全国著名考研辅导班强力推荐

考研 人大版

名师导学系列

2004年 硕士研究生入学考试 数学复习指导

主编 李恒沛

- 北京航空航天大学教授
- 教育部考试中心原考研数学命题组组长
- 从事命题工作十多年

中国人民大学出版社

考研 人大版

2004年

硕士研究生入学考试

数学复习指导

主　编　李恒沛
编著者　（以姓氏笔画为序）
吴纪桃　李恒沛　李忠范
杨　荣　侯书会

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

2004年硕士研究生入学考试数学复习指导/李恒沛主编
北京：中国人民大学出版社，2003

ISBN 7-300-04657-6/G・969
Ⅰ. 2…
Ⅱ. 李…
Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第034440号

2004年硕士研究生入学考试数学复习指导
主编　李恒沛

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室） 010－62515351（邮购部）		010－62511239（出版部） 010－62514148（门市部）
网　　址	http://www.crup.com.cn http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	中煤涿州制图印刷厂		
开　　本	787×1092毫米 1/16	**版　　次**	2003年7月第1版
印　　张	36.75	**印　　次**	2003年7月第1次印刷
字　　数	843 000	**定　　价**	48.00元

前　言

本书是为报考硕士研究生参加全国数学统考的考生而编写的，也可作为大学生的补充读物及教师的教学参考书。

遵循考试大纲规定的内容，全书分高等数学（第1～8章）、线性代数（第9章）、概率论与数理统计（第10章）三部分共十章。每章下面分节，每节又分“内容摘要与考查重点”和“例题分析”两部分。第一部分简明扼要地把本节考查内容介绍出来，并指出考查重点；第二部分列举典型例子分析解题思路，并示明考试题型。这些例子侧重于概念的理解、理论的掌握、方法的运用，使之达到触类旁通、举一反三。

从历年研究生入学考试数学试题来看，试题有如下特点：(1) 概念性强。着重考查考生对基本概念的掌握，会运用基本定理完成对一些命题的证明，从不同角度、不同提法（即所谓变形、变式）来考查考生对其掌握的熟练程度。(2) 综合性强。一道试题着重考查一部分内容，而这部分内容又有很多知识点，不可能面面俱到，只能综合几个知识点来考查。这类题几乎年年试卷都有，旨在考查考生的能力与数学素质。(3) 运算性强。正确地运算基于正确的概念和方法，数学试题虽有一定的计算量，但只要考生基本概念清楚，基本理论融会贯通，基本方法运用自如，运算起来就能快捷正确。试题具有一定的灵活性，从不同侧面（或不同角度或相关的几个知识点）考查考生的能力，注意一题多解，好让考生临场发挥，运作自如。此外，试题还注意到论证性和应用性，考查考生逻辑推理的能力和综合应用的能力，这是必不可少的能力，不论是对工学、经济学，还是管理学各专业的考生来说，都是这样，概莫能外。本书就是针对上述特点来精选例题和编写习题的。

本书内容紧扣大纲，全面而不繁琐，条理清晰，重点突出；再现考题，例题选择多样化，典型性强，解析透彻；时时小结，前后照应，便于掌握；每章之后附有习题，便于考生自我测试。本书中例题和习题互相补充，起到深化内容的作用，要求考生不仅要看懂例题，还要演练习题，两者都是重要的。

本书1～4章由吴纪桃编写，5～8章由李恒沛编写，第9章由侯书会编写，第10章由李忠范、杨荣编写，全书由李恒沛统稿。编著者都长期在重点大学从事数学教学和科研工作，有的参加过多年全国统考数学试题的命制，有的参加过多年考研辅导，并都参与过历年考研数学试卷的评阅和分析，积累了丰富的教学经验，对考研命题有深刻的研

究，考研辅导效果显著。编著者愿此书的出版会对考研学子有所裨益。

本书在编写过程中，主要参考书有：

教育部：《2004年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，高等教育出版社，2003。

全国高校工科数学课程教学指导委员会《工科数学》编委会：《工科数学·二〇〇一年考研专辑》，2001。

蔡燧林、张继昌：《研究生数学入学考试精编》（第二版），浙江大学出版社，2000。

李恒沛、王日爽、萧亮壮：《全国研究生入学数学统考应试指导》，广西科学技术出版社，1988。

编著者

于北京，2003年6月

目　录

第一章　函数、极限、连续性

§1 函数

一、内容摘要与考查重点

1. 函数的概念与表示法

函数的定义：设有两个变量 x 与 y，如果当变量 x 在某数集 D 内任取一值时，变量 y 按照一定的法则总有一个确定值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y = f(x)$.

这时称 x 为自变量，也称 y 是因变量，称 D 是函数 $f(x)$ 的定义域.

2. 函数的简单性质

(1) 单调性：设 $y = f(x)$ 在某区间 I 内有定义，如果对于该区间内的任意两点 $x_1 < x_2$，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$（或 $f(x_1) > f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的（或单调减少的）.

(2) 奇偶性：设 $y = f(x)$ 在某对称区间 I 内有定义，如果对于 I 内任意点 x，恒有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 在 I 内是偶函数；如果恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 在 I 内是奇函数.

偶函数的图形对称于 y 轴，奇函数的图形对称于原点.

(3) 周期性：设 $y = f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 内有定义，若存在一个正常数 T，使得 $f(x+T) = f(x)$ 对于任何的 $x \in \mathbf{R}$ 都成立，则称 $f(x)$ 是周期函数. 通常将满足关系式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

(4) 有界性：设 $y = f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果存在 $M > 0$，使得对于任何 $x \in I$，都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 内有界.

3. 复合函数

设 $y = f(u)$ 的定义域为 D_u，$u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_x，值域为 E，若 $E \subseteq D_u$，则对于任何 $x \in D_x$，有 $u = f(x)$ 与 x 对应，而 $u \in E \subseteq D_u$，故又有确定的 y 与 u 对应，从而，对于任何 $x \in D_x$，都有确定的 y 与 x 对应，按照函数的定义，确定了 y 是 x 的函数. 此函数是

通过中间变量 u 建立的 y 与 x 的对应关系的，因而，称此函数为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，记为 $y=f(\varphi(x))$.

4. 反函数

设 $y=f(x)$ 的值域为 D_y，如果对于 D_y 中的任何一 y 值，从关系式 $y=f(x)$ 中可确定惟一的 x 值，则此时，按照函数的定义，也确定了 x 是 y 的函数，称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上，用 x 表示自变量、y 表示因变量，因此也称 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数.

$y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

注意：$x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图像是同一个.

5. 初等函数与基本初等函数

(1) 基本初等函数：称下述五种函数为基本初等函数.

幂函数　$y=x^{\mu}$（μ 为实数）.

指数函数　$y=a^x(a>0,a\neq 1)$.

对数函数　$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$.

三角函数　$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$.

反三角函数　$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$.

(2) 初等函数：由基本初等函数经过有限次四则运算、有限次复合而成的，并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

6. 分段函数

如果一个函数 $f(x)$ 在其定义域内的不同的区间内，其对应法则 f 有着不同的初等函数表达式，则称此函数为分段函数.

对于本小节的内容，应重点掌握以下几点：

(1) 理解函数的概念，掌握函数的表示法.

例如，应会求函数的定义域和值域，会从函数的复合表达式中求出原来函数的表达式，即从 $f(\varphi(x))=g(x)$ 中求出 $f(x)$ 的表达式，尤其应注意求分段函数的复合问题.

(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

例如，应会判定函数的单调性（用定义或用后面所述的导数方法）、奇偶性等.

(3) 掌握基本初等函数的性质及其图形.

二、例题分析

例 1　已知 $f(x+\frac{1}{x})=\frac{x^2}{x^4+1}$，求 $f(x)$.

分析：这是已知复合函数 $f(\varphi(x))$ 的表达式，欲求函数 $f(x)$ 的表达式的问题. 此问题的一般解法是在 $f(\varphi(x))$ 的表达式中，令 $\varphi(x)=u$，即可得到 $f(u)$ 的表达式，从而可得出 $f(x)$ 的表达式.

解：令 $x+\frac{1}{x}=u$，则有

$$f(u)=\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{(x+\frac{1}{x})^2-2}=\frac{1}{u^2-2},$$

所以　$f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$.

例 2　已知 $f(x)$ 在$[-2,2]$上为偶函数，且 $f(x)=2x^2+x(x\in[-2,0])$，那么当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)$ 的表达式为(　　).

A. $2x^2+x$　　B. $2x^2-x$　　C. $-2x^2+x$　　D. $-2x^2-x$

分析：已知函数的奇偶性时，可以由奇偶性的性质来得出对称区间上的函数的表达式.

解：当 $x\in[0,2]$ 时，$-x\in[-2,0]$，由于 $f(x)$ 是偶函数，所以有

$$f(x)=f(-x)=2(-x)^2+(-x)=2x^2-x.$$

故应选 B.

例 3　设 $f(x)=\begin{cases}1, |x|\leqslant 1,\\ 0, |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 2, & |x|>2,\end{cases}$ 求 $f(g(x))$.

分析：这是一个分段函数求复合函数的问题，按照一般求复合函数的方法，先将 $f(x)$ 的表达式中的 x 用 $g(x)$ 替换. 这里的关键是要注意到 $g(x)$ 也是分段函数，要讨论分段函数 $g(x)$ 的取值范围.

解：$f(g(x))=\begin{cases}1, |g(x)|\leqslant 1\\ 0, |g(x)|>1\end{cases}$

以下的关键问题是要知道当 x 在什么范围内变化时 $|g(x)|\leqslant 1$，当 x 在什么范围内变化时 $|g(x)|>1$.

先来讨论使 $|g(x)|\leqslant 1$ 的 x 的范围.

由 $g(x)$ 的表达式清楚地看出只有当 $|x|\leqslant 2$ 时才可能使 $|g(x)|\leqslant 1$.

在 $|x|\leqslant 2$ 范围内，要使 $|g(x)|=|2-x^2|\leqslant 1$，

只须 $1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}$.

所以，当 $1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}$ 时，有 $|g(x)|\leqslant 1$.

再来讨论使 $|g(x)|>1$ 的 x 的范围.

由 $g(x)$ 的表达式可知当 $|x|>2$ 时 $|g(x)|>1$. 另外，当 $\sqrt{3}<|x|\leqslant 2$ 或 $|x|<1$ 时，也有 $|g(x)|>1$.

综合上述讨论知

$$f(g(x))=\begin{cases}1, 1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}\\ 0, |x|>\sqrt{3}\text{ 或 }|x|<1\end{cases}.$$

例 4　设 $y=(a-x^b)^{\frac{1}{n}}$，当 a,b 满足条件________时，该函数的反函数与该函数相等.

分析：由 $y=(a-x^b)^{\frac{1}{n}}$ 可得

$$x=(a-y^n)^{\frac{1}{b}}$$

也即反函数为　$y=(a-x^n)^{\frac{1}{b}}$.

与直接函数比较就知当 $b=n, a$ 任意时，反函数与直接函数相等.

解：$b=n, a$ 任意.

例 5 设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单增，$f(x)$ 在 $[g(a),g(b)]$ 上单减，则 $f(g(-x))$（　　）.

A. 在 $[a,b]$ 上单增　　B. 在 $[a,b]$ 上单减

C. 在 $[-b,-a]$ 上单增　　D. 在 $[-b,-a]$ 上单减

分析：首先，可知 $f(g(-x))$ 的单调区间应有 $[-b,-a]$，所以，可排除 A、B 选项. 然后，再用单调性定义判断.

任取 $x_1, x_2 \in [-b,-a]$，$x_1 < x_2$.

则 $-x_1, -x_2 \in [a,b]$，且 $-x_1 > -x_2$.

由 $g(x)$ 的单增性有 $g(-x_1) > g(-x_2)$.

再由 $f(x)$ 的单减性有 $f(g(-x_1)) < f(g(-x_2))$.

所以复合函数 $f(g(-x))$ 在 $[-b,-a]$ 上单增.

解：应选 C 项.

例 6 设 $y=\frac{1}{2x}f(t-x)$，当 $x=1$ 时，$y=\frac{1}{2}t^2-t+5$，求 $f(x)$.

解：$x=1$ 时，$y=\frac{1}{2}f(t-1)=\frac{1}{2}t^2-t+5$.

从而　$f(t-1)=t^2-2t+10$.

令 $t-1=x$，　$f(x)=(x+1)^2-2(x+1)+10$.

所以　$f(x)=x^2+9$.

例 7 设 $f(x)=\frac{x}{x-1}$，则 $f(f(f(f(x))))=$ ________.

分析：$f(f(x))=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}=\dfrac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=x \quad (x\neq 1)$

$$f(f(f(x)))=\frac{f(f(x))}{f(f(x))-1}=\frac{x}{x-1} \quad (x\neq 1)$$

$$f(f(f(f(x))))=f(f(x))=x \quad (x\neq 1)$$

解：应填 $x(x\neq 1)$.

例 8 下列函数中是偶函数的应为（　　）.

A. $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$　　B. $f(x)=([x])^2$

C. $f(x)=\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x$　　D. $f(x)=\operatorname{sgn}(x)\cdot\cos x$

分析：此题是考查函数的奇偶性的定义以及一些典型函数的定义. 容易验证 A、D 选项的函数是奇函数，B 选项的函数非奇非偶，故只有选择 C.

解：选择 C. 因为此时

$$f(-x)=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-x}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{-x}=\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x$$
$$=\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=f(x).$$

§2 极限

一、内容摘要与考查重点

1. 极限的有关定义

(1) 数列极限的定义:对于数列$\{x_n\}$,如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在正整数N,使得当$n>N$时,恒有$|x_n-a|<\varepsilon$,则称常数a是$\{x_n\}$的当n趋于无穷时的极限,记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,也记为$x_n\to a(n\to\infty)$.

(2) 当自变量趋于无穷时函数极限的定义:

1) 设$f(x)$当$|x|$充分大时有定义.如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在$X>0$,使得当$|x|>X$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数A是$f(x)$的当x趋于无穷时的极限,记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,也记为$f(x)\to A(x\to\infty)$.

2) 设$f(x)$当x充分大时有定义.如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在$X>0$,使得当$x>X$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数A是$f(x)$的当x趋于正无穷时的极限,记为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,也记为$f(x)\to A(x\to+\infty)$.

3) 设$f(x)$当$-x$充分大时有定义.如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在$X>0$,使得当$x<-X$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数A是$f(x)$的当x趋于负无穷时的极限,记为$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$,也记为$f(x)\to A(x\to-\infty)$.

(3) 当自变量趋于某定点时函数极限的定义:

1) 设$f(x)$在x_0的某去心邻域内有定义.如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在$\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数A是$f(x)$的当x趋于x_0时的极限,记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,或$f(x)\to A(x\to x_0)$.

2) 设$f(x)$在x_0的左邻域内有定义.如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在$\delta>0$,使得当$x_0-\delta<x<x_0$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数A是$f(x)$的当x趋于x_0时的左极限,记为$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$,或$f(x)\to A(x\to x_0^-)$.

3) 设$f(x)$在x_0的右邻域内有定义.如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在$\delta>0$,使得当$x_0<x<x_0+\delta$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数A是$f(x)$的当x趋于x_0时的右极限,记为$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,或$f(x)\to A(x\to x_0^+)$.

(4) 无穷小的定义:如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则称$f(x)$为当$x\to x_0$时的无穷小.

类似地,可定义当$x\to\infty$时的无穷小.

(5) 无穷大的定义:设$f(x)$在x_0的某去心邻域内有定义.如果对于任意给定的$M>0$,总存在$\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)|>M$,则称$f(x)$是当x趋于x_0时的无穷大.记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

类似地，可定义$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.

类似地，还可定义当 $x\to\infty$ 时的无穷大.

(6) 无穷小阶的定义：设$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\beta=0$.

1) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称当 $x\to x_0$ 时，α 是比 β 高阶的无穷小，记为 $\alpha=o(\beta)$.

2) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=A(A\neq 0)$，则称当 $x\to x_0$ 时，α 是与 β 同阶的无穷小，记为 $\alpha=o(\beta)$；特别地，当 $A=1$ 时，则称当 $x\to x_0$ 时 α 是与 β 等阶的无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$.

3) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称当 $x\to x_0$ 时 α 是比 β 低阶的无穷小.

类似地，可定义当 $x\to\infty$ 情形下的无穷小的阶.

2. 极限的有关性质

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

(2)(保号性) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0(A<0)$，则存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0(f(x)<0)$.

(3) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $f(x)\geqslant 0(f(x)\leqslant 0)$，则 $A\geqslant 0(A\leqslant 0)$.

(4)(局部有界性) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则存在 x_0 的某去心的邻域 $U^0(x_0,\delta)$，使得 $f(x)$ 在 $U^0(x_0,\delta)$ 内有界.

以上 4 条性质在$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的情形下也有相应的形式.

3. 极限存在准则

(1) 单调有界数列必有极限.

(2)(夹逼准则) 若在 x_0 的某去心的邻域(或 $|x|$ 充分大时) 有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$，则有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$.

4. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

通过变量替换这两个公式可写成更加一般的形式：设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，且 $f(x)\neq 0$，则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1.$$

$$\lim_{x\to x_0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}.$$

5. 极限的运算法则

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=AB$.

(3) 若 $B \neq 0$,则$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

上述性质当 $x \to \infty$ 时也成立.

6. 无穷小的有关性质

(1) 有限个无穷小的代数和是无穷小.

(2) 有限个无穷小的乘积是无穷小.

(3) 有界变量乘无穷小是无穷小.

(4) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$,其中$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$.

(5) 若 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小,且 $f(x) \neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷大;反之,若 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷大,则$\dfrac{1}{f(x)}$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

(6)(等价无穷小替换) 设$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$,$\lim\limits_{x \to x_0} \beta = 0$,且 $\alpha \sim \alpha'$,$\beta \sim \beta'$,则$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

上述性质当 $x \to \infty$ 时也成立.

对于本小节的内容,应重点掌握以下几点:

(1) 利用极限的运算法则求极限.

(2) 利用两个重要极限求极限.

(3) 利用等价无穷小替换求极限.

(4) 利用极限存在准则求极限.

(5) 利用左、右极限求极限或证明极限不存在.

(6) 利用函数的连续性求极限.

(7) 利用"洛必达法则"求极限.

((6)、(7) 的内容将在后面复习.)

二、例题分析

例 1 "对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$,总存在正整数 N,当 $n \geqslant N$ 时,恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$"是$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ 的(　　).

A. 充分但非必要条件　　B. 必要但非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分又非必要条件

分析:此题是 1999 年全国考研数学二的原题,考查对数列极限的定义的理解. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ 的定义是"对任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$,总存在正整数 N_1,当 $n > N_1$ 时,恒有 $|x_n - a| < \varepsilon_1$". 两种说法相比较,似乎定义中的条件更强些,显然,由$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ 的定义必能推出"对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$,总存在正整数 N,当 $n > N$ 时,恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$". 但是其逆也是正确的. 因为对任意 $\varepsilon_1 > 0$,取 $\varepsilon = \min\left(\dfrac{\varepsilon_1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$,显然 $\varepsilon \in (0,1)$,所以总存在正整数 N,当 $n \geqslant N$ 时,恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$,现取 $N_1 = N - 1$,于是当 $n > N_1$ 时,恒有$|x_n - a| \leqslant \dfrac{2\varepsilon_1}{3} < \varepsilon_1$. 所以以上两种说法是等价的,即选项 C 是正确的.

解:应选 C.

例 2　若 ε 为任意给定的正数,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的充要条件为(　　).

A. $U(a,\varepsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$ 的全部点

B. $U(a,\varepsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$ 的无穷多个点

C. $U(a,\varepsilon)$ 之外至多有 $\{x_n\}$ 的有限个点

D. $U(a,\varepsilon)$ 之外可能有 $\{x_n\}$ 的无穷多个点

分析:由于"$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$"的精确含义是"对任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 N,当 $n>N$ 时,恒有 $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$",所以,在 $U(a,\varepsilon)$ 内不一定有 $\{x_n\}$ 的全部点,只含有满足 $n>N$ 的 x_n,所以 A 不对. 而 B"$U(a,\varepsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$ 的无穷多个点"只能保证在某 N 之后的无穷多项 x_n 在 $U(a,\varepsilon)$ 内,而不能保证 N 之后的一切 x_n 都在 $U(a,\varepsilon)$ 内,故 B 也不对. C"$U(a,\varepsilon)$ 之外至多有 $\{x_n\}$ 的有限项"能保证存在 N,当 $n>N$ 时的 x_n 都在 $U(a,\varepsilon)$ 内,所以,C 与"$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$"是可以互相推出的. 易知 D 项也不对.

解:应选 C.

例 3　设对任意的 x,总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且$\lim\limits_{x\to\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$,则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　　).

A. 存在且等于零　　　　B. 存在但不一定为零

C. 一定不存在　　　　D. 不一定存在

分析:此题是 2000 年全国考研数学三的原题. 有的同学认为由条件"$\lim\limits_{x\to\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$"则可得出"$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$"但它们不一定为零,故错选为 B. 事实上,由条件"$\lim\limits_{x\to\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$"不一定能保证$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$,$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$ 的存在,例如若取 $g(x)=e^x+e^{-x}$,$\varphi(x)=e^x-e^{-x}$,则$\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$,但$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ 都不存在. 这样,可以想像,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 也不一定存在了. 例如取 $f(x)=e^x$,则 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且$\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$,但$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x$ 不存在.

解:应选 D.

例 4　设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ 均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有(　　).

A. $a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　　　B. $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

C. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　　　D. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

分析:由于极限值的大小只能反映当 $n\to\infty$ 时的数列的变化趋势,不能反映前面有限项的取值情况. 所以,A、B 选项都是不正确的. 由极限运算法则知 C 选项也不正确. 由无穷大的定义易知$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=\infty$,所以,D 选项正确.

解:应选 D.

例 5　设 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & n \text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{n}, & n \text{ 为偶数},\end{cases}$　则当 $n\to\infty$ 时,x_n 为(　　).

A. 无穷大量　　　　B. 无穷小量

C. 有界变量　　　　D. 无界变量

分析：当 n 为奇数时，$x_n \to \infty$.

n 为偶数时，$x_n \to 0$.

所以，x_n 既不是无穷大量，也不是无穷小量. 由于 $x_n \to \infty$（n 为奇数），所以 x_n 不是有界变量而是无界变量，故 D 选项正确.

解：应选 D.

例 6　设 $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$，则 $f(x)$（　　）.

A. $x \to \infty$ 时是无穷大量　　　　B. $x \to \infty$ 时是无穷小量

C. $x \to 0$ 时是无界变量　　　　D. $x \to 0$ 时是无穷小量

分析：由于 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$，所以 A、B 选项均不对.

又由于 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$，所以 D 正确而 C 不正确.

解：应选 D.

例 7　若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$，则必有（　　）.

A. $f(x_0) = A$

B. $f(x_0)$ 存在但不一定为 A

C. 存在邻域 $U^0(x_0,\delta)$，使 $f(x)$ 在其中有界

D. 对任何邻域 $U^0(x_0,\delta)$，$f(x)$ 在其中有界

分析：由极限的定义知"$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$"的精确含义是"对任何给定 $\varepsilon > 0$，存在 $U^0(x_0,\delta)$，使得 $x \in U^0(x_0,\delta)$ 时，$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$"，易知 C 正确. 而 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 与 $f(x_0)$ 的存在是无关的，故 A、B 不正确. 由极限的定义可知"$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$"只能保证 $f(x)$ 在 x_0 的附近有界，故要求 $U^0(x_0,\delta)$ 中的 δ 较小，不能保证在任何的 $U^0(x_0,\delta)$ 内 $f(x)$ 有界，所以 D 也不对.

解：应选 C.

例 8　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!}$.

分析：这是一个 n 项求和求极限的问题. 对这类问题首先应考虑是否这个和式能够求和，即用一个单项表示. 此时，所谓的"拆项法"是经常用到的，即将和式"$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$"写成"$\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1})$"的形式，再展开求和时就会有许多项"抵消"，剩下一个单项形式. 然后再求极限.

解：$\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}\right)$

$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=1.$

例 9 设 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$ ________.

分析：此题是 1999 年全国考研数学四的原题. 此题考查的是对数函数性质，以及数列极限的求法，利用对数性质运算.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln f(1)\cdots f(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\ln f(i)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\ln a^i=\lim_{n\to\infty}\ln a\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln a\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{\ln a}{2}.$$

解：应填 $\frac{1}{2}\ln a$.

例 10 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)$.

分析：此式中含有“$\infty-\infty$”的因子，不好判断其极限值，而且该因子含根号，常用的处理方法是分子分母同乘一个共轭根式来变形.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{\sqrt{x^2-4}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+1}=-2,$$

例 11 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x\sin^2x}$.

分析：这是一个“$\frac{0}{0}$”型的极限，分母上可用等价无穷小替换为 x^3，但分子上是两个等价无穷小 $\tan x$ 与 $\sin x$，它们都与 x 等价但是不能都替换为 x，因为在加、减运算中不能用等价无穷小替换. 可以将分子也写成无穷小之积的形式，为此，将 $\tan x$ 提到括号外来.

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x\sin^2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

注：这里用到了 $\tan x\sim x,1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}(x\to0)$.

常用的等价无穷小还有：$\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x,(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$，等.

例 12 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\sin x}$，