21世纪

21世纪高等院校规划教材

高等数学

下册　经管、文科类

主　编　张翠莲　副主编　牛　莉　翟秀娜

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

21世纪高等院校规划教材

高等数学

下册　　经管、文科类

主　编　张翠莲　副主编　牛　莉　翟秀娜

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书依据教育部《高等数学课程教学基本要求》（经管、文科类）编写，可满足经管、文科类本科各专业对高等数学的教学需求。

本书分上、下两册出版，下册包括：常微分方程、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数等内容，打*号的内容可根据不同专业选学，书末附有积分表，习题答案与提示。

本教材强调从实际应用的需要（实例）出发，加强数学思想和数学概念与社会经济实际问题的结合，淡化了深奥的数学理论，强化了几何说明，结构简练、合理。每章都有本章小结、复习题和自测题。此外，本书还配有辅导教材《高等数学学习指导》（经管、文科类）。

本教材可供高等院校经管、文科类本科专业的学生学习使用，也可供高校教师和科技工作者使用。

本书电子教案读者可以到中国水利水电出版社网站或万水书苑免费下载，网址：http://www.waterpub.com.cn/softdown/或 http://www.wsbookshow.com。

图书在版编目（C I P）数据

高等数学 : 经管、文科类. 下册 / 张翠莲主编. --
北京 : 中国水利水电出版社, 2009

21世纪高等院校规划教材
ISBN 978-7-5084-6513-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－
教材 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第163014号

策划编辑：雷顺加　责任编辑：杨元泓　加工编辑：杨谷　封面设计：李佳

书　名	21世纪高等院校规划教材 高等数学（经管、文科类）（下册）
作　者	主　编　张翠莲 副主编　牛　莉　翟秀娜
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京市天竺颖华印刷厂
规　格	170mm×227mm　16开本　总27.75印张　总567千字
版　次	2009年8月第1版　2009年8月第1次印刷
印　数	0001—4000册
总定价	39.80元（上册、下册）

前　言

我国的高等教育正在快速发展，教材建设也要与之适应，特别是随着教育部关于“高等教育面向21世纪内容与课程改革”计划的实施，对教材建设提出了新的要求。本书就是为了适应高等教育的快速发展，满足教学改革和课程建设的需求，体现经管、文科类高等教学教育教学的特点而编写。

本书是编者依据教育部颁布的《高等数学课程教学基本要求》（经管、文科类），根据多年的教学实践，按照新形势下教材改革的趋势编写。全书贯彻“掌握概念、强化应用”的教学原则，加强数学思想和数学概念与经济生活等实际问题的结合，强化利用数学方法求解数学模型，注重学生理解基本概念，掌握基本方法，了解高等数学在经济中的应用；精心选择了教材的内容，从实际应用的需要（实例）出发，淡化了深奥的数学理论，强化了几何说明。每章都配有有学习目标、学习重点、大量的例题和习题、小结、复习题、自测题等，便于学生总结学习内容和学习方法，巩固所学知识。

本书分上、下两册。下册包括常微分方程、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数，书后附有积分表，习题答案与提示。本书可作为高等院校经管、文科类专业学生的高等数学教材。打*号的内容可根据不同专业选学。

为了配合我国高等教育从精英教育向大众化教育转变的趋势，以及现代化教育技术手段在教学中广泛应用的现状，我们对这套教材进行了立体化设计，将尽快推出与教材配套的典型例题分析与习题，希望能更好地满足高校教师课堂教学和学生自主学习及考研的需要，对教和学起到良好的作用。

本书由张翠莲任主编，牛莉、翟秀娜任副主编，其中翟秀娜编写第1章、第2章、第6章；张翠莲编写第3章、第4章、第8章、第10章及书后附录Ⅰ；牛莉编写第5章、第7章、第9章。另外，何春江、张文治、毕雅军、曾大有、张钦礼、岳雅璠、王晓威、邓凤茹、张钦礼、张京轩、赵艳、郭照庄、毕晓华、霍东升、江志超等同志也参加了本书编写的讨论工作。

在本书的编写过程中，编者参考了很多相关的书籍和资料，采用了一些相关内容，汲取了很多同仁的宝贵经验，在此谨表谢意。

由于时间的仓促及作者水平所限，书中错误和不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正，我们将不胜感激。

为了便于教师教学和学生学习，本书电子教案读者可以到中国水利水电出版社网站或万水书苑免费下载，网址：http://www.waterpub.com.cn/softdown/或http://www.wsbookshow.com。也可以与作者联系来获取更多相关的教学资源，作者的E-mail：clzgin@qq.com。

编　者

2009年5月

目　　录

第 7 章　常微分方程

本章学习目标

- 了解微分方程、解、通解、初始条件和特解等概念
- 会识别一阶微分方程，包括可分离变量的方程、齐次方程、一阶线性微分方程和伯努利方程
- 熟练掌握可分离变量的方程及一阶线性微分方程的解法．会解简单的齐次方程和伯努利方程
- 知道下列几种特殊的高阶微分方程：$y^{(n)}=f(x)$，$y''=f(x,y')$，$y''=f(y,y')$
- 了解二阶线性微分方程解的结构
- 熟练掌握二阶常系数线性齐次微分方程的解法
- 熟练掌握自由项为多项式函数、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的乘积的二阶常系数线性非齐次微分方程的解

函数是反映客观现实世界运动过程中量与量之间的一种关系，但在几何学、力学、物理学以及工程技术中经常会遇到稍微复杂一些的运动过程，反映运动规律的量与量之间的关系（即函数）往往不能直接写出来，却能比较容易地建立这些变量和它们的导数（或微分）之间的关系式．这种联系着自变量、未知函数及它的导数（或微分）的关系式，称为微分方程．如果在一个微分方程中出现的未知函数只含有一个自变量，这个方程就称为常微分方程．本章将重点研究常微分方程的解法．

7.1　常微分方程的基本概念

例 7.1.1　物体冷却过程的数学模型．

将某物体放置于空气中，在时间 $t=0$ 时，测得它的温度为 $u_0=150$ ℃，10 min 后测得温度为 $u_1=100$ ℃．我们要求此物体的温度 u 与时间 t 的关系，并计算 20min 后物体的温度．这里我们假定空气的温度保持为 $u_a=24$ ℃．

解　设物体在 t 时的温度为 $u=u(t)$，则温度的变化速度以 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ 来表示．注意到热量总是从温度高的物体向温度低的物体传导的，因而 $u>u_a$，所以温差 $u-u_a$ 恒

正；又因物体将随时间而逐渐冷却，故温度变化的速度 $\frac{du}{dt}$ 恒负. 因此，由牛顿（Newton）冷却定律（在一定的温度范围内，一个物体的温度变化速度与这一物体的温度和其所在介质温度的差值成比例）得到

$$\frac{du}{dt} = -k(u - u_a) \tag{7.1.1}$$

这里 $k > 0$ 是比例常数. 方程（7.1.1）就是物体冷却过程的数学模型，它含有未知函数 u 及它的一阶导数 $\frac{du}{dt}$，这样的方程称为一阶微分方程. 现在，我们给出微分方程的定义.

定义 7.1.1 含有自变量、未知函数以及未知函数的导数（或微分）的方程，称为微分方程.

如果微分方程中出现的未知函数只含一个自变量，则称其为常微分方程. 本章只讨论几种特殊的常微分方程——简称微分方程，有时更简称为"方程". 如果微分方程中的未知函数是两个或两个以上变量的函数，则称其为偏微分方程.

微分方程中的未知函数的最高阶导数的阶数，称为微分方程的阶. 当微分方程所含的未知函数及其各阶导数全是一次幂时，称其为线性微分方程. 在线性微分方程中，若未知函数及其各阶导数的系数全是常数，则称其为常系数线性微分方程.

例如，微分方程 $3y^2\frac{dy}{dx} - 2x = 0$ 是一阶非线性微分方程，$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2y$ 是二阶常系数线性微分方程.

一般地，n 阶微分方程的形式为

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{7.1.2}$$

其中 x 是自变量，y 是未知函数，$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})$ 是 $x, y, y', \cdots, y^{(n)}$ 的已知函数且必含有 $y^{(n)}$.

若能从（7.1.2）解出 $y^{(n)}$，则（7.1.2）变为

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{7.1.3}$$

（7.1.2）式称为隐式微分方程，（7.1.3）式称为显式微分方程. 本章主要讨论显式微分方程.

定义 7.1.2 如果将一个函数 $y = \varphi(x)$ 代入方程（7.1.2）或方程（7.1.3），方程两边恒等，则称函数 $y = \varphi(x)$ 为方程（7.1.2）或方程（7.1.3）的解.

定义 7.1.3 如果含有 n 个独立的任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的函数

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

或

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \cdots, C_n) = 0$$

是方程（7.1.3）的解，则称其为方程（7.1.3）的通解；微分方程通解中的任意常数若被确定，这种不含任意常数的解，称为微分方程的特解.

例如，$y=x^2+C$ 和 $y=x^2+1$ 都是 $y'=2x$ 的解. 其中 $y=x^2+C$ 中含有一个任意常数 C，为其微分方程的通解，而 $y=x^2+1$ 是 $C=1$ 时该微分方程的解，为其微分方程的特解.

为了确定方程（7.1.3）的某个特解，首先要求出方程（7.1.3）的通解，再根据实际情况给出确定通解中 n 个任意常数的条件，称为定解条件，最后求出满足定解条件的特解. 由定解条件求特解的问题，称为微分方程的定解问题. 常见的定解条件有初始条件. 一般 n 阶微分方程的初始条件为

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\big|_{x=x_0}=y_0',\ \cdots,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}$$

其中 y_0，y_0'，$\cdots$，$y_0^{(n-1)}$ 为给定常数，初始条件的个数应与微分方程的阶数相同.

求微分方程满足初始条件的解的问题，称为微分方程的初值问题. 以后只讨论初值问题.

一阶微分方程的初值问题是求微分方程 $y'=f(x,y)$ 满足初始条件 $y\big|_{x=x_0}=y_0$ 的解的问题，记为

$$\begin{cases} y'=f(x,y), \\ y\big|_{x=x_0}=y_0 . \end{cases} \tag{7.1.4}$$

二阶微分方程的初值问题是

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y'), \\ y\big|_{x=x_0}=y_0, y'\big|_{x=x_0}=y_0' . \end{cases} \tag{7.1.5}$$

一阶微分方程初值问题（7.1.4）的特解 $y=\varphi(x)$ 的图形为 xOy 平面上的一条曲线，而方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 的通解 $y=\varphi(x,C)$ 为 xOy 平面上的一族曲线，称为积分曲线族.

积分曲线族上的每一点 (x,y) 处的切线斜率，正好等于 $f'(x,y)$，而满足初始条件 $y\big|_{x=x_0}=y_0$ 的特解就是通过点 (x_0,y_0) 的那条积分曲线. 所以，一阶微分方程的初值问题的几何意义是求微分方程通过点 (x_0,y_0) 的那条积分曲线.

二阶微分方程的初值问题（7.1.5）的几何意义是求微分方程 $y''=f(x,y,y')$ 通过点 (x_0,y_0)，而在该点处的切线斜率为 y_0' 的那条积分曲线.

例 7.1.1 指出下列微分方程哪个是线性的，哪个是非线性的，并指出阶数.

（1）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4x^2-y$；（2）$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2+12xy=0$；

（3）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\cos y+2x=0$；（4）$x\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-5\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3xy=\sin x$.

解 （1）一阶线性；（2）二阶非线性；（3）一阶非线性；（4）二阶线性.

例 7.1.2 验证函数 $y=\dfrac{C}{x}$ 是一阶方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{y}{x}$ 的通解.

解 由 $y=\dfrac{C}{x}$ 可得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{C}{x^2}$，将 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 y 代入方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{y}{x}$ 中，得

$$-\frac{C}{x^2}=-\frac{\frac{C}{x}}{x}=-\frac{C}{x^2}$$

所以函数 $y=\dfrac{C}{x}$ 是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{y}{x}$ 的解. 又因为方程是一阶的，而函数 $y=\dfrac{C}{x}$ 中只含一个任意常数，即任意常数的个数等于方程的阶数，所以函数 $y=\dfrac{C}{x}$ 是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{y}{x}$ 的通解.

例 7.1.3 验证函数 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$（$C_1$，$C_2$ 为任意常数）为二阶微分方程 $y''-3y'+2y=0$ 的通解，并求方程满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=1$ 的特解.

解 因 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$，$y'=C_1\mathrm{e}^x+2C_2\mathrm{e}^{2x}$，$y''=C_1\mathrm{e}^x+4C_2\mathrm{e}^{2x}$，

故
$$\begin{aligned}&y''-3y'+2y\\&=C_1\mathrm{e}^x+4C_2\mathrm{e}^{2x}-3(C_1\mathrm{e}^x+2C_2\mathrm{e}^{2x})+2(C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x})\\&=(C_1-3C_1+2C_1)\mathrm{e}^x+(4C_2-6C_2+2C_2)\mathrm{e}^{2x}=0\,.\end{aligned}$$

所以，函数 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$ 是所给微分方程的解. 又因为这个解中含有两个独立的任意常数 C_1、C_2，与所给方程的阶数相同，所以它是微分方程的通解.

由初始条件 $y(0)=0$ 得 $C_1+C_2=0$，由初始条件 $y'(0)=1$ 得 $C_1+2C_2=1$，所以 $C_1=-1$，$C_2=1$. 于是，满足所给初始条件的特解为 $y=-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}$.

习题 7.1

1. 指出下列方程的阶数，并指出其是否为线性方程：

（1）$y'=2x^2+6$；　（2）$yy''=1$；

（3）$y''-3y'+2y=0$；　（4）$y^{(10)}+8y^{(7)}+2y=\sin x$；

（5）$y''+2y'+xy=f(y)$；　（6）$y'^2+\sin y=0$；

（7）$y^{(4)}+2y''y'''+x^2=0$；　（8）$y''+6xy'+3x^2y=\mathrm{e}^x$.

2. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解：

（1）$xy'=2y,\ y=5x^2$；　（2）$y''+y=0,\ y=3\sin x-4\cos x$；

（3）$y''-2y'+y=0,\ y=x^2\mathrm{e}^x$；

（4） $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=0$，$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$.

3．在下列各题中，确定函数关系式所含的参数，使函数满足所给的初始条件：

（1） $x^2-y^2=C$，$y|_{x=0}=5$；

（2） $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$，$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$；

（3） $y=C_1\sin(x-C_2)$，$y|_{x=\pi}=1$，$y'|_{x=\pi}=0$.

7.2 一阶微分方程

一阶微分方程是微分方程中最基本的一类方程，在经济管理科学中也最为常见，其一般形式为

$$F(x,y,y')=0$$

其中 $F(x,y,y')$ 是 x、y、y' 的已知函数.

已解出 y' 的一阶微分方程形式为

$$y'=f(x,y)$$

其中 $y'=\dfrac{dy}{dx}$. 所以一阶微分方程也可写成对称形式为

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{7.2.1}$$

方程（7.2.1）中，变量 x 与 y 对称，既可以将变量 y 视为 x 的函数，也可以将变量 x 视为 y 的函数.

以下我们讨论两种常见的一阶微分方程.

7.2.1 可分离变量的微分方程

形如

$$g(y)dy=f(x)dx \tag{7.2.2}$$

的一阶微分方程称为可分离变量的微分方程.

设方程（7.2.2）中的函数 $g(y)$ 和 $f(x)$ 都是连续函数，则将方程（7.2.2）两边积分，得通解

$$\int g(y)dy=\int f(x)dx+C$$

其中 $\int g(y)dy$ 和 $\int f(x)dx$ 分别表示函数 $g(y)$ 和 $f(x)$ 的一个具体原函数，C 为任意常数.

能够化为（7.2.2）的一阶微分方程，均称为可分离变量的微分方程，如方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \tag{7.2.3}$$

$$M_1(x)M_2(y)dy+N_1(x)N_2(y)dx=0 \tag{7.2.4}$$

均为可分离变量的微分方程．将微分方程化为分离变量形式求解方程的方法，称

为分离变量法.

例如，当 $g(y)\neq 0$ 时，可将（7.2.3）改写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x$$

这样变量被分离出来，两边再积分，得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C$$

其中 $\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}$ 和 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 分别表示函数 $\frac{1}{g(y)}$ 和 $f(x)$ 的某一原函数，C 为任意常数，从而可求得通解.

例 7.2.1 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$ 的通解.

解 将方程分离变量，得 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=3x^2\mathrm{d}x$

两边积分 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 3x^2\mathrm{d}x+C_1$，

得 $\ln|y|=x^3+C_1$，

从而 $|y|=\mathrm{e}^{x^3+C_1}=\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^3}$，

即 $y=\pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^3}$，

因为 $\pm\mathrm{e}^{C_1}$ 还是任意常数，可记为 C，所以原方程的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{x^3}.$$

在例 7.2.1 的求解过程中，用到了积分公式

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u}=\ln|u|+C,$$

以后为了运算及书写方便，可将公式中的 $\ln|u|$ 改写为 $\ln u$，最后得到的任意常数 C 可正可负.

例 7.2.2 求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x(1+y^2)}{(1+x^2)y}$$

满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解.

解 这是一个可分离变量的微分方程. 其中 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$，$g(y)=\frac{1+y^2}{y}$.

分离变量后，得 $\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$，

两边积分，得 $\ln(1+y^2)=\ln(1+x^2)+\ln C$，

化简得 $$1+y^2=C(1+x^2),$$
这是微分方程的隐式通解.

将初始条件 $x=0$，$y=1$ 代入通解中，得 $C=2$，故所求特解为
$$y^2=2x^2+1.$$

例 7.2.3 求微分方程 $4x\mathrm{d}x-3y\mathrm{d}y=3x^2y\mathrm{d}y$ 的通解.

解 原微分方程为 $$4x\mathrm{d}x=3y(1+x^2)\mathrm{d}y,$$
分离变量，得 $$3y\mathrm{d}y=\frac{4x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$
两边积分，得 $$\frac{3}{4}y^2=\ln(1+x^2)+\ln C,$$
故通解为 $$C(1+x^2)=\mathrm{e}^{\frac{3}{4}y^2}.$$

例 7.2.4 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2$ 的通解.

解 此方程不能分离变量，但令 $u=x+y$，
则 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$
故 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1,$$
原方程可化为 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1=u^2,$$

这是一个可分离变量的微分方程，分离变量，得
$$\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\mathrm{d}x,$$
两边积分，得 $\arctan u=x+C$，
即 $u=\tan(x+C)$，
故原方程的通解为 $y=\tan(x+C)-x$ （C 为任意常数）.

例 7.2.5* 某公司 t 年净资产有 $W(t)$（单位：百万元），并且资产本身以每年5%的速度连续增长，同时该公司每年要以 3000 万元的数额连续支付职工工资.

（1）给出描述净资产 $W(t)$ 的微分方程；

（2）求解方程，这时假设初始净资产为 W_0；

（3）讨论在 $W_0=500,600,700$ 三种情况下，$W(t)$ 的变化特点.

解 （1）利用平衡法，即由

净资产增长速度 = 资产本身增长速度 − 职工工资支付速度

得到方程

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=0.05W-30\text{；}$$

（2）分离变量，得 $\dfrac{\mathrm{d}W}{W-600}=0.05\,\mathrm{d}t$，

两边积分，得 $\ln(W-600)=0.05t+\ln C$，

即 $W-600=C\mathrm{e}^{0.05t}$，

将 $W(0)=W_0$ 代入，得通解为

$$W=600+(W_0-600)\mathrm{e}^{0.05t}\text{，}$$

上式推导过程中 $W\neq 600$，当 $W=600$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=0$，可知 $W=600=W_0$，通常称为平衡解，它仍包含在通解表达式中.

（3）由通解表达式可知，当 $W_0=500$ 时，净资产额单调递减，公司将在第 36 年破产；当 $W_0=600$ 时，公司将收支平衡，净资产保持在 600（百万元）不变；当 $W_0=700$ 元时，公司净资产将呈指数增长.

7.2.2 可化为可分离变量的微分方程——齐次微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7.2.5}$$

的一阶微分方程，称为齐次微分方程，简称为齐次方程.

通过变量代换，齐次方程（7.2.5）可化为可分离变量方程求解，即令

$$u=\frac{y}{x}\text{ 或 }y=xu\text{，} \tag{7.2.6}$$

其中 u 是新的未知函数 $u=u(x)$，

（7.2.6）式两边对 x 求导，有 $y'=xu'+u$，代入方程（7.2.5），得 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)-u$，

分离变量再积分，得 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+C$，

求出积分后，再将 $u=\dfrac{y}{x}$ 回代，即可求得原齐次方程的通解.

例 7.2.6 求方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$ 的通解.

解 此方程为齐次方程，令 $u=\dfrac{y}{x}$，代入原方程，得

$$xu'+u=u+\tan u\text{，}$$

即 $\dfrac{x\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\tan u$，

分离变量，得 $\cot u\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$，

两边积分，得 $\ln\sin u=\ln x+\ln C=\ln Cx$，

即 $\sin u=Cx$，

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式，即得原方程通解

$$\sin\frac{y}{x}=Cx,\quad y=x\arcsin Cx，其中 C 为任意常数.$$

例 7.2.7 求方程 $x^2\mathrm{d}y=(y^2-xy+x^2)\mathrm{d}x$ 的通解.

解 经过简单变形，可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2-xy+x^2}{x^2},$$

即 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(\frac{y}{x})^2-\frac{y}{x}+1,$$

令 $y=ux$，则 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

将其代入上述方程，得 $$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u^2-u+1,$$

原方程已化成了可分离变量的微分方程.

分离变量，得 $$\frac{1}{(u-1)^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分， $$\int\frac{1}{(u-1)^2}\mathrm{d}u=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

得 $$-\frac{1}{u-1}=\ln x+\ln C \quad 或 \quad (1-u)\ln Cx=1,$$

再以 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式，还原变量 y，得原方程的通解

$$(x-y)\ln Cx=x.$$

例 7.2.8* 设商品 A 和商品 B 的售价分别为 P_1、P_2，已知价格 P_1 与 P_2 相关，且价格 P_1 相对 P_2 的弹性为 $\dfrac{P_2\mathrm{d}P_1}{P_1\mathrm{d}P_2}=\dfrac{P_2-P_1}{P_2+P_1}$，求 P_1 与 P_2 的函数关系式.

解 所给方程为齐次方程，整理得 $$\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}P_2}=\frac{1-\dfrac{P_1}{P_2}}{1+\dfrac{P_1}{P_2}}\cdot\frac{P_1}{P_2},$$

令 $u=\dfrac{P_1}{P_2}$，则有 $$P_2u'+u=\frac{1-u}{1+u}u,$$

分离变量，得 $\left(-\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u = 2\frac{\mathrm{d}P_2}{P_2}$，

两边积分，得 $\frac{1}{u} - \ln u = \ln P_2^2 + \ln C$，

将 $u = \frac{P_1}{P_2}$ 回代，得通解 $\mathrm{e}^{\frac{P_2}{P_1}} = CP_1P_2$，其中 C 为任意正常数.

7.2.3 一阶线性微分方程

形如

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{7.2.7}$$

的一阶微分方程，称为一阶线性微分方程，其中 $P(x)$、$Q(x)$ 都是已知的连续函数；$Q(x)$ 称为自由项.

一阶线性微分方程的特点是方程中所含 y 和 y' 都是一次的.

若 $Q(x) \neq 0$，称方程（7.2.7）为一阶非齐次线性微分方程；若 $Q(x) \equiv 0$，即

$$y' + P(x)y = 0, \tag{7.2.8}$$

称为与一阶非齐次线性微分方程（7.2.7）相对应的一阶齐次线性微分方程.

1. 一阶齐次线性方程的解法

将（7.2.8）分离变量，得 $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x$，

两边积分，得 $\ln y = -\int P(x)\mathrm{d}x + \ln C$，

由此得（7.2.8）的通解

$$y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}, \tag{7.2.9}$$

其中 C 为任意常数.

显然 $y = 0$ 也是（7.2.8）的解. 如果在（7.2.9）中允许 $C = 0$，则 $y = 0$ 也包含在（7.2.9）中，因而（7.2.8）的通解为（7.2.9）.

2. 一阶非齐次线性方程的解法

方程（7.2.7）的解可用“常数变易法”求解，即将与（7.2.7）对应的齐次方程（7.2.8）的通解中的任意常数 C 换成待定函数 $C(x)$，即

$$y = C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}. \tag{7.2.10}$$

设（7.2.10）是方程（7.2.7）的解，因为

$$y' = C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - C(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}, \tag{7.2.11}$$

将（7.2.10）和（7.2.11）代入方程（7.2.7），求得

$$C(x) = \int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C, \tag{7.2.12}$$

将（7.2.12）代入（7.2.10），得一阶非齐次线性方程的通解