



# 平面几何证题 研究与指导

孔庆思 / 著

PINGMIAN JIHE ZHENGTI YANJIU YU ZHIDAO

# 平面几何证题研究与指导

孔庆思 著

平面向量与圆的综合问题

山东教育出版社

2003年·济南

## 图书在版编目(CIP)数据

平面几何证题研究与指导/孔庆思著.一济南:山东教育出版社,1999重印

ISBN 7-5328-2741-0

I. 平… II. 孔… III. 几何课 - 初中 - 教学参考资料  
IV. G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 26681 号

## 平面几何证题研究与指导

孔庆思 著

---

出 版 者: 山东教育出版社

(济南市纬一路 321 号 邮编: 250001)

电 话: (0531)2092663 传真: (0531)2092661

网 址: <http://www.sjs.com.cn>

发 行 者: 山东教育出版社

印 刷: 山东新华印刷厂

版 次: 1998 年 6 月第 1 版 2003 年 4 月第 2 版

2003 年 4 月第 3 次印刷

印 数: 13001—44000

规 格: 850mm × 1168mm 32 开本

印 张: 15.25 印张

插 页: 2 插页

字 数: 334 千字

书 号: ISBN 7-5328-2741-0

定 价: 18.50 元

---

(如印装质量问题,请与印刷厂联系调换)

## 前　　言

平面几何问题，传统分为证明题、计算题、作图题和轨迹问题，但是，学好证明题是基础。事实上，其他任何类型问题，将命题加以适当改造便成为证明题；同时，通过证明题而养成的严格的逻辑推理能力，会使学者终身受益。

本书共分三编。第一编，介绍平面几何论证的基础知识与方法，重点是揭示证题途径的一般规律，从而为第二编奠定基础。第二编题集。习题一至习题十三为传统证明题，属于常见题型，往往有一定的解题规律及方法，大部分可供中学生平时练习，少数可选作测试或竞赛之用；习题十四为杂题，相当一部分题型新颖，解法灵活并具有较强的思考性和创造性，可作为课外辅导材料，或选作竞赛试题；习题十五为竞赛试题选，是近十几年以来部分省市、国家及国际数学奥林匹克竞赛试题摘选，供读者开拓视野；习题十六为中考应试自测题，特为在校初中生精心设计。第三编题解，对题集中的每一个题目（习题十六除外），都给出了解答（或简解）或提示。全书共收录习题近六百个，例题近三百，既有广度又有深度。本书主要面向初中生和高中生、中学数学教师、

师范院校数学系学生,以及青少年数学爱好者.中学生一般要在教师指导下阅读.

教学和学习实践反复表明,要学好课本,选几本优秀的课外读物作辅助,是十分必要的.作者认为,中学数学辅导读物的编写,正确处理“应试”与“能力”的关系是关键.当今,“应试”资料和读物充斥市场,而着眼于全面提高学生的学习素质,能够在教法和学法上提供具有一般指导意义的课外读物相对比较匮乏.作者不揣冒昧抛出拙著,正是积四十余年教学经验之所在.拙著若能有助于提高读者“以不变应万变”的能力,将是作者最大的欣慰.但是,由于作者水平所限,错误在所难免,恭候专家、读者批评指正.

孔庆思

2003年1月8日.

# 目 录

## 第一编 怎样寻求证题途径

(一) 基本知识复习	1
1. 概念	1
2. 多边形和圆之间的关系	2
3. 三角形的性质	3
4. 圆	5
5. 平行与垂直	7
6. 常用公式	8
(二) 命题	10
1. 命题的四种形式	11
2. 定理	12
3. 逆命题的制造法	12
4. 同一原理(或称同一法则)	13
5. 充分条件和必要条件	15
(三) 几何论证的本源	16
1. 基本概念和公理	16
2. 欧几里得公理体系	17
3. 希尔伯特公理体系	21
(四) 推证通法	26
1. 演绎法	26

2. 归纳法 .....	29
3. 综合法和分析法 .....	31
4. 直接证法和间接证法 .....	33
(五) 证明和证明的规则 .....	39
1. 证明的组成 .....	40
2. 证明的规则 .....	40
(六) 探索证题途径的一般步骤 .....	42
1. 审题 .....	42
2. 探索证题途径常用的思考方法 .....	47
(七) 常用的辅助线 .....	64
1. 延长一已知线至任意长, 或等于已知长或与其他线相交 .....	64
2. 连结二已知点 .....	65
3. 在已知直线上截取已知线段 .....	68
4. 过已知点作直线 .....	70
5. 三角形中常用的辅助线 .....	72
6. 梯形中常用的辅助线 .....	73
7. 解相交圆和相切圆问题常用辅助线 .....	75
8. 辅助圆 .....	77
(八) 平移、旋转及对称 .....	79
1. 平移法 .....	79
2. 旋转法 .....	80
3. 对称法 .....	84
(九) 能力的培养和提高 .....	85
1. 数学思想方法 .....	86
2. 平面几何中几个著名的定理 .....	102

3. 抽屉原理(或抽屉原则) .....	106
4. 覆盖 .....	110
5. 最值问题 .....	115
6. 巧解妙证 .....	120
7. 一法多用 .....	130
8. 一题多用和多题一解 .....	144
9. 一题多变 .....	148
10. 一题多解 .....	170
11. 规律的相对性和局限性 .....	185

## 第二编 题集·理路

(一) 传统题 .....	190
1. 证两线段相等 .....	190
习题一 .....	191
2. 证两角相等 .....	195
习题二 .....	195
3. 证两直线平行 .....	198
习题三 .....	199
4. 证直线与直线的垂直 .....	201
习题四 .....	202
5. 证线段的不等与角的不等 .....	203
习题五 .....	204
6. 证线段的和差倍分关系 .....	206
习题六 .....	206
7. 证角的和差倍分关系 .....	209
习题七 .....	209

8. 证线段的比例式和等积式	210
(1) 习题八	211
9. 证线段的平方、积的和差关系	215
(1) 习题九	216
10. 证面积的相等和面积的比例式	219
(1) 习题十	220
11. 证共线点和共点线	225
(1) 习题十一	225
12. 证共圆点和共点圆	227
习题十二	228
13. 证定值	229
(1) 习题十三	230
<b>(二) 杂题</b>	<b>232</b>
(1) 习题十四	232
<b>(三) 竞赛试题选</b>	<b>260</b>
(1) 习题十五	260
<b>(四) 中考应试自测题</b>	<b>273</b>
(1) 习题十六	273
<b>第三编 提示·简解</b>	
101 习题一	327
102 习题二	337
103 习题三	342
104 习题四	348
105 习题五	354
106 习题六	360

习题七	366
习题八	369
习题九	376
习题十	386
习题十一	396
习题十二	403
习题十三	408
习题十四	414
习题十五	437

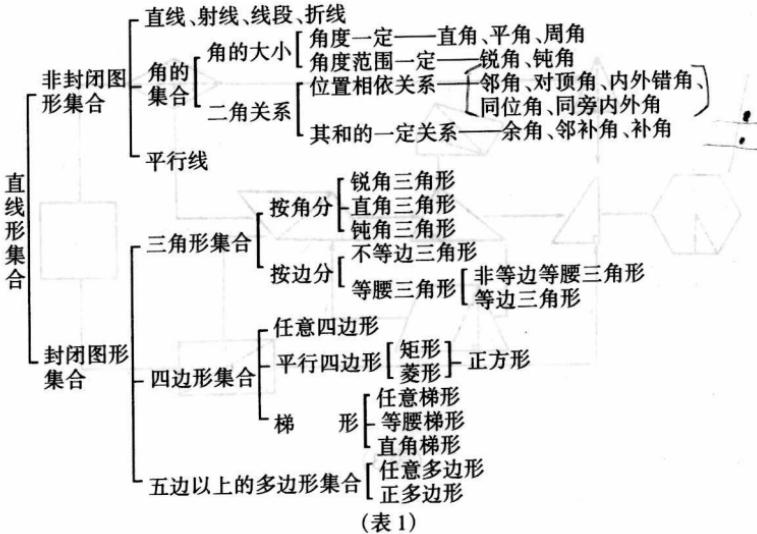


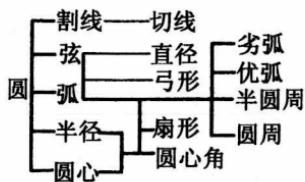
# 第一编 怎样寻求证题途径

“怎样寻求证题途径”这个问题，既涉及基本知识，又涉及广泛的基本技能。这里，首先利用列表法概括地复习一下平面几何中的有关内容，有选择地介绍一下形式逻辑方面的知识，然后再谈寻求证题途径的常用方法。

## (一) 基本知识复习

### 1. 概念

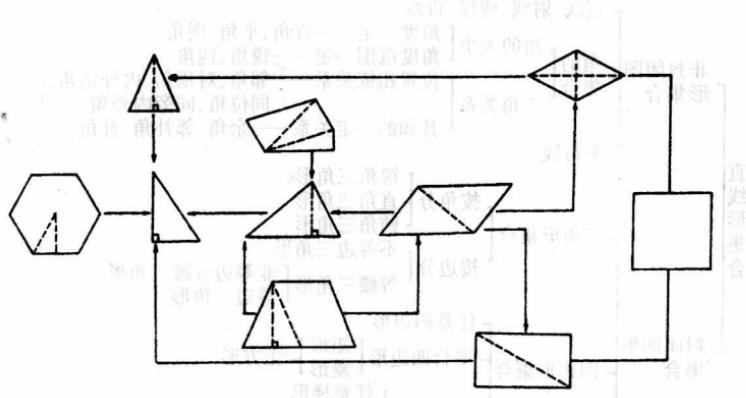




(表 2)

## 2. 多边形和圆之间的关系

平面几何主要研究直线形和曲线形的性质和应用。直线形主要是多边形，而曲线形以圆为主。圆和多边形之间有密切联系。事实上，圆中的许多问题，例如等分圆周的问题、圆的周长和面积等都是通过直线形的性质解决的。在直线形和圆的联系中，尤其要注意和直角三角形、等腰三角形的关联。然而等腰三角形的问题往往要化为直角三角形的问题，而三角形的问题，有时也要转化为直角三角形解决，它们之间的这种转化在表 3 中被充分地揭示了出来。



(表 3)

### 3. 三角形的性质



一个三角形  
(图 1)

三角形

角的关系  $\angle A + \angle ABC + \angle C = 180^\circ$   
 $\angle CBE = \angle A + \angle C$

边角关系 若  $\angle ABC \leq \angle C$ , 则  $b \leq c$ ; 反之  
 若  $b \leq c$ , 则  $\angle ABC \leq \angle C$ ;

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

边的关系  $a + b > c > |a - b|$ . “两边之和大于第三边”

外心—三边垂直平分线的交点.

内心—三内角平分线的交点.

垂心—三条高的交点.

重心 定义: 三条中线的交点.

五 心 (图 2) 重心定理:  $GD = \frac{1}{3} CD$ ,  $\Delta$

$$GE = \frac{1}{3} AE,$$

$$GF = \frac{1}{3} BF.$$

旁心—三外角平分线的交点.

若  $b = b'$ ,  $c = c'$ ,  $\angle A \leq \angle A'$ , 则  $a \leq a'$ ; 反之

若  $b = b'$ ,  $c = c'$ ,  $a \leq a'$ , 则  $\angle A \leq \angle A'$ .

两个三角形  
(图 3)

全 等 判定—ASA, SAS, SSS.

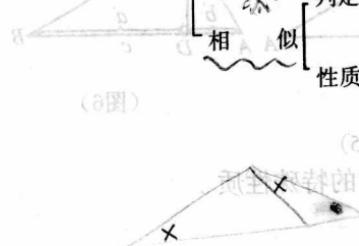
性质—对应线段相等.

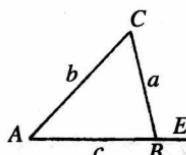
相似 判定—ASA, SAS, SSS.

性质—一切对应线段的比等于相似比.

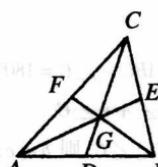
性质—周长的比等于相似比.

性质—面积的比等于相似比的平方.

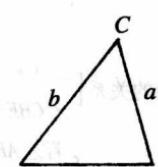




(图1)



(图2)



(图3)

(表4)

直角三角形

全等的判定

- 锐角和一边 [一锐角和一直角边 .  
一锐角和斜边 .]
- 两 直 角 边 [两直角边 .]
- 两 直 角 边 和 斜 边 [一直角边和斜边 .]

- 相似的判定

- 锐角 [一锐角 .]
- 两 直 角 边 [两直角边 .]
- 两 直 角 边 和 斜 边 [一直角边和斜边 .]

- 五心的特性

- 外心—斜边中点 .
- 垂心—直角顶点 .

$$\text{内心}—r = \frac{a+b-c}{2}. \text{(图 4)}$$

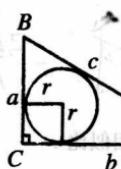
- 角的关系  $\angle A + \angle B = 90^\circ$ .

- 边角关系 若  $\angle A = 30^\circ$ , 则  $a = \frac{1}{2}c$ . 反之成立 .  
(图 5)  $a = c \cdot \sin A = c \cdot \cos B = b \cdot \tan A = b \cdot \cot B$ .

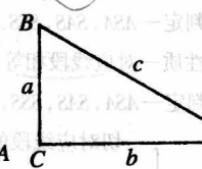
- 射影定理

- $h^2 = a' \cdot b'$
- $a^2 = a' \cdot c$
- $b^2 = b' \cdot c$

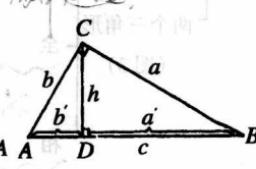
(图 6)  $\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$ , 反之成立 .



(图4)



(图5)



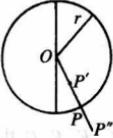
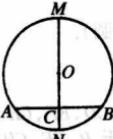
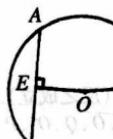
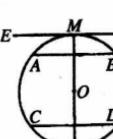
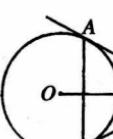
(图6)

(表5)

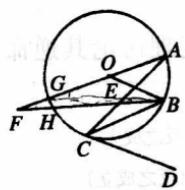
请读者自己总结等腰三角形的特殊性质 .

## 4. 圆

对表 6 中涉及的名词给予解释, 对定理讨论其逆命题是否成立.

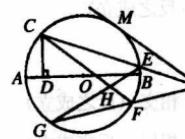
点位和圆的关系 	若 $OP = r$ , 则 $P$ 在 $\odot O$ 上.(反之成立) 若 $OP' < r$ , 则 $P'$ 在 $\odot O$ 内.(反之成立) 若 $OP'' > r$ , 则 $P''$ 在 $\odot O$ 外.(反之成立)
直线位置和圆的关系 	若 $OE < r$ , 则 $AB$ 与 $\odot O$ 相交.(反之成立) 若 $OF = r$ , 则 $AC$ 与 $\odot O$ 相切.(反之成立) 若 $OG > r$ , 则 $AD$ 与 $\odot O$ 相离.(反之成立)
直径与弦的关系 	若直径 $MN \perp AB$ , 则 $AC = BC, \widehat{AN} = \widehat{BN}, \widehat{AM} = \widehat{BM}$ .
弦弧间的关系 	若 $AB \geq CD$ , 则 $OE \leq OF$ , $\widehat{AB} \geq \widehat{CD}$ .(反之成立)
弦或切线的关系 	若 $AB \parallel CD$ , 则 $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ . 若切线 $EF \parallel GH$ , 则 $MN$ 是 $\odot O$ 的直径.
切线及推论 	若 $PA, PB$ 切 $\odot O$ 于 $A, B$ , 则 $PA = PB, OP \perp AB, \angle APO = \angle BPO$ .

和圆的有关



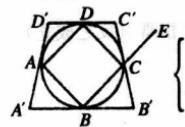
$$\left\{ \begin{array}{l} \angle AOB = \frac{(m)}{2} \widehat{AB} \text{ (注: } m \text{ 表示量数, 以下同).} \\ \angle ACB = \frac{(m)}{2} \widehat{AB}. \\ \angle BCD = \frac{(m)}{2} \widehat{BC}, CD \text{ 为切线.} \\ \angle AEB = \frac{(m)}{2} (\widehat{AB} + \widehat{CH}). \\ \angle AFB = \frac{(m)}{2} (\widehat{AB} - \widehat{CH}). \end{array} \right.$$

圆中线段比例



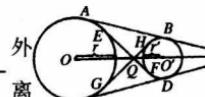
$$\left\{ \begin{array}{l} HC \cdot HF = HE \cdot HG \text{ (反之, } C, E, F, G \text{ 共圆).} \\ CD^2 = AD \cdot BD \quad \text{若 } PM \text{ 切 } \odot O \text{ 于 } M, \text{ 则 } PM^2 = PE \cdot PC. \\ PE \cdot PC = PF \cdot PG \text{ (反之 } C, E, F, G \text{ 共圆).} \end{array} \right.$$

圆内四边形外切

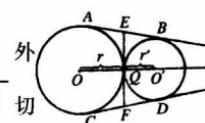


$$\left\{ \begin{array}{l} \angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ \quad (\text{反之, } A, B, C, D \text{ 共圆).} \\ A'B' + C'D' = B'C' + A'D' \quad (\text{反之, 四边形外切于一圆).} \end{array} \right.$$

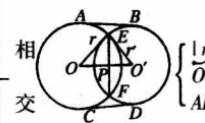
两圆的位置关系 ( $d$  表示圆心距)



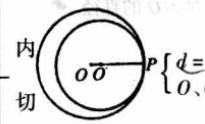
$$\left\{ \begin{array}{l} d > r + r' \text{ (反之成立).} \\ AB = CD, EF = GH \text{ (AB, CD, EF, GH 是切线).} \\ \text{若 } AB, CD \text{ 的延长线交于 } P, EF, GH \text{ 交于 } Q, \text{ 则 } O, Q, O', P \text{ 共线.} \end{array} \right.$$



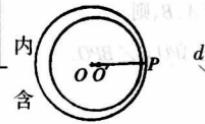
$$\left\{ \begin{array}{l} d = r + r' \text{ (反之成立).} \\ AB = CD, O, Q, O', P \text{ 共线.} \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} |r - r'| < d < r + r'. \\ OO' \perp EF \text{ 且 } PE = PF. \\ AB = CD. \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} d = |r - r'|. \\ O, O', P \text{ 共线.} \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} d < |r - r'|, d = 0 \text{ 时称同心.} \\ \text{ (表 6)} \end{array} \right.$$

## 5. 平行与垂直

(1) 平行线的定义、判定定理及性质

(2) 平行与垂直的关系

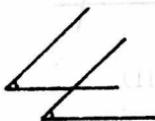
1) 若  $l_2 \parallel l_1, l_3 \parallel l_1$ , 则  $l_2 \parallel l_3$ ; 传递性

2) 若  $l_1 \parallel l_2, l_1 \perp a$ , 则  $l_2 \perp a$ ;

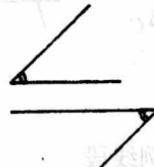
3) 若  $l_1 \perp a, l_2 \perp a$ , 则  $l_1 \parallel l_2$ .

(3) 平行和垂直与角的联系

1) 两双边互相平行的两角或相等(方向完全相同或完全相反, 图 7)或互补(一双边方向相同, 另一双边方向相反时, 图 8);

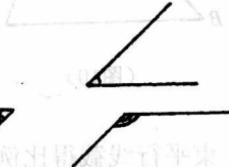


(1)



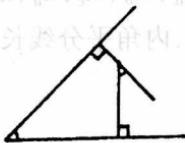
(2)

(图 7)

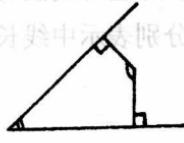


(图 8)

2) 两双边互相垂直的两角或相等[右边上右边, 左边上左边时, 图 9(1)]或相补[右边上左边, 左边上右边时, 图 9(2)].



(1)



(2)

(图 9)