21世纪高等院校教材

弹性动力学简明教程

张伯军 刘 财 冯 晅
王 典 刘 洋 编著

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

弹性动力学简明教程

张伯军　刘　财　冯　晅
王　典　刘　洋　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

弹性动力学是理论物理学的重要分支学科之一，其任务是在力学实验定律的基础上，进一步引进数学方法来研究弹性物体受力与变形间的静、动态关系问题，被广泛应用于地震勘探、建筑工程、海洋勘测以及爆破技术等众多领域，成为某些新学科的支撑点.

本书共9章，系统地阐述了应力分析、应变分析、应力与应变的关系以及弹性波动方程、弹性波的传播、弹性波的激发等重要基础理论，并对地震中经常遇到的主应力、主应变、平面波、球面波、柱面波、瑞利波、洛夫波等给予了特殊的强调，同时介绍了上述理论的具体应用及有关前沿问题.

本书可用作高等院校地球物理学、地球探测与信息技术等专业本科生教材，也可供相关专业的科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

弹性动力学简明教程/张伯军等编著. —北京：科学出版社，2010.4

21世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-027025-2

Ⅰ.①弹… Ⅱ.①张… Ⅲ.①弹性动力学-高等学校-教材 Ⅳ.①O347

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第044903号

责任编辑：郭 森 / 责任校对：张怡君

责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏主印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年4月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2010年4月第一次印刷 印张：14 3/4

印数：1—2 000 字数：295 000

定价：35.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

弹性动力学是理论物理学的重要分支学科，其任务是在力学实验定律的基础上，进一步引进数学方法来研究弹性物体受力与变形间的静、动态关系问题，被广泛应用于地震勘探、建筑工程、海洋勘测以及爆破技术等众多领域，成为某些新学科的支撑点. 为了适应学科的发展和高等学校教学及科技人员的需要，特地编写此书，作为弹性动力学的基础教材，旨在深入地讨论弹性动力学的基本概念、原理和方法.

本书是以地球物理等专业的学生和科技人员为主要对象而编写的专业基础理论教材. 书中系统地阐述了应力分析、应变分析、应力和应变的关系以及弹性波动方程、弹性波的传播、弹性波的激发等重要基础理论，并对地震中经常遇到的主应力、主应变、平面波、球面波、柱面波、瑞利波、洛夫波等给予了特殊的强调，同时对上述理论的具体应用及有关前沿问题进行了必要的介绍. 限于课时及专业等原因，本书只对弹性动力学固体部分进行了讨论，未涉及其他部分.

本书采用近年来国内外参考书及有关文献中较为常用的哑指标规则，并对其作了较为详细的论述. 本书按照高等学校工科教学大纲的要求，内容介绍由浅入深，循序渐进，突出基本理论、基本概念与基本分析方法；使学生在有限的学时内，掌握基本知识；并在每章配有相应的讨论内容，以便学生自学和提高；每章末还配有相应的习题与参考答案，以加强学生对理论的理解和应用；书后还设有主要参考文献和附录.

本书是作者在总结多年教学、科研经验的基础上编写而成的，参考教学时数为 60 学时. 全书共 9 章，第 1、2、3、4 章由张伯军、刘财编写，第 5 章由冯晅、张伯军编写，第 6、7 章由刘财、刘洋、张伯军编写，第 8、9 章由刘财、王典、冯晅编写. 王世煜对全书的图稿进行了整理和绘制.

本书在编写构思和选材中，参考了书后所列文献的一些编写思想，采用了其中一些内容、例题和习题，在此向这些文献的作者表示诚挚的感谢！

由于作者水平有限，书中难免有不足之处，欢迎广大读者批评指正. 欢迎读者反馈宝贵意见和建议，交流教学体会和经验，以便使我们不断修正错误、汲取经验，使本书进一步完善和提高.

作　者

2010 年 3 月

目　　录

第1章

基础知识

本章主要叙述哑指标规则和材料力学中关于应力、应变的概念以及弹性力学的基本假设，为进一步学习奠定基础. 特别是哑指标规则，在以后的运算中会经常遇到，应该予以足够的重视.

1.1 哑指标和克罗内克符号

1.1.1 哑指标

在通常表达式中，习惯以 x、y、z 表示坐标轴，以 $\boldsymbol{A}$ 表示某一向量（一阶张量），以 $\boldsymbol{B}$ 表示二阶张量，以 $\sum$ 表示求和等.

若采用哑指标规则，则将以 $x_i(i=1,2,3)$表示坐标轴，以 $A_i(i=1,2,3)$表示向量 $\boldsymbol{A}$ 在 x_i 坐标轴上的 3 个分量，以 $B_{ji}(j,i=1,2,3)$表示二阶张量 $\boldsymbol{B}$ 在 x_i 坐标系中的 9 个分量，求和时省略求和符号 $\sum$，如以 $a_i x_i$ 表示 $\sum\limits_{i=1}^{3} a_i x_i$ 等.

由此可见，采用哑指标规则，就是用一些添加角标（指标）的符号，代替直接表明自身意义的符号. 这样的代换会给运算与书写带来方便.

按照上述对应关系，矢量式

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D} \tag{1.1}$$

可写成

$$C_i=A_j B_{ji}+D_i \tag{1.2}$$

由于式(1.1)的展开式为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C}&=C_1\boldsymbol{i}_1+C_2\boldsymbol{i}_2+C_3\boldsymbol{i}_3\\
&=(A_1\boldsymbol{i}_1+A_2\boldsymbol{i}_2+A_3\boldsymbol{i}_3)[B_{11}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1+B_{12}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2+B_{13}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_3+B_{21}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1+B_{22}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2\\
&\quad+B_{23}\boldsymbol{i}_3+B_{31}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1+B_{32}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2+B_{33}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3]+(D_1\boldsymbol{i}_1+D_2\boldsymbol{i}_2+D_3\boldsymbol{i}_3)\\
&=(A_1B_{11}+A_2B_{21}+A_3B_{31})\boldsymbol{i}_1+(A_1B_{12}+A_2B_{22}+A_3B_{32})\boldsymbol{i}_2\\
&\quad+(A_1B_{13}+A_2B_{23}+A_3B_{33})\boldsymbol{i}_3+(D_1\boldsymbol{i}_1+D_2\boldsymbol{i}_2+D_3\boldsymbol{i}_3)
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1B_{11} + A_2B_{21} + A_3B_{31} + D_1 \\ C_2 &= A_1B_{12} + A_2B_{22} + A_3B_{32} + D_2 \\ C_3 &= A_1B_{13} + A_2B_{23} + A_3B_{33} + D_3 \end{aligned} \tag{1.3}$$

而式(1.2)的意义应为

$$C_i = \sum_{j=1}^{3} A_j B_{ji} + D_i$$

将其展开,则得

$$\begin{aligned} C_1 &= \sum_{j=1}^{3} A_j B_{j1} + D_1 = A_1B_{11} + A_2B_{21} + A_3B_{31} + D_1 \\ C_2 &= A_1B_{12} + A_2B_{22} + A_3B_{32} + D_2 \\ C_3 &= A_1B_{13} + A_2B_{23} + A_3B_{33} + D_3 \end{aligned} \tag{1.4}$$

可见式(1.3)与式(1.4)完全一致,故 C_i 与 $\boldsymbol{C}$ 是同一矢量的不同表示形式.

对于式(1.2),如果将其改写为如下形式,即

$$C_i = A_k B_{kl} + D_i,\ l,k = 1,2,3 \tag{1.5}$$

则根据式(1.2)的展开过程可知,式(1.5)与式(1.2)完全相同,不同的只是 k、l 代换了 j、i.

至此,对哑指标规则可归纳如下:

(1) 表达式中某一项出现重复指标 [如式(1.2)中的 j],则意味着对该指标求和(从 1 到 3). 而对其他单独出现的指标 [如式(1.2)中的 i],则意味着可分别取 1、2、3.

(2) 同一等式中的不同项,单独出现的指标数目和符号必须相同 [如式(1.2)中的每一项单独出现的指标都只有一个,并且符号都是 i].

(3) 同一等式中的某项出现的重复指标,将其都换记为别的符号,并不影响结果 [如式(1.5)中 k 代换式(1.2)中的 j].

(4) 同一等式中所有项内单独出现的某一指标,都换记为别的符号,并不影响结果 [如式(1.5)中的 l 代换式(1.2)中的 i].

例 1-1　试按哑指标规则展开下列各式:

(1) $\varepsilon = e_{ji} n_j n_i$;

(2) $\dfrac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$.

解　(1) 从式中可以看出,等式右端的指标 j 和 i 都为重复出现的指标. 根据哑指标规则可知,应对 j 和 i 分别从 1 到 3 求和. 为清楚起见,先对 j 求和,将 i 视为不变,有

$$\varepsilon = e_{1i} n_1 n_i + e_{2i} n_2 n_i + e_{3i} n_3 n_i$$

再将 i 从 1 到 3 求和,得

$$\varepsilon=e_{11}n_1n_1+e_{12}n_1n_2+e_{13}n_1n_3+e_{21}n_2n_1+e_{22}n_2n_2 \\ +e_{23}n_2n_3+e_{31}n_3n_1+e_{32}n_3n_2+e_{33}n_3n_3$$

如果求和式中存在 3 个或更多个重复指标(如 $\varepsilon=e_{ji}n_{ik}n_{kj}$ 等)时,则依旧按上述规律,逐一对重复指标求和即可.

(2) 从式中可以看出,等式左端的第一项有重复指标 j,其他各项均有单独指标 i,根据哑指标规则可知,对 j 应从 1 到 3 求和,对 i 分别取 1、2、3. 如此,当 i 取 1 时,有

$$\frac{\partial\sigma_{j1}}{\partial x_j}+\rho f_1=\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

再对 j 求和,得

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}+\rho f_1=\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

同理,当 $i=2$ 时,有

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}+\rho f_2=\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

当 $i=3$ 时,有

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+\rho f_3=\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

由此可知,表达式中的某一项,只要存在重复指标,则无论该项是乘式形式还是除式形式,是代数形式还是微分形式,都应予以求和. 对表达式中出现的单独指标,则应分别取 1、2、3.

1.1.2　克罗内克符号 $\boldsymbol{\delta_{ji}}$

如果用二阶张量 δ_{ji} 表示一特殊形式的二阶张量即二阶单位张量,则根据二阶张量 δ_{ji} 的矩阵表示

$$\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{21} & \delta_{31}\\ \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{32}\\ \delta_{13} & \delta_{23} & \delta_{33}\end{bmatrix} \tag{1.6}$$

和二阶单位张量的矩阵表示

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.7}$$

知

$$\delta_{ji}=\begin{cases}1, & 当\ i=j\ 时\\ 0, & 当\ i\neq j\ 时\end{cases} \tag{1.8}$$

此式即克罗内克(Kronecker)符号的定义式. 根据此定义知,δ_{ji}的矩阵表示式具有与任意矩阵相乘时得原矩阵的性质(参线性代数). 正是这样的性质,决定了 δ_{ji} 在运算过程中的特殊性.

首先,使 δ_{ji} 作用于任意矢量 A_i 上,成为 $\delta_{ji}A_i$. 根据哑指标规则,i 为重复指标,故应有

$$\delta_{ji}A_i=\delta_{j1}A_1+\delta_{j2}A_2+\delta_{j3}A_3$$

当 $j=1$ 时,有

$$\delta_{1i}A_i=\delta_{11}A_1+\delta_{12}A_2+\delta_{13}A_3=A_1$$

同理 $j=2$ 时,有

$$\delta_{2i}A_i=A_2$$

当 $j=3$ 时,有

$$\delta_{3i}A_i=A_3$$

这与 $A_j(j=1,2,3)$完全一致. 因此可建立等式

$$\delta_{ji}A_i = A_j \tag{1.9}$$

其次,再使 δ_{ji} 作用于任意二阶张量 B_{ik} 上成为 $\delta_{ji}B_{ik}$,按哑指标规则,i 为重复指标,故应有

$$\delta_{ji}B_{ik}=\delta_{j1}B_{1k}+\delta_{j2}B_{2k}+\delta_{j3}B_{3k}$$

因为 $j\neq i$ 时,$\delta_{ji}=0$,因此,当 j 取 1 时,等式右端只有第一项不为零,且当 k 取 1、2、3 时,得 3 个分量 B_{11}、B_{12}、B_{13};而当 j 取 2 时,等式右端第二项不为零,对应 k 取 1、2、3,得 3 个分量 B_{21}、B_{22}、B_{23};同理,j 取 3 时,得 3 个分量 B_{31}、B_{32}、B_{33}. 这 9 个分量与二阶张量 B_{ik} 的 9 个分量完全一致. 因此,可建立如下关系式:

$$\delta_{ji}B_{ik} = B_{jk} \tag{1.10}$$

从式(1.9)与式(1.10)可以看出,二阶单位张量 δ_{ji}作用于任意阶张量时,只需将任意阶张量中与 δ_{ji}对应出现的重复指标用 δ_{ji} 内的另一单独指标替换而省略 δ_{ji} 即可. 比如,

$$\delta_{ji}B_{jl}=B_{il}$$
$$\delta_{ji}B_{iklm}=B_{jklm}$$
$$\delta_{ji}B_{ji}=B_{jj}=B_{ii} \quad \text{(缩并)}$$

等,反过来,如果见到 B_{jk},应该立即想到它可以写成 $\delta_{ji}B_{ik}$ 等.

1.1.3 缩环符号 $\boldsymbol{\delta_{klm}}$

为按哑指标规则进行矢量叉乘运算,引入一特殊的三阶张量 δ_{klm}(循环符号),使其为

$$\delta_{klm}=\begin{cases}0, & \text{当 } klm \text{ 有任意两个或三个相等时}\\ 1, & \text{当 } klm \text{ 为 } 123,231,312 \text{ 排列时}\\ -1, & \text{当 } klm \text{ 为 } 132,321,213 \text{ 排列时}\end{cases} \tag{1.11}$$

如 $\delta_{112}=\delta_{111}=\delta_{232}=\delta_{331}=0$，$\delta_{231}=1$，$\delta_{132}=-1$ 等. 为记忆方便，可将角标 1、2、3 分别标在圆周的对称位置上(图 1-1)，由图与定义式(1.11)可以看出，无论以 1、2、3 哪一个数字指标为起点，按其顺时循环排列(或称偶序)时，δ_{klm} 为 $+1$，逆时循环排列(或称奇序)时为 -1，出现重复数字指标排列时为 0.

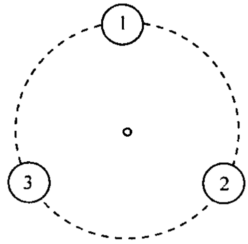

图 1-1

根据 δ_{klm} 的定义，可以证明矢量式

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$$

可以写成

$$A_k = \delta_{klm}B_lC_m \tag{1.12}$$

的形式，因为按哑指标规则，当式(1.12)中单独指标 k 取 1 时，有

$$\begin{aligned}A_1 &=\delta_{111}B_1C_1+\delta_{112}B_1C_2+\delta_{113}B_1C_3+\delta_{121}B_2C_1+\delta_{122}B_2C_2\\&\quad+\delta_{123}B_2C_3+\delta_{131}B_3C_1+\delta_{132}B_3C_2+\delta_{133}B_3C_3\\&=\delta_{123}B_2C_3+\delta_{132}B_3C_2\\&=B_2C_3-B_3C_2\end{aligned}$$

同理有

$$A_2=B_3C_1-B_1C_3$$
$$A_3=B_1C_2-B_2C_1$$

而对 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 按叉乘法则展开，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &=A_1\boldsymbol{i}_1+A_2\boldsymbol{i}_2+A_3\boldsymbol{i}_3\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}\\&=(B_2C_3-B_3C_2)\boldsymbol{i}_1+(B_3C_1-B_1C_3)\boldsymbol{i}_2+(B_1C_2-B_2C_1)\boldsymbol{i}_3\end{aligned}$$

式中，分量 A_1、A_2、A_3 与式(1.12)展开的结果完全相同.

1.1.4　微分符号

利用上述符号规则，微分算符∇ 的分量形式可以用$\dfrac{\partial}{\partial x_i}$来表示. 例如，对空间任意标量 Φ 求梯度，则由梯度的定义知

$$\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\boldsymbol{i}_1+\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\boldsymbol{i}_2+\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\boldsymbol{i}_3$$

如果将$\nabla\Phi$ 换记为$\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_i}$，当 i 取 1、2、3 时，有

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1},\frac{\partial\Phi}{\partial x_2},\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)$$

这 3 个值正是$\nabla\Phi$ 的 3 个分量. 由矢量合成与分解知，一个矢量的 3 个分量被确定，则这个矢量也被确定. 因此可以说$\nabla\Phi$ 与$\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_i}$是同一矢量的不同表示形式.

与此对应，对某一矢量场 $\boldsymbol{A}$ 求散度，则可将$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 写成$\dfrac{\partial A_i}{\partial x_i}$，因为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

与

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i}=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

完全一致.

对某一矢量场 $\boldsymbol{A}$ 求旋度时，$\nabla\times\boldsymbol{A}$ 的 3 个分量可以用 $\delta_{klm}\dfrac{\partial A_m}{\partial x_l}$表示，如当 $k=1$ 时，有

$$\delta_{klm}\frac{\partial A_m}{\partial x_l}=\delta_{1lm}\frac{\partial A_m}{\partial x_l}=\delta_{123}\frac{\partial A_3}{\partial x_2}+\delta_{132}\frac{\partial A_2}{\partial x_3}=\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}$$

同理

$$\delta_{2lm}\frac{\partial A_m}{\partial x_l}=\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}$$

$$\delta_{3lm}\frac{\partial A_m}{\partial x_l}=\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}$$

此结果与$\nabla\times\boldsymbol{A}$ 展开时的 3 个分量相同.

类似地，$\nabla^2\Phi$ 可记为

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi$$

$$\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V\quad\text{（高斯定理）}$$

可记为

$$\oint_S\boldsymbol{A}_i\cdot\boldsymbol{n}_i\mathrm{d}S=\int_V\frac{\partial A_i}{\partial x_i}\mathrm{d}V$$

$$\oint_l\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\quad\text{（斯托克斯定理）}$$

可记为

$$\oint_l A_k\mathrm{d}x_k=\int_S\delta_{klm}\frac{\partial A_m}{\partial x_l}n_k\mathrm{d}S$$

等. 值得注意的是，采用上述符号规则表达一个具有矢量性的结果时，它仅仅表达

了该矢量在 x_i 坐标轴上的分量值的大小. 当然,只要知道一个矢量在各坐标轴上的分量值,这个矢量即被确定.

1.2 应力的概念

为了从分子结合力的角度讨论应力的概念,给出分子与分子之间结合力的数学表达式,即

$$F(r) = \frac{a'}{r^{m+1}} - \frac{b'}{r^{n+1}} \tag{1.13}$$

式中,a'、b'、m、n($n>m$)为与材料有关的常数,r 为两个分子间的距离. $F(r)$随 r 变化的情形如图 1 - 2 所示.

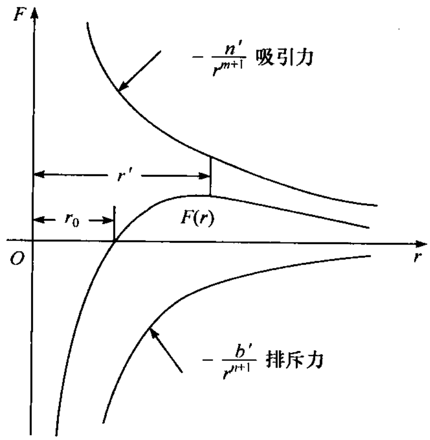

图 1 - 2

从图 1 - 2 中可以看出,构成宏观物体的分子与分子之间同时存在着吸引力与排斥力,当 $r=r_0$ 时,吸引力与排斥力相互抵消,分子处于平衡位置. 如果设想某宏观物体是由大量的处于平衡位置的分子所组成的,那么称宏观物体所处的状态为自然状态. 由式(1.13)知,自然状态的宏观物体也有内力作用,但此内力没有改变物体自身形态的能力,对外不显力的作用. 如果对此处于自然状态的物体施加外力,如某一方向施加拉力,则此拉力在物体内部的微观表现相当于各分子之间在这个方向上增加了排斥力,它将使分子之间的距离增大($r>r_0$),直到这个排斥力与分子间由于 $r>r_0$ 而产生的吸引力相等时为止;反之,如果物体受的是某一方向上的压力,则相当于物体内各分子之间在这个方向上增加了吸引力,它将使分子之间距离减小($r<r_0$),直至分子之间由于 $r<r_0$ 而产生的排斥力与此吸引力相等时为止. 这些由于 $r>r_0$ 或 $r<r_0$ 而产生的吸引力与排斥力都具有使物体恢复自然状态

的性质，它们直接反映了外力的作用效果. 所以称这种在外力作用下物体内部由于 $r>r_0$ 或 $r<r_0$ 而产生的力为附加内力.

有了附加内力的概念，再来看一个简单的受力情形. 设有一处在自然状态的矩形柱体，在两端施加拉力 F(图 1-3)，由于拉力的作用，柱体内将产生由 $r>r_0$ 而引起的附加内力. 如果在 M 处沿垂直于 x_1 轴(轴线)方向截取一正截面 ab 使柱体分成甲、乙两块，在截面两侧分别用力线表示质点间的相互作用，那么当外力 $F=0$ 时，由于甲乙两块各自平衡，故该截面上没有附加内力. 如果 $F\neq 0$，则从它们所处的新的平衡状态［图 1-3(b)］知，截面上应有一附加内力 F，它的方向与外力 F 相反. 把此附加内力 F 与所截取的截面面积(设为 A)的比值称为 M 点在该截面上的应力，以 σ_{11} 表示，其数学表示式为

$$\sigma_{11}=\frac{F}{A} \tag{1.14}$$

即应力为所取截面单位面积上的附加内力. σ_{11} 中的第一个角标表示所取截面的法线方向与 x_1 轴平行；第二个角标表示力的方向与 x_1 轴平行.

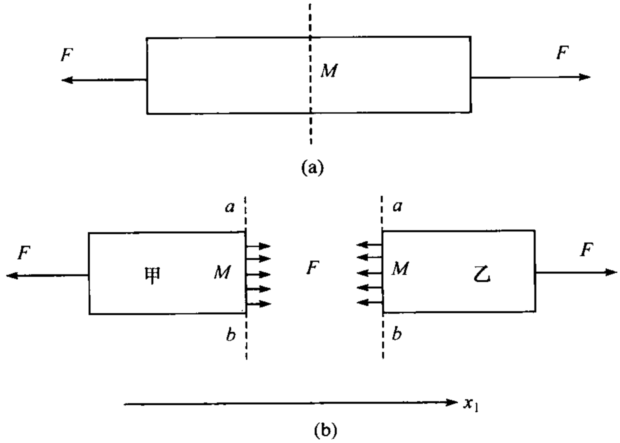

图 1-3

如果上述物体的受力情形不变，而改变截面的选取方向，使其法线方向 n 与 x_1 轴成 θ 角(图 1-4)，则斜截面 cd 的面积为 $A_n=A/\cos\theta$. 从甲乙两块柱体的平衡得知，作用在 cd 截面上的总附加内力仍然是 F，且平行于 x_1 轴. 根据应力的定义，cd 截面上的应力为

$$P_n=\frac{F}{A/\cos\theta}=\sigma_{11}\cos\theta \tag{1.15}$$

式中，$\sigma_{11}=F/A$ 表示正截面 ab 上的应力，P_n 表示法线方向为 $\boldsymbol{n}$ 的斜截面 cd 上的应力，其方向与截面上的合力 F 相同. 从式(1.15)可以看出，过 M 点选取不同的截

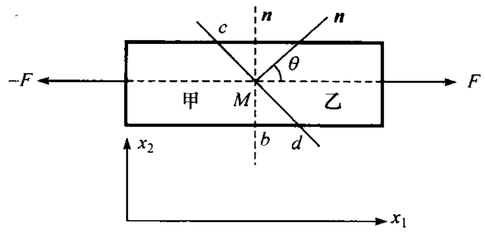

图 1 - 4

面，会得到不同的应力值. 随着 θ 的增长，应力值变小，当 $\theta=90°$时，$P_n=0$. 由此可见斜截面上的应力 P_n 不但与力 F 的大小有关，还与斜截面的方向有关. 因此，笼统地说"物体内某点的应力"其含义是不清的.

为了便于对某些具体问题进行力学分析，常把上述 P_n(也称总应力)分解为垂直于截面和平行于截面的两个分量. 由图 1 - 4 可知，垂直于截面即沿截面外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的分量为

$$\sigma_n = P_n\cos\theta = \sigma_{11}\cos^2\theta \tag{1.16}$$

σ_n 称为正应力分量. 平行于截面的分量为

$$\sigma_\tau = P_n\sin\theta = \sigma_{11}\cos\theta\sin\theta \tag{1.17}$$

σ_τ 称为剪应力分量(也称扭应力).

根据解析几何可知，图 1 - 4 中外法向单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦分别为

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i}_1) = \cos\theta \\ n_2 &= \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i}_2) = \sin\theta \end{aligned} \tag{1.18}$$

式中，$\boldsymbol{i}_1$、$\boldsymbol{i}_2$ 分别为 x_1、x_2 轴向上的单位矢量，将 n_1、n_2 代入正应力与剪应力的表示式中，得

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{11}n_1^2 \\ \sigma_\tau &= \sigma_{11}n_1n_2 \end{aligned} \tag{1.19}$$

这样代换是为了与后面所讲问题的表示相一致. 关于正应力与剪应力的正负号问题，做如下规定：正应力以拉应力为正；剪应力以使物体产生顺时针转动趋势的剪应力为正.

例 1 - 2 根据应力的定义求解一横截面积为 A，高为 h，上端受压力 P，在自重作用下的柱体各横截面上的应力(图 1 - 5). 已知材料的容重(单位体积内的质量)为$(\rho g/1000)\mathrm{kg/cm^3}$.

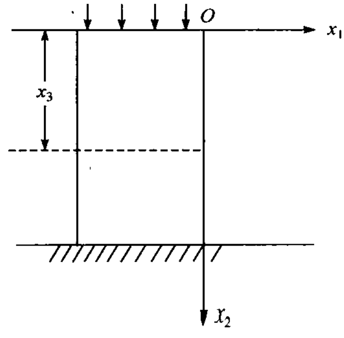

图 1 - 5

解 选如图 1 - 5 所示的坐标系，取任一横截面距顶端的距离为 x_3，则在 x_3 处的横截面上所受

合力 F_3 应为

$$F_3=P+\frac{\rho g}{1000}(Ax_3)$$

根据应力的定义，在此截面上的应力 σ_{33} 应为

$$\sigma_{33}=\frac{F_3}{A}=\frac{P}{A}+\frac{\rho g}{1000}x_3$$

因为 x_3 处横截面所受的是压应力，所以体现在数学表示式上应为

$$\sigma_{33}=-\left(\frac{P}{A}+\frac{\rho g}{1000}x_3\right)$$

当 $x_3=0$ 时，有

$$\sigma_{33}=-\frac{P}{A}$$

当 $x_3=h$ 时，有

$$\sigma_{33}=-\left(\frac{P}{A}+\frac{\rho g}{1000}h\right)$$

例 1-3 参看图 1-6(a)，有一个半径为 a，壁厚为 h 的柱状气缸，受内压力 P 的作用，试求该气缸壁沿圆周方向上的应力.

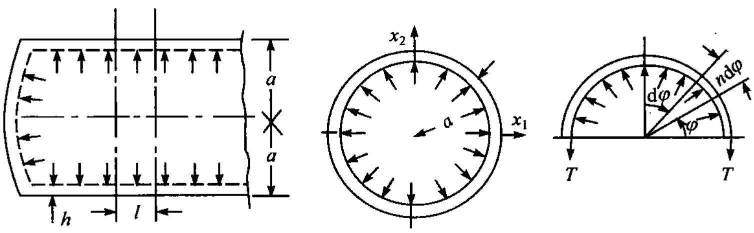

图 1-6

解 为方便起见，在柱状气缸上截取一单位长度的圆环，其正视图如图 1-6(b)所示. 从图中可以看出，在压力 P 的作用下，圆环任意横截面上均受一拉力 T [图 1-6(c)]的作用. 根据圆环所处的新的平衡状态知，P 在竖直方向上的投影(半环内的)应该与 $2T$ 的量值相等. 采用极坐标系，可列如下方程：

$$-2T+\int_0^{\pi}Pa\cdot l\cdot\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=0$$

于是有

$$T=\frac{1}{2}Pa\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=Pa$$

因为 T 作用的面积为 $h\cdot l$，所以圆环切线方向的应力为