非线性动力学丛书 11

可激励系统分析的数学理论

张锁春 著

科学出版社
www.sciencep.com

非线性动力学丛书 11

可激励系统分析的数学理论

张锁春 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是第一部致力于“可激励系统”理论分析的专著，全书分两篇，共12章. 上篇是激励介质系统，介绍了激励介质的一般知识，定性和定量地刻画了各种波型解，如行波、平面波、脉冲波、波链、螺旋波、靶型波、V型波、涡卷波、涡环波，并讨论了它们的存在性、唯一性、稳定性等. 对组织中心的运动规律也进行了定性和定量的刻画. 下篇为可激励的常微分方程(ODE)系统，定性地分析了单个 Oregonator 的动力学，讨论了耦合 Oregonator 的同相波、反相波的性质以及论证了 Tyson 分歧图猜想. 此外，还介绍了可激励系统的噪声激励机制及相关现象，如随机共振、随机频率锁相等.

本书可作为高等院校学习常微分、偏微分方程的高年级学生、研究生和进修教师的专用教材，也可作为与激励介质系统研究相关的振荡介质、双稳介质等领域的科研人员的一本富有启迪和借鉴性的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

可激励系统分析的数学理论/张锁春著. —北京：科学出版社，2010
(非线性动力学丛书；11)
ISBN 978-7-03-026257-8

Ⅰ. 可… Ⅱ. 张… Ⅲ. 非线性振动理论-研究 Ⅳ. O322

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 233939 号

责任编辑：陈玉琢　房　阳／责任校对：刘亚琦
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2010 年 1 月第　一　版　开本：B5(720 × 1000)
2010 年 1 月第一次印刷　印张：15 3/4
印数：1—2 500　字数：299 000

定价：48.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

《非线性动力学丛书》序

真实的动力系统几乎都含有各种各样的非线性因素，诸如机械系统中的间隙、干摩擦，结构系统中的材料弹塑性、构件大变形，控制系统中的元器件饱和特性、变结构控制策略等等. 实践中，人们经常试图用线性模型来替代实际的非线性系统，以求方便地获得其动力学行为的某种逼近. 然而，被忽略的非线性因素常常会在分析和计算中引起无法接受的误差，使得线性逼近成为一场徒劳. 特别对于系统的长时间历程动力学问题，有时即使略去很微弱的非线性因素，也会在分析和计算中出现本质性的错误.

因此，人们很早就开始关注非线性系统的动力学问题. 早期研究可追溯到1673年 Huygens 对单摆大幅摆动非等时性的观察. 从 19 世纪末起，Poincaré、Lyapunov、Birkhoff、Andronov、Arnold 和 Smale 等数学家和力学家相继对非线性动力系统的理论进行了奠基性研究，Duffing、van der Pol、Lorenz、Ueda 等物理学家和工程师则在实验和数值模拟中获得了许多启示性发现. 他们的杰出贡献相辅相成，形成了分岔、混沌、分形的理论框架，使非线性动力学在 20 世纪 70 年代成为一门重要的前沿学科，并促进了非线性科学的形成和发展.

近 20 年来，非线性动力学在理论和应用两个方面均取得了很大进展. 这促使越来越多的学者基于非线性动力学观点来思考问题，采用非线性动力学理论和方法，对工程科学、生命科学、社会科学等领域中的非线性系统建立数学模型，预测其长期的动力学行为，揭示内在的规律性，提出改善系统品质的控制策略. 一系列成功的实践使人们认识到：许多过去无法解决的难题源于系统的非线性，而解决难题的关键在于对问题所呈现的分岔、混沌、分形、弧立子等复杂非线性动力学现象具有正确的认识和理解.

近年来，非线性动力学理论和方法正从低维向高维乃至无穷维发展. 伴随着计算机代数、数值模拟和图形技术的进步，非线性动力学所处理的问题规模和难度不断提高. 已逐步接近一些实际系统. 在工程科学界，以往研究人员对于非线性问题绕道而行的现象正在发生变化. 人们不仅力求深入分析非线性对系统动力学的影响，使系统和产品的动态设计、加工、运行与控制满足日益提高的运行速度和精度需求；而且开始探索利用分岔、混沌等非线性现象造福人类.

在这样的背景下，有必要组织在工程科学、生命科学、社会科学等领域中从事非线性动力学研究的学者撰写一套非线性动力学丛书，着重介绍近几年来非线性动力学理论和方法在上述领域的一些研究进展，特别是我国学者的研究成果，为从事非线性动力学理论及应用研究的人员，包括硕士研究生和博士研究生等，提供最新的理论、方法及应用范例. 在科学出版社的大力支持下，组织了这套《非线性动力学丛书》.

本套丛书在选题和内容上有别于郝柏林先生主编的《非线性科学丛书》(上海教育出版社出版)，它更加侧重于对工程科学、生命科学、社会科学等领域中的非线性动力学问题进行建模、理论分析、计算和实验. 与国外的同类丛书相比，它更具有整体的出版思想，每分册阐述一个主题，互不重复等特点. 丛书的选题主要来自我国学者在国家自然科学基金等资助下取得的研究成果，有些研究成果已被国内外学者广泛引用或应用于工程和社会实践，还有一些选题取自作者多年的教学成果.

希望作者、读者、丛书编委会和科学出版社共同努力，使这套丛书取得成功.

胡海岩

2001 年 8 月

前　言

可激励系统是指一类开放系统，由于局部动力学过程和扩散输运的相互作用，会产生形形色色的图案构形，或受外部噪声等因素的驱动，其原潜在的运动状态可以被恢复. 这是在物理、化学、生物等非平衡系统中普遍存在的现象.

属前一类引人注目的开创性工作是曾获得 1963 年度诺贝尔生理医学奖的 Hodgkin 和他的学生 Huxley 在研究乌贼巨神经轴突中发现的神经纤维的脉冲 (有人称它为神经孤子) 传播，以及曾获得 1980 年度列宁奖金的 Belousov 和 Krinsky 等的 Belousov-Zhabotinsky 化学反应实验所触发的化学波, 这一类系统通常称为“激励介质”, 它们在数学上都可用一类反应–扩散方程来描述. 20 世纪 90 年代以来，在实验、计算、解析和拓扑等方面的研究都取得了可喜的进展, 其中, 理论研究在国外有两种学派, 一是以美国的 Winfree, Keener 和 Tyson 等为主的奇异摄动理论 (singular perturbation theory, SPT) 学派, 二是以前苏联的 Zykov, Krinsky 等为主的运动学逼近理论 (kinematic approach theory, KAT) 学派. 在中国, 以我们自己的系统研究为主, 继承和发扬了美国 SPT 学派的思想, 本书很大一部分内容就是我们迄今为止的研究成果的总结. 当今国际上这一领域的研究相当活跃，每年在 *Physical Review Letter*, *Physica D*, *Physical Review E*, *Physical Letter A* 等有关非线性刊物上都有大量的新成果发表. 在这一领域中, 许多问题的研究不仅对数学工作者提出了严重的挑战，而且对当今威胁人类死亡的心脏猝死、脑癫痫病和引进“激励机制”的市场经济等都有直接的指导意义, 也对超导研究和 DNA 双螺旋结构有看好的应用前景.

属后一类系统的研究问题主要是当前非常热门的随机共振现象. 在数学上, 相应的系统可用随机微分方程来描述. 研究工作的代表人物是 Gammaitoni, Hanggi, Jung 和 Pikovsky 等. 目前，这一领域的研究工作还处于初级阶段，理论体系还很不完善. 为内容的完备性起见，本书将扼要地介绍这方面的最新研究成果和研究方法.

这两类系统既有共同性, 也有差别, 其差别主要表现在激励的机制不同. 假如不考虑媒介因素或外部因素, 那么这两类系统在数学上都归结为一类常微分方程 (ODE). 需特别指出, 对激励介质而言, 相应的 ODE 系统的动力学行为密切相关于激励介质的非线性波型图案 (wave pattern). 因此, 搞清楚相应的 ODE 系统的动力学行为是基础.

本书是以可激励系统的 Oregonator 模型为主线, 从应用数学的观点提出了一

套有我们自己特色的、可应用于研究一般可激励系统, 甚至是某些 ODE 系统的数学方法和数学理论, 我们力求做到既有一般理论又有具体分析, 既注重方法论又体现具体技巧. 全书以周天寿的博士学位论文“激励介质中非线性波型动力学的研究”(曾荣获 2003 年度全国优秀博士论文奖) 和张子范的博士后研究工作报告“耦合俄勒冈振子分岔图的研究”为基调, 吸纳研究团队其他成员的系列成果编写而成. 为了保护知识产权和尊重每位成员付出的劳动, 故在本书的每一章最后特附有小注, 注明其内容主要取自何处, 以体现公正.

全书分两篇, 共 12 章, 上篇为激励介质系统, 介绍激励介质的一般知识, 定性和定量地刻画各种波型解, 如行波、平面波、脉冲波、波链、螺旋波、靶型波、V 型波、涡卷波、涡环波, 并讨论它们的存在性、唯一性、稳定性等. 对组织中心的运动规律也进行了定性和定量刻画, 其中, 第 1 章重点介绍关于激励介质的研究在实验和数值模拟方面的结果以及激励介质的理论模型; 第 2 章介绍 BZ 反应与 Oregonator 的由来; 第 3 章介绍激励介质研究的两大学派 (前苏联学派和美国学派) 的理论基础知识; 第 4~6 章分别介绍一、二、三维非线性波, 重点介绍各种波的定性和定量刻画, 以及它们的存在性和稳定性等. 下篇为可激励的 ODE 系统, 定性分析单个 Oregonator 的动力学, 讨论耦合 Oregonator 的同相波、反相波的性质以及论证 Tyson 分歧图猜想. 此外, 介绍可激励系统的噪声激励机制及相关现象, 如随机共振、随机频率锁相等, 其中, 第 7 章和第 8 章分别是二维和三维 Oregonator 的定性分析; 第 9 章是耦合 Oregonator 的定性分析; 第 10 章介绍耦合振子的 Echo 波存在性的各种证明方法; 第 11 章论证 Tyson 于 1979 年提出的关于耦合 Oregonator 分歧图的一个猜想; 第 12 章是随机共振方面的研究结果的介绍.

本书也是国家自然科学基金项目“激励介质的数学问题 —— 波型图斑理论”(基金号: 10171099, 2002.1~2004.12) 研究的基本总结, 故对国家自然科学基金委员会的大力支持表示衷心的感谢! 尤其对周天寿博士对本书的初稿所作的修改、加工、补充和定稿表示衷心的感谢! 同时, 对于永光博士在整理本书的过程中付出的辛劳表示感谢!

由于时间仓促, 水平有限, 不当之处在所难免, 敬请同行和广大读者批评指正, 不吝赐教.

作　者

2009 年 5 月

目　　录

下篇　可激励的 ODE 系统

上篇　激励介质系统

第 1 章　激 励 介 质

1.1　什么是激励介质

首先要问什么是激励介质 (excitable medium, EM). 简言之就是具有“可激励性”的介质叫激励介质. 自然要进一步发问,“可激励性”又是什么? 在正式解释前先说明一下, 它所对应的英文单词是“excitability”. 这个词在不同的学科里有不同的译法: 物理学中叫可激发性, 医学中叫兴奋性、敏感性, 生理学中叫刺激反应性. 这里所指的“可激励性”是当介质受到小扰动时, 介质很快恢复到平衡态 (静态); 但当扰动超过某一阈值时, 介质将有一个快速又陡峭的响应, 呈现激发状态, 然后进入对外界刺激抵制的不应期, 最后又回归到局部静息状态, 而此局部区域的激励又是相邻区域的有限扰动源, 故相邻区域同样会经历静息–激发–不应–静息的变化过程.

举一个直观的例子. 人入睡时有一个“睡眠点”(对应于激励点或刺激点), 在入睡之前, 人处于“休眠”范围 (quiescent range), 它对外界弱的干扰不很敏感; 但当外界的干扰较强时, 人不能入睡, 进入兴奋态 (激励区域); 持续一段时间后, 人进入对外界干扰的不应期; 由于疲倦, 人又会回到休眠态. 具有上述性质的系统称为具有“可激励性”, 其反应介质称为“激励介质”. 因此, 可激励系统简言之就是系统潜在的运动特性可被外界因素 (如扩散或噪声的驱动) 所激励.

激励性和扩散性相耦合会导致波的传播现象. 在激励介质中传播的波一般称为触发波 (striking wave), 因为扩散具有触发效应. 故激励介质不同于经典波的传播介质, 前者的每个体积元都有它自己的功率源 (刺激或扰动), 由扩散耦合的相邻元间相互作用能产生激励的行波, 故可以把波从原始点传播得很远而不丧失其强度. Winfree 曾把这种现象形象地比喻为草原上的火灾, 可激励介质如同草地, 草根是地面上提供可易燃的火种 (tinder), 每当它点燃时会加燃并使之火灾蔓延.

这种触发波具有普适的物理特性: 两波对撞湮灭、高频占领效应、临界区域限制、传播波的色散关系、波前曲率效应、波尖漫游和涡环运动等, 与经典波唯一相同点是它们都具有衍射性质.

激励介质不同于双稳介质. 在双稳介质中, 每个小的孤立单元都有两个静息态, 它们均在小扰动下保持稳定, 然而大的扰动可能会激发这两种稳定态间的跃迁. 在连续的双稳介质中, 可以观察到从一种静息态转迁到另一种静息态的激发波 (triggering wave). 另一方面, 双稳介质和激励介质之间有着密切的联系. 事实上,

可以通过引进储存双稳介质中激发波的初始状态的机制, 把双稳介质转变成激励介质.

激励介质也不同于振荡介质. 振荡介质可以认为由展示为极限环振动的单元所构成. 假如考虑由这种单元所组成的链, 并记录两个相邻单元间的振动, 那么会观察到依赖于时间的活动图案, 这种图案看起来像是正在传播的波.

由于三种介质中反应项的不同, 使得它们展示出来的波型也不同. 在双稳介质中, 由于介质的每个单元都可能实现从一个静息态到另一个静息态的跃迁, 因此, 只能出现激发波, 而且激发波的速度唯一地由双稳介质决定. 然而振荡介质可以认为是大批相互作用很弱的自组织单元的连续极限形式, 因此, 尽管可出现较复杂的波型结构 (包括 Turing 结构), 但属于耗散结构的范畴. 由于单元间的弱作用不能显著地改变各单元振荡的振幅和波形, 因此, 这种弱作用只能体现在单元振动的相变上, 而且相动力行为唯一地决定介质的波型.

相对于双稳介质和振荡介质中的波型, 激励介质中的波型就丰富得多. 由于激励介质中的一个触发波在传播之后, 又会返回到它的初始状态, 因此, 一个波的传播可通过同一区域一次接一次地穿过许多次. 这种性质极大地扩充了波型图案的多样性. 假如传播的波被打破, 波尖能够迅速地扩张 (spreading), 同时可卷曲 (curling), 这样就会出现螺旋状的波, 而稳定的旋转波的形状及旋转频率唯一地由介质的性质决定. 螺旋波仅在和介质的边界或和另一个反方向的正在旋转的螺旋波发生碰撞时才会消失. 当介质的性质在时间和空间上改变时, 螺旋波的中心并不固定在同一位置上, 相反地会沿着某一方向漂游, 或展示出更为复杂的漂游运动. 在三维情形, 激励介质中的波能够产生复杂的涡团图案, 如简单或扭曲的涡卷、环或结等. 这些三维图案通过介质运动, 拥有复杂的内部动力学.

激励介质之所以引起了众多的物理学家、化学家、生物家和数学工作者的广泛注意, 是因为它的非线性波型的传播在科学上是十分重要的, 在应用上也是很有前途的, 遍及电学、光学、生物、化学、天体及材料科学等诸多领域. 例如, 在半导体、铁磁材料和超导材料等固态活性媒介中可以发现此种非线性激励波, 甚至有人设想利用固态微电子激励介质中的非线性波型动力学去开发超速和特效的新型数据处理系统. 在生命科学中, 这种激励波在功能调节、信息传递和病理过程等方向具有基本意义. 又如, 心脏猝死. 在美国, 每年都有数十万人死于此. 在心脏猝死病理中最具威协性的是心脏纤维颤动, 因为经死后解剖, 发现往往死者生前心脏是正常的、健康的, 没有任何预兆. 现在激励介质中的激励波的传播理论可为此提供一可行的机理, 甚至藉此从根本上发展一种控制和消除这种纤维颤动的技术.

较长时间以来, Belousov-Zhabotinsky(BZ) 实验所观察的是由触发 (striking) 所支持的行波型 (travelling wave pattern), 它类似于电脉冲 (pulse) 沿着可激励 (兴奋) 薄膜的传播. 这两种现象之间的关系真正被认识到是在 Hodgkin 和 Huxley(HH) 关

于神经传导以及 Field 和 Noyes 关于 BZ 反应机制的研究之后, 通过基于 HH 工作基础上的 FHN(FitzHugh-Nagumo) 模型的神经传导研究和基于 FKN 机制上的 Oregonator 模型的反应扩散研究后才发现的. 事实上, 这两类现象都属于同一类型的反应扩散系统, 即所谓的"激励介质系统", 或称为"非振荡 (non-oscillation) 介质系统", 从此开辟了激励介质系统中波型 (wave pattern) 研究的一个崭新领域.

关于激励介质的研究, 前苏联科学家起步较早, 他们建立了一套较完整的运动动力学理论体系. 1980 年, Belousov 和 Krinsky 由于在"激励介质中非线性波动力学"这个领域的创造性工作而荣获列宁奖. 美国自 20 世纪 70 年代开始, 一批科学家, 如 Winfree, Keener, Tyson 等, 也致力于这方面的研究, 他们的研究重点是三维激励介质, 目前他们已在这方面处于领先地位.

1.2 理论模型

数学上, 激励介质、双稳介质和振荡介质均可用反应扩散方程来描述. 取介质中 N 个相互作用的单元, 它们组成一个网 (网被定义为单元之间的联结). 用 $O(k)$ 表示单元 k 最邻近单元的集合, 即假如 $k' \in O(k)$, 则 k' 是 k 的一个邻居. 一般地, 网中的每个单元在时序上, 后一状态由它的前一状态及它的邻居来决定, 即

$$a_k^{(n+1)} = G(a_k^{(n)}, a_{k'}^{(n)}), \tag{1.1}$$

其中, $k' \in O(k)$, n 为时间状态.

先假定单元间的相互作用是局部的, 并且每个单元的空间变化是慢的, 则每个单元都满足

$$\dot{a}_k = W(a_k, \mathrm{grad}(a_k), \Delta a_k) \approx g(a_k) + A\mathrm{grad}(a_k) + B|\mathrm{grad}(a_k)|^2 + D_k\Delta a_k, \tag{1.2}$$

其中, a_k 上面的点表示它关于时间 t 的导数 (下同), grad 为梯度算符, Δ 为 Laplacian 算符. 由于介质是各向同向的, 因此, 每个单元的传播方程对坐标系的旋转和反射应保持不变, 故式 (1.2) 中的第二项不会出现.

其次, 对 N 个相互作用的单元, 类似地可得

$$\dot{a}_i = g_i(a_1, a_2, \cdots, a_N) + \sum_{j=1}^{N} B_{ij}|\mathrm{grad}(a_j)|^2 + \sum_{j=1}^{N} D_{ij}\Delta a_j, \tag{1.3}$$

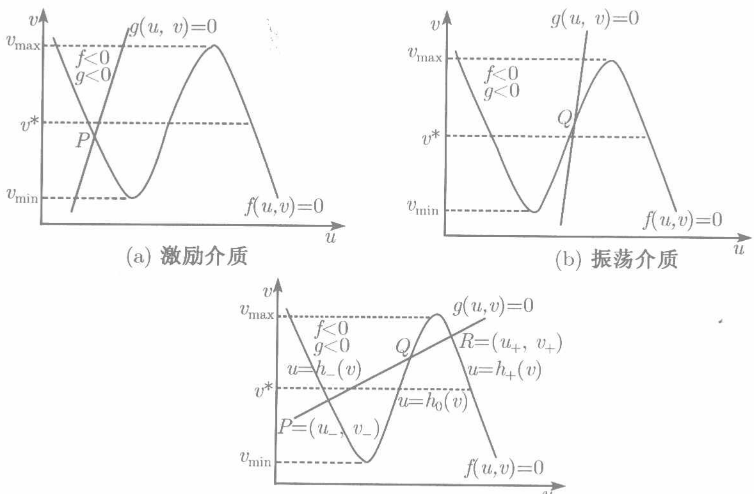
其中, $i = 1, 2, \cdots, N$, $a_i = a_i(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{r}$ 为坐标向量. 若不考虑梯度的效应, 并假定 $D_{ij} = D_i\delta_{ij}$, 则式 (1.3) 变为

$$\dot{a}_i = g_i(a_1, a_2, \cdots, a_N) + D_i\Delta a_i, \quad i = 1, 2, \cdots, N. \tag{1.4}$$

式 (1.4) 即为规范的反应扩散方程模型, 它既可描述微观运动, 也可看成宏观模型. 最常见的情形是 $N=2$, 此时的模型可写成如下形式:

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{\tau_u} f(u,v) + D_u \Delta u, \\ v_t = \dfrac{1}{\tau_v} g(u,v) + D_v \Delta v. \end{cases} \tag{1.5}$$

考虑零倾线 $f(u,v)=0$ 及 $g(u,v)=0$. 图 1.1 直观地显示出 uv 平面上, 上面三种介质所对应的动力项 (即反应项)f 和 g 的不同.



(a) 激励介质　(b) 振荡介质　(c) 双稳介质

图 1.1 f 和 g 的基本形式

图 1.1 中, 记号 τ_u 和 τ_v 分别是变量 u 和 v 相关的时间尺度, D_u 和 D_v 分别是相应的扩散系数. 假定 $\tau_u \ll \tau_v$ 且令 $\varepsilon = \tau_u/\tau_v \ll 1$, 此时 u 为快变量, 也称"触发"变量或"激励"变量, v 为慢变量, 或称"恢复 (recovery)"变量. Fife(1984) 称 u 为"传播器"(propagator), 因为 u 的自催化产生和扩散作用引起波阵面在介质中的传播; 称 v 为"控制器"(controller), 因为 v 的水准 (level) 控制波的速度和传播方向. 因此, Fife 把激励介质简称为 PC 系统. 在形态学中, 称 u 为"激活"(activator) 变量, 称 v 为"抑制"(inhibitor) 变量.

典型的激励介质要求函数 $f(u,v)$ 和 $g(u,v)$ 具有下列性质:

(1) u 零等倾线 (null-cline): $f(u,v)=0$ 是 N 形状或倒 S 形状或三次形 (cubic-shaped) 曲线; v 零等倾线: $g(u,v)=0$ 是单调的. 它们的相交点在 u 零等倾线的左分支上 (图 1.1(a)). 从 $f(u,v)=0$ 中解出 u 作为 v 的函数时有三个解分支, 分别表示 $u=h_-(v)$, $u=h_0(v)$ 和 $u=h_+(v)$, 分别定义在 $v \geqslant v_{\min}, v_{\min} \leqslant v \leqslant v_{\max}$ 和