c+\mathrm{i}d)(a+\mathrm{i}b);$$

(2) 结合律:

$$[(a+\mathrm{i}b)+(c+\mathrm{i}d)]+(u+\mathrm{i}v)=(a+\mathrm{i}b)+[(c+\mathrm{i}d)+(u+\mathrm{i}v)],$$
$$[(a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d)](u+\mathrm{i}v)=(a+\mathrm{i}b)[(c+\mathrm{i}d)(u+\mathrm{i}v)];$$

(3) 乘法对加法的分配律:

$$(u+\mathrm{i}v)[(a+\mathrm{i}b)+(c+\mathrm{i}d)]=(u+\mathrm{i}v)(a+\mathrm{i}b)+(u+\mathrm{i}v)(c+\mathrm{i}d).$$

证明 仅证 (3). 先看左边,

$$\begin{aligned}(u+\mathrm{i}v)[(a+\mathrm{i}b)+(c+\mathrm{i}d)]&=(u+\mathrm{i}v)[(a+c)+\mathrm{i}(b+d)]\\&=[u(a+c)-v(b+d)]+\mathrm{i}[u(b+d)+v(a+c)]\\&=[ua+uc-vb-vd]+\mathrm{i}[ub+ud+va+vc].\end{aligned}$$

上面第一个等号是由于复数加法的定义, 第二个等号是由于复数乘法的定义, 第三个等号是由于实数满足分配律. 再看右边, 由复数乘法的定义和加法的定义,

$$\begin{aligned}&(u+\mathrm{i}v)(a+\mathrm{i}b)+(u+\mathrm{i}v)(c+\mathrm{i}d)\\=&[(ua-vb)+\mathrm{i}(ub+va)]+[(uc-vd)+\mathrm{i}(ud+vc)]\\=&[(ua-vb)+(uc-vd)]+\mathrm{i}[(ub+va)+(ud+vc)].\end{aligned}$$

结合复数相等的定义, 即证得分配律. □

因此, 复数的乘法可像多项式一样相乘,

$$(a+b\mathrm{i})\cdot(c+d\mathrm{i})=(a+b\mathrm{i})c+(a+b\mathrm{i})d\mathrm{i}=(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i},$$

这也是复数公理化定义 (3) 合理性的另一理由.

容易直接验证在复数域 $\mathbb{C}$ 中有**零元**$0+\mathrm{i}0$, 有**单位元**$1+\mathrm{i}0$. 每个复数 $a+\mathrm{i}b$ 有**相反的数** $(-a)+\mathrm{i}(-b)$. 每一个非零复数 $a+\mathrm{i}b$ 有倒数 $\dfrac{a}{a^2+b^2}+\mathrm{i}\dfrac{-b}{a^2+b^2}$.

减法是加法的逆运算 若复数 $x+\mathrm{i}y$ 满足 $(a+\mathrm{i}b)+(x+\mathrm{i}y)=c+\mathrm{i}d$, 则称 $x+\mathrm{i}y$ 是 $c+\mathrm{i}d$ 与 $a+\mathrm{i}b$ 的**差**, 记为 $x+\mathrm{i}y=(c+\mathrm{i}d)-(a+\mathrm{i}b)$.

由复数相等的定义有 $a+x=c, b+y=d$, 于是 $x=c-a, y=d-b$, 代入得

$$(c+\mathrm{i}d)-(a+\mathrm{i}b)=x+\mathrm{i}y=(c-a)+\mathrm{i}(d-b)=(c+\mathrm{i}d)+(-a)+\mathrm{i}(-b).$$

这说明复数减复数等于实部减实部、虚部减虚部, 或者减去一个复数等于加上与它相反的数.

除法是乘法的逆运算 若复数 $x+\mathrm{i}y$ 满足 $(a+\mathrm{i}b)(x+\mathrm{i}y)=c+\mathrm{i}d$, 则称 $x+\mathrm{i}y$ 是 $c+\mathrm{i}d$ 与 $a+\mathrm{i}b$ 的**商**, 记为 $x+\mathrm{i}y=(c+\mathrm{i}d)/(a+\mathrm{i}b)$. 由复数相等的定义得

$$\begin{cases}ax-by=c,\\bx+ay=d,\end{cases}$$

解之得

$$x = \frac{ac+bd}{a^2+b^2}, \quad y = \frac{ad-bc}{a^2+b^2},$$

代入得

$$\begin{aligned}\frac{c+\mathrm{i}d}{a+\mathrm{i}b} &= x+\mathrm{i}y = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \mathrm{i}\frac{ad-bc}{a^2+b^2} \\ &= (c+\mathrm{i}d)\left(\frac{a}{a^2+b^2} + \mathrm{i}\frac{-b}{a^2+b^2}\right),\end{aligned}$$

即除以一个非零的复数等于乘以它的倒数.

乘方运算　设整数 $n>1$, 复数 $a+\mathrm{i}b$ 的 n 次方是指 n 个 $a+\mathrm{i}b$ 连续相乘. 例如, 当 $n=3$ 时,

$$(a+\mathrm{i}b)^3 = [(a^2-b^2)+\mathrm{i}(2ab)](a+\mathrm{i}b) = (a^3-3ab^2)+\mathrm{i}(3a^2b-b^3).$$

开方运算　设整数 $n>1$, 复数 $a+\mathrm{i}b$ 开 n 次方, 是要求复数 $x+\mathrm{i}y$, 使 $(x+\mathrm{i}y)^n = a+\mathrm{i}b$. 当 $n=2$ 时, 即要求

$$(x+\mathrm{i}y)^2 = (x^2-y^2)+\mathrm{i}(2xy) = a+\mathrm{i}b.$$

注意 x,y 必须是实数, 因此可得两个解为

$$x_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}, \qquad y_1 = b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2b^2}},$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}, \quad y_2 = -b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2b^2}}.$$

当 n 比较大时, 可以看出开方的运算十分困难. 往往用后面较简单的三角表示法或指数表示法计算开方.

设 $a>0$, 由乘法

$$(0+\mathrm{i}\sqrt{a})^2 = (0+\mathrm{i}\sqrt{a})(0+\mathrm{i}\sqrt{a}) = -a+0\mathrm{i} = -a,$$

$$(0-\mathrm{i}\sqrt{a})^2 = (0-\mathrm{i}\sqrt{a})(0-\mathrm{i}\sqrt{a}) = -a+0\mathrm{i} = -a,$$

于是负实数 $-a=-a+0\mathrm{i}(a>0)$ 在复数集内可以开平方, 即

$$\sqrt{-a} = 0 \pm \mathrm{i}\sqrt{a} = \pm\mathrm{i}\sqrt{a}.$$

人们常说复数不能比较大小, 严格地说, 复数只是没有合理、有效地比较大小的方法. 规定复数的大小其实很容易, 如可以定义: $a+\mathrm{i}b > c+\mathrm{i}d$ 当且仅当 $a>c$, 或 $a=c, b>d$. 按照这个定义, $\mathrm{i}>0$, 但 $\mathrm{i}^2=-1<0$, 这与熟知的 $a>0 \to a^2>0$ 不同, 用起来不方便, 因此, 大家都不去定义它.

1.1.4 共轭复数

复数 $z=a+\mathrm{i}b$ 的**共轭复数**定义为 $\overline{z}:=a-\mathrm{i}b$. 又设 $w=u+\mathrm{i}v$, 易知两个共轭复数的和、差、积、商等于它们和、差、积、商的共轭复数,

$$\begin{aligned}
\overline{z}+\overline{w}&=a-b\mathrm{i}+u-v\mathrm{i}=(a+u)-(b+v)\mathrm{i}=\overline{z+w},\\
\overline{z}-\overline{w}&=a-b\mathrm{i}-u+v\mathrm{i}=(a-u)-(b-v)\mathrm{i}=\overline{z-w},\\
\overline{z}\cdot\overline{w}&=(a-b\mathrm{i})(u-v\mathrm{i})=(au-bv)-(bu+av)\mathrm{i}=\overline{zw},\\
\frac{\overline{z}}{\overline{w}}&=\frac{a-b\mathrm{i}}{u-v\mathrm{i}}=\frac{(a-b\mathrm{i})(u+v\mathrm{i})}{(u-v\mathrm{i})(u+v\mathrm{i})}\\
&=\frac{au+bv}{u^2+v^2}-\mathrm{i}\frac{bu-av}{u^2+v^2}=\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}.
\end{aligned}$$

于是可知有限个共轭复数的有理式等于这些复数有理式的共轭.

1.1.5 复数的几何表示

将复数 $(a,b)\in\mathbb{C}$ 看成平面直角坐标系上的点 (a,b), 就得到复数域到平面的一一对应, 称它为**复平面**, 也用 $\mathbb{C}$ 表示. 称横轴为**实轴**, 纵轴为**虚轴**. 因此, 可定义两点 $z=a+b\,\mathrm{i}$, $w=u+v\,\mathrm{i}$ 间的**距离**为

$$|z-w|=\sqrt{(a-u)^2+(b-v)^2},$$

它是一个非负实数. 当 $w=0$ 时, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 表示 z 到原点的距离, 也称为复数 z 的**模**. 易验证 $z\overline{z}=|z|^2$.

也可将复平面 $\mathbb{C}$ 上的点 $z=a+\mathrm{i}b$ 看成是以原点 O 为起点, $z=a+b\,\mathrm{i}$ 为终点的向量 $\overrightarrow{Oz}$. 这时向量的长就是复数 z 的模, 即 $|\overrightarrow{Oz}|=|z|$(图 1.1).

复数的加法在复平面上满足平行四边形法则, 即两个复数向量 $\overrightarrow{Oz}$, $\overrightarrow{Ow}$ 的和等于它们决定的平行四边形 $Oz\xi w$ 的对角线向量 $\overrightarrow{O\xi}$. 类似地, 如图 1.2 所示, 两个复数相减与向量相减的法则也一致. 从图 1.2 上可以看出

$$|z+w|=|\overrightarrow{O\xi}|\leqslant|\overrightarrow{Oz}|+|\overrightarrow{Ow}|=|z|+|w|. \tag{1.1.1}$$

设复数 $z=x+\mathrm{i}y, w=p+q\mathrm{i}$. (1.1.1) 式也可以用解析的方法证明如下:

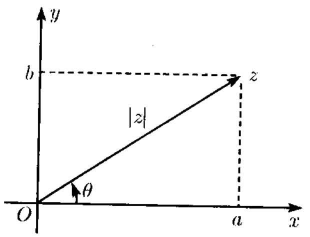

图 1.1

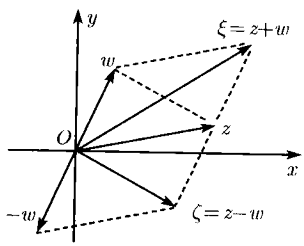

图 1.2

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (x+p)^2+(y+q)^2\\ &= x^2+p^2+y^2+q^2+2xp+2yq,\\ (|z|+|w|)^2 &= (\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{p^2+q^2})^2\\ &= x^2+p^2+y^2+q^2+2\sqrt{(x^2+y^2)(p^2+q^2)}.\end{aligned}$$

不等式 (1.1.1) 成立当且仅当

$$xp+yq \leqslant \sqrt{(x^2+y^2)(p^2+q^2)}. \tag{1.1.2}$$

若 (1.1.2) 式左边小于零, 则 (1.1.2) 式当然成立; 否则将 (1.1.2) 式两边平方得

$$x^2p^2+y^2q^2+2xpyq \leqslant (x^2+y^2)(p^2+q^2) \quad \Leftrightarrow \quad (xq-yp)^2 \geqslant 0,$$

这说明 (1.1.2) 式成立, 因此, (1.1.1) 式得证. □

关于两个复数 z, w 的和与差的模, 类似可得以下一些不等式:

$$\big||z|-|w|\big| \leqslant |z+w| \leqslant |z|+|w|,$$

$$\big||z|-|w|\big| \leqslant |z-w| \leqslant |z|+|w|,$$

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geqslant x = \mathrm{Re}\ z, \quad |z| \geqslant \mathrm{Im}\ z.$$

1.1.6　复数的三角表示

为了方便, 常常将复数 $z = x+\mathrm{i}y$ 看成向量 $\overrightarrow{Oz}$. 称非零向量 $\overrightarrow{Oz}$ 与实轴正向间的夹角为**辐角**, 记为 $\mathrm{Arg}\, z$. 注意 $\mathrm{Arg}\, z$ 有无穷多个取值, 用 $\arg z$ 表示这些辐角中满足 $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ 的一个, 称为 $\mathrm{Arg}\, z$ 的**主值**, 则

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

也用 $\arg z$ 表示 $\mathrm{Arg}\, z$ 的特定值. 根据需要, 可规定其范围为一个长度为 2π 的区间. 令 $z = x+\mathrm{i}y$, 则主值 $\arg z$ 在 $\mathbb{C}\backslash\{z : \mathrm{Re}z \leqslant 0, \mathrm{Im}z = 0\}$ 内可用实的反三角函数表示如下:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0,\\ \mathrm{arccot}\dfrac{x}{y}, & y > 0,\\ \mathrm{arccot}\dfrac{x}{y} - \pi, & y < 0. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

上面的表示在第一象限和第四象限有重复, 但重复的两种表示法取值是完全一样的. 容易看出在 $\mathbb{C}\backslash\{z : \mathrm{Re}z \leqslant 0, \mathrm{Im}z = 0\}$ 内, $\arg z$ 是一个二元的连续实函数.

利用模及辐角, 可将非零复数 z 写成如下三角表示式:

$$z = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + \mathrm{i} \sin \operatorname{Arg} z) = |z|(\cos \arg z + \mathrm{i} \sin \arg z).$$

利用**欧拉 (Euler) 公式**(见 2.3.1 小节)

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta,$$

可将非零复数 z 写成如下指数表示式:

$$z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Arg} z}.$$

例 1 将复数 $z = -\sqrt{12} - 2\,\mathrm{i}$ 化为三角表示式与指数表示式.

解 因为 $|z| = \sqrt{12+4} = 4$ 和 $x = -\sqrt{12} < 0, y = -2 < 0$, 所以由 (1.1.3) 式可得

$$\arg z = \operatorname{arccot}\left(\frac{-\sqrt{12}}{-2}\right) - \pi = \operatorname{arccot}\sqrt{3} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

因此, 复数 $z = -\sqrt{12} - 2\,\mathrm{i}$ 的三角表示式为

$$z = 4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right],$$

指数表示式为

$$z = 4\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}.$$

□

例 2 求复数 $z = 1 - \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha\ (0 \leqslant \alpha \leqslant \pi)$ 的辐角, 并将其化为三角表示式与指数表示式.

解 因为 $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, 所以

$$|z| = \sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \sqrt{2 - 2\cos\alpha} = 2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

又因为

$$\begin{aligned} z &= 1 - \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha \\ &= 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{i}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ &= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \mathrm{i}\cos\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= |z|\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right), \end{aligned}$$

所以

$$\operatorname{Arg} z = \frac{\pi - \alpha}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

因此, 复数 z 的三角表示式为

$$z = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right),$$

指数表示式为

$$z = 2\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi-\alpha}{2}\mathrm{i}}. \qquad \square$$

用复数的指数表示式或三角表示式作乘法、除法比较方便.

$$\begin{aligned} z\cdot w &= |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Arg} z}\cdot|w|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Arg} w} \\ &= [|z|(\cos\operatorname{Arg} z + \mathrm{i}\sin\operatorname{Arg} z)][|w|(\cos\operatorname{Arg} w + \mathrm{i}\sin\operatorname{Arg} w)] \\ &= |z||w|[\cos(\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w) + \mathrm{i}\sin(\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w)], \end{aligned}$$

即两个复数相乘等于模相乘、辐角相加. 对除法有

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Arg} z}}{|w|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Arg} w}} \\ &= \frac{|z|(\cos\operatorname{Arg} z + \mathrm{i}\sin\operatorname{Arg} z)}{|w|(\cos\operatorname{Arg} w + \mathrm{i}\sin\operatorname{Arg} w)} \\ &= \frac{|z|}{|w|}[\cos(\operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} w) + \mathrm{i}\sin(\operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} w)], \end{aligned}$$

即两个复数相除等于模相除、辐角相减.

对乘方 (依次相乘), 当 n 是正整数时有

$$\begin{aligned} z^n &= \left(|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Arg} z}\right)^n \\ &= [|z|(\cos\operatorname{Arg} z + \mathrm{i}\sin\operatorname{Arg} z)]^n \\ &= |z|^n[\cos(n\operatorname{Arg} z) + \mathrm{i}\sin(n\operatorname{Arg} z)] \\ &= |z|^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\operatorname{Arg} z}. \end{aligned}$$

当 n 是负整数时, 可理解为

$$\begin{aligned} z^n &= \left(|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Arg} z}\right)^n \\ &= [|z|(\cos\operatorname{Arg} z + \mathrm{i}\sin\operatorname{Arg} z)]^n \\ &:= \frac{1}{[|z|(\cos\operatorname{Arg} z + \mathrm{i}\sin\operatorname{Arg} z)]^{-n}} \\ &= |z|^n[\cos(n\operatorname{Arg} z) + \mathrm{i}\sin(n\operatorname{Arg} z)] \\ &= |z|^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\operatorname{Arg} z}. \end{aligned}$$