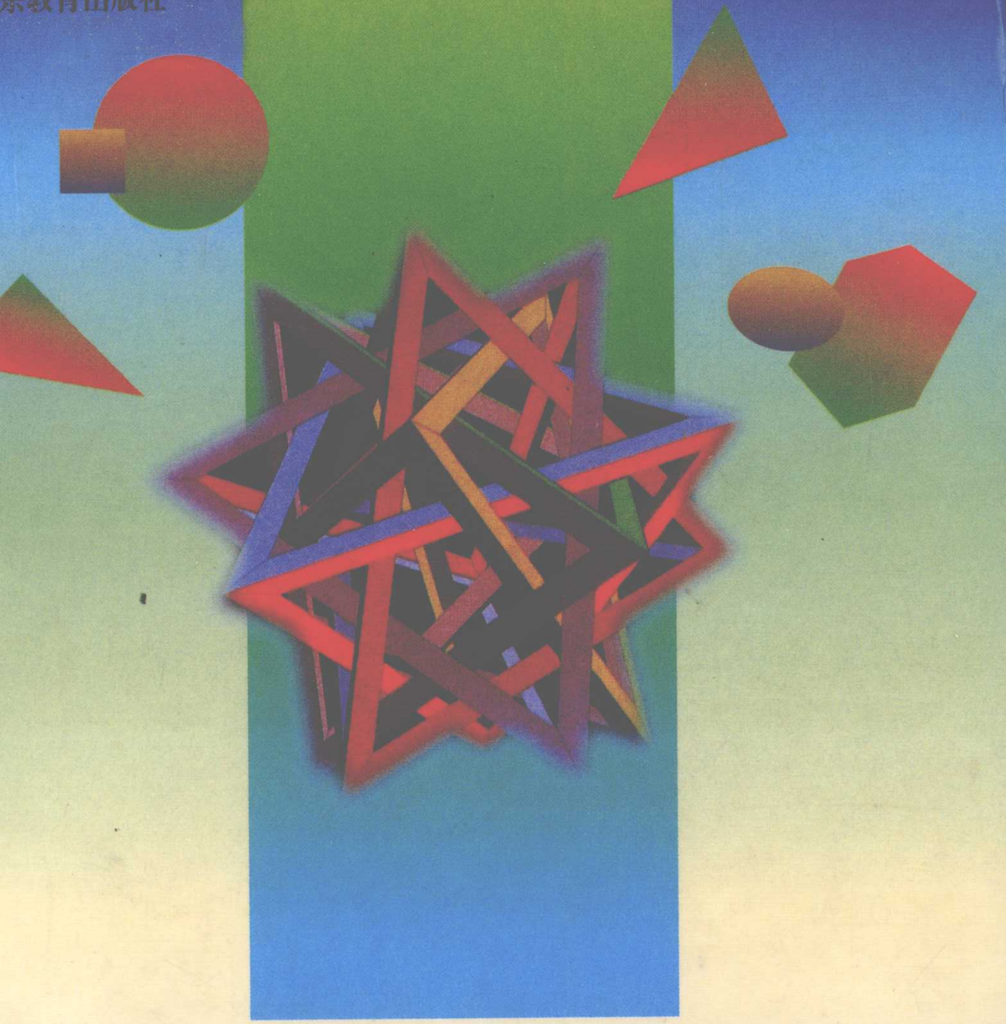
东教育出版社



平面几何证题研究与指导

孔庆思／著

PINGMIAN JIHE ZHENGTI YANJIU YU ZHIDAO

平面几何证题研究与指导

孔庆思　著

山东教育出版社

2003年·济南

图书在版编目(CIP)数据

平面几何证题研究与指导/孔庆思著 .—济南:山东教育出版社,1999 重印
ISBN 7-5328-2741-0

Ⅰ.平… Ⅱ.孔… Ⅲ.几何课-初中-教学参考资料
Ⅳ.G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 26681 号

平面几何证题研究与指导

孔庆思　著

出 版 者:山东教育出版社
(济南市纬一路 321 号　邮编:250001)
电　　话:(0531)2092663　传真:(0531)2092661
网　　址:http://www.sjs.com.cn
发 行 者:山东教育出版社
印　　刷:山东新华印刷厂
版　　次:1998 年 6 月第 1 版　2003 年 4 月第 2 版
2003 年 4 月第 3 次印刷
印　　数:13001—44000
规　　格:850mm×1168mm　32 开本
印　　张:15.25 印张
插　　页:2 插页
字　　数:334 千字
书　　号:ISBN 7-5328-2741-0
定　　价:18.50 元

前　言

平面几何问题，传统分为证明题、计算题、作图题和轨迹问题，但是，学好证明题是基础．事实上，其他任何类型问题，将命题加以适当改造便成为证明题；同时，通过证明题而养成的严格的逻辑推理能力，会使学者终身受益．

本书共分三编．第一编，介绍平面几何论证的基础知识与方法，重点是揭示证题途径的一般规律，从而为第二编奠定基础．第二编题集．习题一至习题十三为传统证明题，属于常见题型，往往有一定的解题规律及方法，大部分可供中学生平时练习，少数可选作测试或竞赛之用；习题十四为杂题，相当一部分题型新颖，解法灵活并具有较强的思考性和创造性，可作为课外辅导材料，或选作竞赛试题；习题十五为竞赛试题选，是近十几年以来部分省市、国家及国际数学奥林匹克竞赛试题摘选，供读者开拓视野；习题十六为中考应试自测题，特为在校初中生精心设计．第三编题解，对题集中的每一个题目（习题十六除外），都给出了解答（或简解）或提示．全书共收录习题近六百个，例题近三百，既有广度又有深度．本书主要面向初中生和高中生、中学数学教师、

师范院校数学系学生，以及青少年数学爱好者．中学生一般要在教师指导下阅读．

教学和学习实践反复表明，要学好课本，选几本优秀的课外读物作辅助，是十分必要的．作者认为，中学数学辅导读物的编写，正确处理"应试"与"能力"的关系是关键．当今，"应试"资料和读物充斥市场，而着眼于全面提高学生的学习素质，能够在教法和学法上提供具有一般指导意义的课外读物相对比较匮乏．作者不揣冒昧抛出拙著，正是积四十余年教学经验之所在．拙著若能有助于提高读者"以不变应万变"的能力，将是作者最大的欣慰．但是，由于作者水平所限，错误在所难免，恭候专家、读者批评指正．

孔庆思

2003 年 1 月 8 日

目　　录

第一编　怎样寻求证题途径

第二编　题集·理路

第三编 提示·简解

第一编　怎样寻求证题途径

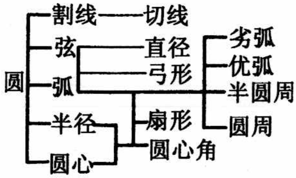
“怎样寻求证题途径”这个问题，既涉及基本知识，又涉及广泛的基本技能．这里，首先利用列表法概括地复习一下平面几何中的有关内容，有选择地介绍一下形式逻辑方面的知识，然后再谈寻求证题途径的常用方法．

（一）基本知识复习

1. 概念

- 直线形集合
  - 非封闭图形集合
    - 直线、射线、线段、折线
    - 角的集合
      - 角的大小
        - 角度一定——直角、平角、周角
        - 角度范围一定——锐角、钝角
      - 二角关系
        - 位置相依关系——邻角、对顶角、内外错角、同位角、同旁内外角
        - 其和的一定关系——余角、邻补角、补角
    - 平行线
  - 封闭图形集合
    - 三角形集合
      - 按角分
        - 锐角三角形
        - 直角三角形
        - 钝角三角形
      - 按边分
        - 不等边三角形
        - 等腰三角形
          - 非等边等腰三角形
          - 等边三角形
    - 四边形集合
      - 任意四边形
      - 平行四边形
        - 矩形
        - 菱形
        - （矩形、菱形）— 正方形
      - 梯　形
        - 任意梯形
        - 等腰梯形
        - 直角梯形
    - 五边以上的多边形集合
      - 任意多边形
      - 正多边形

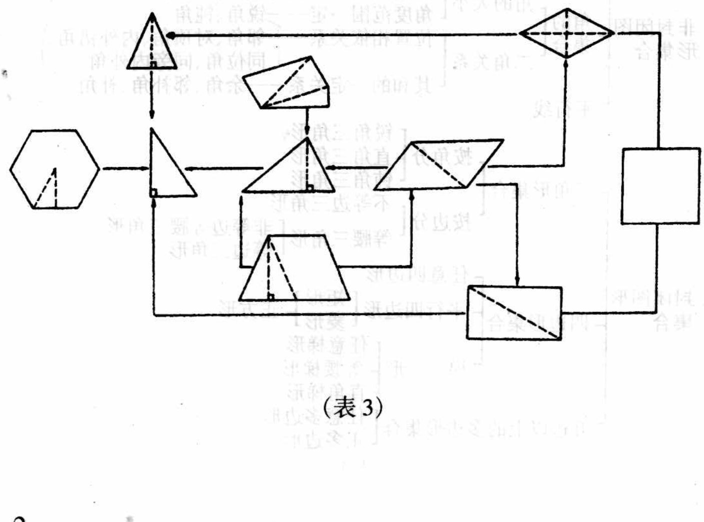
（表 1）



（表 2）

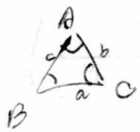
2. 多边形和圆之间的关系

平面几何主要研究直线形和曲线形的性质和应用．直线形主要是多边形，而曲线形以圆为主．圆和多边形之间有密切联系．事实上，圆中的许多问题，例如等分圆周的问题、圆的周长和面积等都是通过直线形的性质解决的．在直线形和圆的联系中，尤其要注意和直角三角形、等腰三角形的关联．然而等腰三角形的问题往往要化为直角三角形的问题，而三角形的问题，有时也要转化为直角三角形解决，它们之间的这种转化在表 3 中被充分地揭示了出来．



（表 3）

3. 三角形的性质

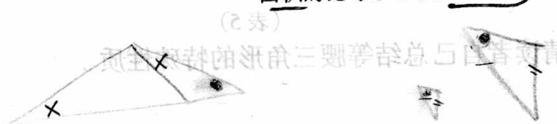


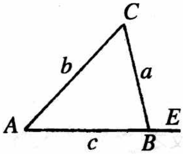
- 三角形
  - 一个三角形（图 1）
    - 角的关系
      - $\angle A+\angle ABC+\angle C=180^\circ$.
      - $\angle CBE=\angle A+\angle C$.
    - 边角关系
      - 若$\angle ABC\leqslant\angle C$，则 $b\leqslant c$；反之 ⇒ 大边对大角 / 大角对大边
      - 若 $b\leqslant c$，则$\angle ABC\leqslant\angle C$；
      - $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$；
      - $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.
    - 边的关系—$a+b>c>|a-b|$. "两边之和大于第三边"
    - 五　　心
      - 外心—三边垂直平分线的交点.
      - 内心—三内角平分线的交点.
      - 垂心—三条高的交点.
      - 重心（图 2）
        - 定义：三条中线的交点.
        - 重心定理：$GD=\dfrac{1}{3}CD$，$GE=\dfrac{1}{3}AE$，$GF=\dfrac{1}{3}BF$.
      - 旁心—三外角平分线的交点.
  - 两个三角形（图 3）
    - 边角关系
      - 若 $b=b'$，$c=c'$，$\angle A\leqslant\angle A'$，则 $a\leqslant a'$；反之
      - 若 $b=b'$，$c=c'$，$a\leqslant a'$，则$\angle A\leqslant\angle A'$.
    - 全　　等
      - 判定—ASA，SAS，SSS.
      - 性质—对应线段相等.
    - 相　　似
      - 判定—ASA，SAS，SSS.
      - 性质
        - 一切对应线段的比等于相似比.
        - 周长的比等于相似比.
        - 面积的比等于相似比的平方.

① $l_{弧}=\dfrac{n\pi r}{180}$

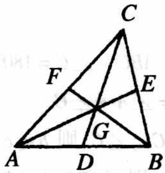
② $S_{扇}=\dfrac{n\pi r^2}{360}$

③ 正多边形中心角 公式 $\dfrac{360}{n}$

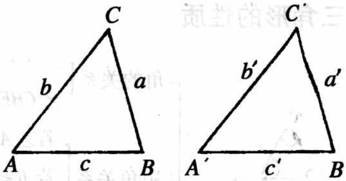




（图1）



（图2）



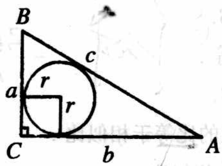
（图3）

（表 4）

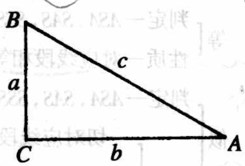
直角三角形

Rt△

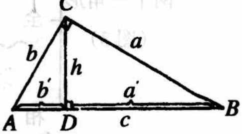
- 全等的判定
  - 一锐角和一边
    - 一锐角和一直角边．
    - 一锐角和斜边．
  - 两　　边
    - 两直角边．
    - 一直角边和斜边．
- 相似的判定
  - 一锐角．
  - 两　边
    - 两直角边．
    - 一直角边和斜边．
- 五心的特性
  - 外心—斜边中点．
  - 垂心—直角顶点．
  - 内心—$r=\dfrac{a+b-c}{2}$.（图 4）
- 角的关系—$\angle A+\angle B=90°$.
- 边角关系（图 5）
  - 若$\angle A=30°$，则 $a=\dfrac{1}{2}c$．反之成立．
  - $a=c\cdot\sin A=c\cdot\cos B=b\cdot \mathrm{tg}A=b\cdot \mathrm{ctg}B$.
- 射影定理（图 6）
  - $h^2=a'\cdot b'$
  - $\left.\begin{array}{l}a^2=a'\cdot c\\ b^2=b'\cdot c\end{array}\right\}\Rightarrow c^2=a^2+b^2$，反之成立．



（图4）



（图5）



（图6）

（表 5）

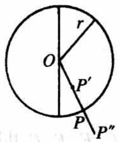
请读者自己总结等腰三角形的特殊性质．

4. 圆

对表 6 中涉及的名词给予解释，对定理讨论其逆命题是否成立．

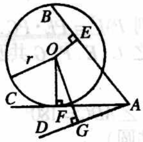
圆

- **点和圆的位置关系**



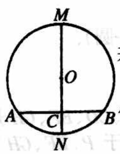
若 $OP = r$，则 P 在 $\odot O$ 上．(反之成立)
若 $OP' < r$，则 P' 在 $\odot O$ 内．(反之成立)
若 $OP'' > r$，则 P'' 在 $\odot O$ 外．(反之成立)

- **直线和圆的位置关系**



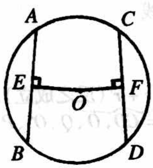
若 $OE < r$，则 AB 与 $\odot O$ 相交．(反之成立)
若 $OF = r$，则 AC 与 $\odot O$ 相切．(反之成立)
若 $OG > r$，则 AD 与 $\odot O$ 相离．(反之成立)

- **直径与弦和弧的关系**



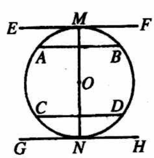
若直径 $MN \perp AB$，则
$AC = BC$，$\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{BN}$，$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM}$.

- **弦、弧、弦心距间的关系**



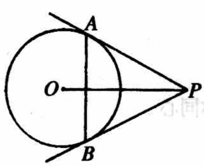
若 $AB \geqslant CD$，则 $OE \leqslant OF$，
$\overset{\frown}{AB} \geqslant \overset{\frown}{CD}$.(反之成立)

- **弦或切线与弧的关系**



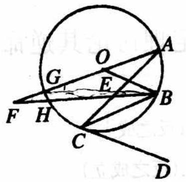
若 $AB \parallel CD$，则 $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.
若切线 $EF \parallel GH$，则 MN 是 $\odot O$ 的直径．

- **切线长定理及推论**



若 PA、PB 切 $\odot O$ 于 A、B，则
$PA = PB$，$OP \perp AB$，$\angle APO = \angle BPO$.

和圆有关的角



$\angle AOB \xlongequal{(m)} \overset{\frown}{AB}$（注：$m$ 表示量数，以下同）.

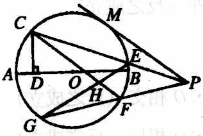
$\angle ACB \xlongequal{(m)} \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$.

$\angle BCD \xlongequal{(m)} \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$，$CD$ 为切线 .

$\angle AEB \xlongequal{(m)} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CH})$.

$\angle AFB \xlongequal{(m)} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{GH})$.

圆中比例线段



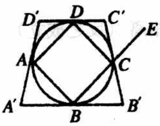
$HC \cdot HF = HE \cdot HG$（反之，$C$、$E$、$F$、$G$ 共圆）.

$CD^2 = AD \cdot BD$. Rt△ABC中

若 PM 切⊙O 于 M，则 $PM^2 = PE \cdot PC$.

$PE \cdot PC = PF \cdot PG$（反之 C、E、F、G 共圆）. “切割线定理”

圆内接四边形外切

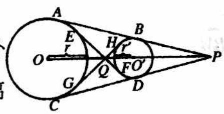


$\angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC = 180°$
（反之，A、B、C、D 共圆）.

$A'B' + C'D' = B'C' + A'D'$
（反之，四边形外切于一圆）.

两圆的位置关系（d 表示圆心距）

外离

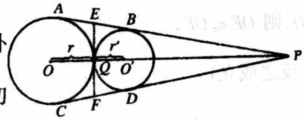


$d > r + r'$（反之成立）.

$AB = CD$，$EF = GH$（AB、CD、EF、GH 是切线）.

若 AB、CD 的延长线交于 P，EF、GH 交于 Q，则 O、Q、O'、P 共线 .

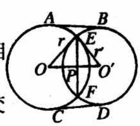
外切



$d = r + r'$（反之成立）.

$AB = CD$，O、Q、O'、P 共线 .

相交

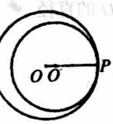


$|r - r'| < d < r + r'$.

$OO' \perp EF$ 且 $PE = PF$.

$AB = CD$.

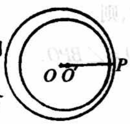
内切



$d = |r - r'|$.

O、O'、P 共线 .

内含



$d < |r - r'|$，$d = 0$ 时称同心 .

（表 6）

5. 平行与垂直

(1)平行线的定义、判定定理及性质

(2)平行与垂直的关系

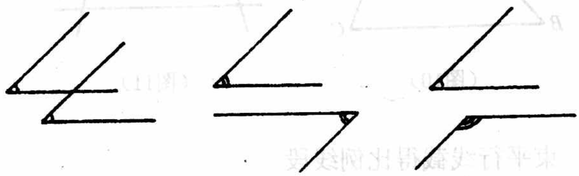
1)若 $l_2 // l_1, l_3 // l_1$,则 $l_2 // l_3$; “传递性”

2)若 $l_1 // l_2, l_1 \perp a$,则 $l_2 \perp a$;

3)若 $l_1 \perp a, l_2 \perp a$,则 $l_1 // l_2$.

(3)平行和垂直与角的联系

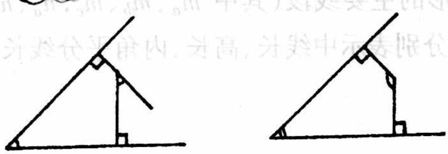
1)两双边互相平行的两角或相等(方向完全相同或完全相反时,图 7)或互补(一双边方向相同,另一双边方向相反时,图 8);



(1)　　(2)

(图 7)　　(图 8)

2)两双边互相垂直的两角或相等[右边⊥右边,左边⊥左边时,图 9(1)]或相补[右边⊥左边,左边⊥右边时,图 9(2)].



(1)　　(2)

(图 9)