開明中學講義

開明代數講義

章克標　劉薰宇

開明函授學校出版
開明書店印行

開明中學講義

開明代數講義

章克標　劉薰宇
合編

開明函授學校出版
開明書店印行

編輯例言

一．本講義爲初級中學程度，以適合自學自修爲目標而編輯，亦可以供在校學生作課外自習之用。

二．本講義取材範圍根據部定中學課程標準。

三．本講義爲適合自學起見，行文講釋力求詳細明白，但亦不陷於累墜嚕囌，以要言不煩爲主旨。讀者對於書中所言，必須一一體會，不厭反覆求詳；勵行復習其效乃見。

四．本講義設題雖未見多，但均極精要。演題乃學算進步必經之階程，讀者必須實事求是，逐題親自演算，否則進步難見；空讀講義，實屬徒勞無功。

五．爲學貴有恆心，自學尤屬必要，算學一科向被視爲乾燥無味，但能用心精進，則其中自有妙味，讀者應於此中發見學習趣味，則自然樂於學習，不患不成矣。

六．本講義雖算術、代數、幾何各訂分册，但有一貫之索線，須按步就班，循序漸進。

七．本講義所附小註說明，乃算學中最精警之語，幸勿忽視，如能善於體會，不難升堂入室，爲進而修學高等算學之基礎。

八．本講義因篇幅關係，說明容有未盡詳明，取材容有疎漏，幸海內明達有以教正之。

目　　錄

第一章　緒論

第二章　整式的四則

第三章　一次方程式

第四章　整式之續

第五章　分式

第六章 一次方程式之續

第七章 冪及冪根

第八章 二次方程式

第九章 比及比例

第十章　級數

第十一章　對數

第十二章　函數與圖解

第一章　緒論

第一節　以文字代表數

代數學和算術同樣，是研究關於數的理論和計算的學科。我們在算術中已經學習過的事項，都是可以作爲研究代數學的基礎的。所以也可以說代數學是算術的擴張。卽代數學上的各種事項比算術更爲普遍，研究結果的可以應用的範圍，也比算術廣大。因爲在算術上所講到的數是個個特殊的數，而代數學上所用的，是普遍的一般的數。

代數學的第一特徵，在用文字表數。我們在算術中，只用阿刺伯數字來記數，每一個特殊的數，就有一個相應的數字，而在代數學上，不用這方法，只用若干文字來代替了數，以行種種的研究。代數學上所有的種種方便，大都是因用了文字代表數而來的。

例如在算術中，我們已知 $2-2=0$, $3-3=0$, 但是這只表示了 $2-2=0$, $3-3=0$ 二件特殊的事項而已。我們倘使再知道了 $5-5=0$, $8-8=0$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$, 要表示出來，非得再把這些式子記出來不可。我們再知道了，凡一數減去該數本身，其差常爲 0, 那麼勢必用文詞記載出來，方能明白，因爲我們決不能把各個特殊的式子，盡行寫出來。

在這裏我們倘使用了文字來表數，記出 $a-a=0$ 一個式子來。這式子中的文字 a 代着一個數，代着一個無論怎樣的數，代

着一個一般的數。這樣我們把上面說的凡一數減去該數本身，其差常為 0 一語，用式子表出來了。這就是用文字代表數所生的便利，同時也就是代數學的便利。

因為代數學上所要研究的數，是一般的數而不是個個特殊的數，所以非用文字代表數不可，若像算術那麼只使用數字來表特殊的數，到底不能研究的。其實也就是因算術是用數字表特殊的數，所以算術上的一切，都是對於特殊的數而言，代數學上用文字代表數，所講述的自然非得成為一般的不可。

所謂一般的數，就是無論什麼數都可以的意思，例如：某數的三倍加二倍，等於該數的五倍，這裏的某數是無論什麼數都可以的，即是一般的數。這話用文字表數而記出來，就是：

$$(a\times 3)+(a\times 2)=a\times 5,$$

在代數學上通常記作：

$$3a+2a=5a.$$

又如：甲數加乙數與乙數加甲數相等，即加法的演算與順序無關的一事項，若用文字表數而記出來，就成了：

$$a+b=b+a$$

的式子。

這裏所舉的例，在算術上自然也可明瞭其意義，但其中所說的數，已是說到一般的而非個個特殊的了，所以就可以說是在代數學範圍內的事項。

代數學所用的文字，本來不過是數的記號，故用甲，乙，丙，

代數學的目的，是用式及文字使演算簡單明瞭，並且計算的結果可以普遍適用。其文字所代的是數，而式則是用來代語言的，此處 $a-a=0$ 是一個式子，牠代了凡一數減該數本身，其差常為 0 一語。所以在代數學中，凡算術上要用語句說明的地方，都可用符號和式子來表出，那是一個極大的便利，而且又有簡便明顯的好處。

丁,……,子,丑,寅,卯,……,或者天,地,玄,黃,……均無不可,但現在普通用着羅馬字母的 $a,b,c,d,\cdots\cdots x,y,z$ 等。

通常以前面的 $a,b,c,\cdots\cdots$ 等表已知的數,以後面的 x,y,z 等表未知的數。

已經說過,文字所代的數,是無定的數,但在同一事項或計算中,某一文字只能代替某一定的數,某一定數也只能用某一定文字來代,否則要混淆不淸了。

如上面以 a 代甲數,以 b 代乙數之後,忽易爲以 c 代甲,以 a 代乙,則式子變成 $a+b=a+c$ 便令人不解。

上面已說過代數學上用文字表數的長處,在解問題時更有不少的便利,今示其例於次。

例: 甲有銀 100 元,乙有銀 16 元,問甲給乙若干元,則二人所有銀相等?

算術的解法 1.

甲乙所有銀元變成相等以後,其銀元之和仍不變。是:

100 元 $+16$ 元 $=116$ 元。

因之其時每人所有的是 116 元 $\div 2=58$ 元。

100 元 -58 元 $=42$ 元。

故甲應給乙 42 元。 答: 42 元。

算術的解法 2.

現在甲比乙多 100 元 -16 元 $=84$ 元。

因之把這多餘的銀元二分,以其半給乙,則二人所有卽爲相等了。

而 84 元 $\div 2=42$ 元。 答: 42 元。

羅馬字母中的 o 與數字 0(零)有相混淆之虞,故代數學上,是避開此字母 o 的。

代數上用的羅馬字,都寫草體,很少用到大寫的。在不敷用時,就用希臘字母 $\alpha, \beta, \gamma,\cdots\cdots$ 等。

代數的解法

設　甲應給乙的爲 x 元，

則　甲給了乙後所剩的還有 $(100-x)$ 元，

乙受了此銀元後所有的是 $(16+x)$ 元。

這二個是相等的，故得次式：

$$100-x=16+x.$$

在此式中，x 是未知的數，能求得 x 等於何數時，此式方能成立，卽得答數。

現在想法子把這數求出來：

在這式的左右兩邊各加 x，得

$$100=16+x+x.$$

式的二邊各減 16，得

$$100-16=2x.$$

卽：
$$84=2x.$$

式的二邊以 2 除，

$$42=x.$$

卽：　所求之數 $x=42$.

演算記號

代數學上所有的算法，也脫不出加減乘除四種，其演算的記號與算術相同。

例：　一數 a 加以另一數 b，以 $a+b$ 表示之。

　　一數 a 中減去另一數 b，以 $a-b$ 表示之。

二數 a 和 b 的相乘，常略去其間的乘號 $\times$，不記作 $a\times b$ 而

上面的計算，一見雖似較算術的計算爲繁，然此由於尙未熟知代數之故，此等式子的算法，一定的方法，實比算術容易，而立出這個式子來時，也不必如算術之加思索，習熟後，當可知其便利。

只記號 ab。$a\times(b+c)$ 記作 $a(b+c)$。$3\times x\times y\times z$ 也記作 $3xyz$。

又在不致與小數點相混而生起誤解時，也有於二數間記一點以代乘號的。

如： $a\times b$ 記作 $a\cdot b$, $3\times 7\times 5\times x$ 記作 $3\cdot 7\cdot 5x$。

凡乘積中有數字又有文字者，把數字記在開頭處，是一定的規則。

如： $a\times 5\times b\times 7\times x$ 須記作 $5\cdot 7abx$。

二數的相除，用 $\div$ 號記出來是很少的，大抵總用分數的形式。

如： $a\div b$ 記作 $\dfrac{a}{b}$ 或 a/b。

$x\div(a+b)$ 記作 $\dfrac{x}{a+b}$ 或 $x/(a+b)$。

式及等式

用演算的記號把文字或數字連結起來的，叫做代數式或單叫式。

代數式是代表語言的，前面已說過了，今示其例：

$a+b$ 是說把一數 b，加到另一數 a 上去。

$5a$ 是說 a 的 5 倍，即 $a\times 5$ 的積。

$5a+7$ 是說 a 的 5 倍，再加上 7。

$\dfrac{4x+3y}{x-y}$ 是說 $4x$ 加了 $3y$ 後，再以 $x-y$ 除。

其他準此。

試把下記的語言用代數式表出之：

1. x 的 8 倍與 y 的 2 倍之和。
2. 從 a 和 b 的積中減 x 的 3 倍。
3. x, y 的積的 3 倍加 z 的 5 倍；以 x 及 y 的和除，在其所得商中，加上 a 的 3 倍。

如： $a+b$, $a(b+c)$, $\dfrac{x}{a+b}$ 等都是式。

把式或文字、數字用等號連結的叫等式。

如： $a+b=b+a$, $3a+2a=5a$, $a-a=0$

及： $100-x=16+x$

都是等式。

運算

代數學上的運算與算術相同，看式中的演算符號，倘使只有加減或只有乘除的，可照式的次序，自左而右，順次計算。若是加減乘除混雜的，則先算乘除後算加減。

這裏須注意的，在代數學上，因爲用文字來表數，所以計算的結果，也不能常常同算術一樣有確定的數字答數。

例如算術上，$7+8=15$，那是有一定結果的，但代數學上，$a+b$ 的結果，仍只能用 $a+b$ 記出來，而不能再簡單了。算術上，$7\times8=56$ 是有一定結果的，代數學上，a 乘 b 只記出 ab 卽可，並不要再計算什麼，式子一點也不能改得再簡單些。

但有些式子，也可以改得簡單些的。

如： $3a+2a=5a$,

或： $3a\times2b=6ab$.

這也不過根據了計算的規則，把牠的形式稍加變化罷了。

代數式的數値

上面說過，代數式只是一個以演算符號連結文字和數字的式子。這個式子依法運算起來，只能把牠的形式稍改變得簡單些，而牠的數値是不可知的。那的確如此。因爲文字所表的是一般的數，無論說牠是什麼數，都可以，自然不能等於一定的數了。但是倘使我們指定某文字等於特定的某數之後，再去計算，那麼代數式的數値是一定的，是可以求得的。

例如： $3a+2a$ 一式中，若指定 $a=2$；

則： $3a+2a=5a=5\times2=10$，

是有一定的數値了。

又如： $3a\times2b$ 中，若指定 $a=2, b=1$；

則： $3a\times2b=(3\times2)\times(2\times1)=6\times2=12$，

也是有一定的數値了。

這樣，指定了特殊的數以代式中的文字，照式計算出來的數，稱爲這時的代數式的數値。當然因爲所指的數不同，代數式的數値也要不同的。

如： 以 $a=3, b=2$；

則： $3a\times2b=(3\times3)\times(2\times2)=9\times4=36$，

而不是12了。但指定的數一定時，無論那個式子如何變化，式子的數値是不變的。

如： $3a\times2b=6ab$，

在變成 $6ab$ 以後，

設： 令 $a=2, b=1$；

則： $6ab=6\times2\times1=12$，

與前面的計算 $3a\times2b$ 一樣的。這理由前面說過的，就是因爲式子的變化，原只變化了牠的形式。

等式的兩種

等式的意義，前面說過了，是用了等號連結代數式及文字、數字的式子。

如： $a+b=b+a$

及： $100-x=16+x$

等都是。

在這裏，我們留心一看，可以知道這二個式子有不同的性

質。在 $a+b=b+a$ 一式中，無論我們指定 a,b 等於什麼的數，代進去計算等號左右的式子的數值，這個等式，常是成立的。

但在 $100-x=16+x$ 一式中，卻不同了。除了 $x=42$ 以外，無論用什麼數代 x 都不能使這等式成立。因此我們可以知道在代數上，等式有兩種。

等式中的文字，無論用什麼數值代進去，等式常成立的，叫做恆等式。

等式中的文字，須以特殊的數值代進去，方能使等式成立的，叫做方程式。

所以： $a+b=b+a$ 是恆等式，

而 $100-x=16+x$ 卻是方程式。

適合於方程式的數值，即代方程式中的文字而使得等式成立的數，稱為方程式的根。

如： 42 即是方程式 $100-x=16+x$ 的根。

有些恆等式，常常被人叫做公式。因為公式是用文字數字、演算符號及等號連結的一種式子，特別表示運算的方法，及用無論何數代入即可得出答數來的式子。

所以有些恆等式，因了立腳點的關係，就可以看做公式的。

如： $(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$，

方程式也是一種代數式，當然也代表着一種語句，平常的把應用問題立成方程式，即是把語言改寫成式子的工作。

方程式中的所要求出來的數，即以 x 來代的，叫未知數，其他已知的數叫已知數，根就是未知數的值。

方程式有等號相連，在等號左的，稱為其左邊，在右的稱為其右邊，這叫做方程式的兩邊。

是個恆等式,但也可以看成乘法的公式。

又如: 大小二數的和爲a,差爲b時,設大數爲x,小數爲y,

則 $$x=\frac{a+b}{2},\quad y=\frac{a-b}{2},$$

便是求大數及小數的公式。

因爲二數的和及差,即a,b無論等於什麽數,只要代入式中,就可以算出二數來了。

簡單方程式的解法

前面已有一例,說到應用問題可以用代數學方法解答,即是立了方程式而解之。研究方程式如何解法,是代數學上很重大的事項,以後還要詳細講述,現只示其極簡單之例。

[例 1] $8x=56$, 求x.

【解】 x的8倍是56,故x是56的八分之一。即

$$x=\frac{56}{8},\quad x=7. \text{答}$$

習題 1.

求次記各方程式中的x:

1. $7x=105$. **2.** $12x=180$.

3. $38x=228$. **4.** $64x=24$.

[例 2] $x+17=35$, 求x.

【解】 x加17是35,所以x等於35中減17。即

$$x=35-17,\qquad x=18. \text{答}$$

在這裏,$8x$, $7x$等的8, 7稱爲x的係數。

例1的由$8x=56$變到$x=\frac{56}{8}$,也可以看做兩邊以x的係數除之。

例2的由$x+17=35$變到$x=35-17$,可以看做兩邊各減17,而形式是左邊的$+17$移到右邊成了-17。

習題1的答: 1. $x=15$. 2. $x=15$. 3. $x=6$. 4. $x=3/8$.

[例 3] 解 $4x-5=23$.

【解】 $4x$ 中減 5 等於 23,故 $4x$ 是等於 23 加上 5,即

$$4x=23+5,\quad \text{即 } 4x=28,\quad \text{即 } x=7. \text{ 答}$$

習題 2.

解次記各方程式:

1. $x-9=6$.
2. $2x+3=15$.
3. $5x-8=12$.
4. $7x+4=40-8$.

[例 4] 解 $6x=2(x+30)$.

【解】 改寫原式 $6x=2x+60$.

兩邊各減 $2x$, $6x-2x=60$,

$$4x=60.$$

$$\therefore\quad x=\frac{60}{4},\ x=15. \text{ 答}$$

習題 3.

解次記各方程式:

1. $8x+6=22$.
2. $7x-3x=96$.
3. $9x=4x+60$.
4. $6x-5=2x+15$.
5. $4(x-4)=x+8$.
6. $13x=6x+36-2x$.

例 3 中的 $4x-5=23$ 變到 $4x=23+5$,可以看做兩邊加 5,亦即是左邊的 -5 移到右邊成了 $+5$。

結局就是方程式的一邊的數移到他邊時,其符號須變號的:這是移項的規則。

習題 2 的答: 1. $x=15$. 2. $x=6$. 3. $x=4$. 4. $x=4$.

習題 3 的答: 1. $x=2$. 2. $x=24$. 3. $x=12$. 4. $x=5$. 5. $x=8$. 6. $x=4$.

應用問題解法

普通先將所求的數以 x 代表,用 x 把問題中的意思立為方程式。再解所得的方程式,以得未知數 x 之值。再檢這所求得的答數,適合於這問題的意義否。依照這個順序,可以決定那答數了。

方程式的應用

［例］ 兄弟年齡之和爲 37，而兄比弟大 5 歲，問各人幾歲？

【解】 設兄年爲 x 歲，則弟比兄小 5 歲，是 $x-5$ 歲，二人歲數之和是 37，因得次記方程式：

$$x+(x-5)=37.$$

解此方程式，求得 x 的數值，卽可。

$$2x-5=37.$$

兩邊各加 5， $2x=37+5,$

$$2x=42.$$

$$\therefore \quad x=21.$$

故兄年 21 歲，弟年是 $21-5=16$.

答：兄 21 歲，弟 16 歲。

習題 4.

1. 何數加以 16，則成該數之五倍？
2. 某數的 4 倍減 8，等於該數的 3 倍加 5，求此數。
3. 甲乙二人共有銀 48 元，甲所有爲乙的三倍，求各人所有(以乙所有爲 x 元)。
4. 父年比子年大 28 歲，又適爲子年之 5 倍，求各人的年齡(以子年爲 x 歲)。
5. 甲數比乙數小 12，而兩數之和爲 60，求各數。

第二節 正數與負數

用算術上已知的數來施行計算，在加減乘除四則中，加法和乘法是在無論怎樣的數之間都可以施行的，除法則除了除數

習題 4 的答：

1 $(x+16=5x)$, 4. 2. $(4x-8=3x+5)$, 13.
3. $(x+3x=48)$, 12 元, 36 元. 4. $(5x-x=28)$, 7 歲, 35 歲,
5. $(x+x-12=60)$, 大數 36, 小數 24.