高等学校教学参考书

误差理论及试验设计

WUCHA LILUN JI SHIYAN SHEJI

蒋维铭 徐向农 周守仁 编著

电子科技大学出版社

误差理论及试验设计

蒋维铭　徐向农　周守仁　编著

电子科技大学出版社

[川]新登字 016 号

内 容 简 介

本书从应用的角度，叙述了测量误差的基本理论与试验设计的常用方法。全书共分 10 章，第 1～5 章介绍测量误差的基本概念、随机误差、系统误差、过失误差；第 6 章介绍几种回归分析的方法：一元线性回归、多元线性回归、非线性回归、逐步回归及多项式回归；第 7～10 章对常用的试验设计方法：因子设计、部分因子设计、正交设计、回归设计进行了叙述。

本书可作为高等工科院校有关专业的教学参考书，也可供有关科技人员学习和参考。

误差理论及试验设计

蒋维铭 徐向农 周守仁 编著

责任编辑 李祖德

*

电子科技大学出版社出版发行

（成都建设北路二段四号）邮编 610054

湖北省供销学校印刷厂印刷

*

开本：787×1092 毫米 1/16 印张：12 字数：300 千字

版次：1993 年 8 月第 1 版 印次：1993 年 8 月第 1 次印刷

印数：1—2000 册

ISBN 7-81016-567-4/TH・18

定价：9.50 元

前　言

本书是为机械类专业及汽车专业攻读硕士学位的研究生编写的一本教学参考书。因此，本书的特点是侧重于应用。对于一些经典著作中的理论推导，本书只简要介绍其原理，有的地方只引用其结论，主要是介绍实际中如何应用。书中所举例子大部分是实例。因此，全书在内容上显得短小精悍，实用性强，既可作为高等工科院校有关专业的教学参考书，也可供广大的科技工作者参考。

全书共分10章，其中第1～5章叙述测量误差理论；第6章介绍了回归分析的方法；第7～10章对常用的几种试验设计方法进行了叙述。与国内同类专著相比，本书增加了因子设计与部分因子设计的内容。这种构造十分简单的二水平因子设计，是一种研究因子效应的极为有用的方法。它既是试验设计的基础，也是试验设计的精髓。因此，这也算本书的一大特色。

需要特别说明的是，本书在编写过程中，对有关书籍作了直接引用，在此，特对本书直接引用过的各文献的作者表示衷心感谢！此外，本书在出版过程中，得到了武汉工业大学李华编辑的大力支持，借此机会也表示感谢！

由于理论水平有限，实际经验不足，加上时间仓促，本书一定存在不少缺点和错误，恳请广大读者批评指正。

编著者

1993年8月于武汉工学院

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 章　测量误差的基本概念

人类在研究客观事物规律的过程中，不外乎研究客观事物质的关系和量的关系，在研究这种质和量的过程中，都离不开测量，由于实验方法和测量设备的不完善，以及周围环境的影响，人们认识能力的限制等原因，测量和实验所得数值与客观上存在的真实值之间，存着一定的差异，它在数值上就表现为测量误差。因此，如何评定和消除测量误差的影响，在实际工作中具有非常重要的意义。学习和研究测量误差理论，就是要正确理解测量误差的有关概念；学会用统计学的观点来分析测量误差，科学地评价测量结果；正确选择测量方法，了解并掌握测量数据的正确处理方法。

1.1　测量的定义和分类

研究测量误差的目的就是设法评价测量结果的可信程度，因此，测量是研究测量误差的前提。在研究测量误差时，必须首先明确什么是测量，以及测量的分类。

1.1.1　测量的定义

人们通过试验的方法，借助专门工具实现的，目的在于寻求以所采用的测量单位表示的未知参数值的行为，称为测量。

测量结果用下式表示：

测量结果＝数值×单位(量纲)

数值是被测量的测得值，单位就是得到公认的、根据定义能得到数值为 1 的被测量的基本量。目前大多数国家都采用国际单位制。

1.1.2　测量的分类

对于研究测量误差来说，从方法学的观点对各种测量进行分类是最有意义的。换句话说，应从获得测量结果的一般方法来进行分类，根据这种分类方法，所有的测量均可分为三类：即：直接测量、间接测量和总和测量。

(1)　直接测量

把被测的量与作为标准的量直接比较，或者预先按标准标定好的测量仪器进行测量，不需要通过数学方程运算，直接得到被测量的量的数值，这种测量称为直接测量。

直接测量时，测量的目的和测量的对象是统一的，即被测量的量与未知的量是同一的，直接测量可用下式表示：

$$Y = X \tag{1.1}$$

式中，Y——未知量的数值；　X——由测量得到的数值。

在工程测量中，如对时间、长度、质量进行的测量和用专门仪表对压力、温度、湿度进行的

测量都是直接测量。

(2) **间接测量**

未知量是通过一定的数学关系与另外几个量相联系,未知量不能直接获得,需要通过对上述几个与它相联系的量进行直接测量,经过按一定的数学关系运算,才能得到未知量的数值,这种测量称为间接测量。

间接测量时,测量的目的和测量的对象是不同一的,它们之间存在着一定的函数关系,故又称为函数测量,这种测量可用下式表示:

$$Y = F(X_1, X_2, \cdots, X_m) \tag{1.2}$$

式中 Y——间接测量时未知量的数值, $X_1, X_2, \cdots, X_m$——直接测量所得的数值。

间接测量在实验工程学中是用得最为广泛的一种测量。

(3) **总和测量**

总和测量又称为组合测量,它是把各个未知量以不同组合的形式出现,根据直接测量或间接测量所得的数值,用求解联立方程组的方法来求得未知量的数值,这种测量方法称为总和测量。

总和测量的目的和测量对象不是同一的,未知量和被测量之间存在着一定的函数关系。例如,标准电阻线圈的电阻与温度之间的关系可用下式表示:

$$R_t = R_{20} + \alpha(t - 20) + \beta(t - 20)^2 \tag{1.3}$$

式中 R_t——在 t°C 下线圈的电阻值; R_{20}——在 20°C 下线圈的电阻值; α、β——温度系数。

α、β 值均不能用直接测量或间接测量的方式求得。R_{20}虽然可以在 20°C 下测得,但一般都不这样做,因为难于实现准确的 20°C 的稳定温度状态。因此,R_t 也不能用直接测量或间接测量的方法求得。

为了求得 R_t,必须求得上式中的 α、β 和 R_{20}的数值,代入式(1.3),得到 3 个方程式,将它们联合求解,得到 α、β 和 R_{20}值,然后以它们为常数,利用式(1.3)便可得到任何 t 值下的电阻值。这 3 个方程式为:

$$\begin{cases} R_t' = R_{20} + \alpha(t' - 20) + \beta(t' - 20)^2 \\ R_t'' = R_{20} + \alpha(t'' - 20) + \beta(t'' - 20)^2 \\ R_t''' = R_{20} + \alpha(t''' - 20) + \beta(t''' - 20)^2 \end{cases}$$

式中 R_t',R_t'',R_t'''分别为 t',t'',t'''下用直接测量法测得的值,因此,总和测量可用下式表示:

$$F_1(Y_1, Y_2, \cdots, X_1' X_2', \cdots) = 0$$

$$F_2(Y_1, Y_2, \cdots, X_1'', X_2'', \cdots) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_n(Y_1, Y_2, \cdots, X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \cdots) = 0$$

式中,Y_1,Y_2,…为总和测量中未知量值;X_1',X_2',…,X_1'',X_2''…为总和测量中需要直接测量的数值。

总和测量只是在实验室里或在其它特殊场合,作为一种特殊的和精密的测量而被采用。在机械工程中遇到不多,故在本书中不予介绍。

1.2 测量误差的定义和分类

1.2.1 测量误差的定义

在测量某一个未知的物理量时，由于测量仪器、测量方法、环境条件以及测量程序等方面的原因，无法测得未知量的真实值，表现为测量结果与真实值之间存在一定的差值，称为测量误差，用公式表示即为：

$$\text{测量误差} = \text{测得的数值} - \text{未知量的真实值}$$

因此，任何测量所得的结果，都是真实值在一定程度上的估计。

未知量的真实值一般是不知道的，但又是客观存在着的；在某些特定的条件下，真实值又是可知的，例如：三角形三个内角之和为 180°；一个整园周角为 360°等等。

由上式得到的误差值为绝对误差。绝对误差与被测量的真实值之比值称为相对误差，因测得值与真实值相接近，故也可近似把绝对误差与测得值之比作为相对误差。即：

$$\text{相对误差} = \frac{\text{绝对误差}}{\text{真实值}} \approx \frac{\text{绝对误差}}{\text{测得值}}$$

相对误差是一个无量纲的量，通常以百分数表示。

对于相同的被测量，绝对误差可以评定其测量精度的高低，但对于不同的被测量，绝对误差就难以评定其测量精度的高低，而采用相对误差来评定其测量精度就较为确切。

1.2.2 测量误差的分类

按照误差的特点与性质，它可分为随机误差、系统误差和过失误差三类。

(1) 随机误差

在同一条件下，对某一未知量作多次测量，出现的绝对值和符号以不可预见的方式变化着的误差称为随机误差。就个体而言，这种误差是不可避免的，也是不可控制的；但从总体上讲，它是服从统计规律的。因此随机误差一种随机变量，可以用数理统计的方法来研究它对测量结果的影响。很明显，未知量的测定结果在一定程度上被随机误差歪曲，因此随机误差决定了测量的精密度。若随机误差愈小，则测量的精密度也愈高。

(2) 系统误差

在同一条件下，多次测量某一未知量时，绝对值和符号保持不变，或在条件改变时，按一定规律变化的测量误差称为系统误差。例如，由于标准量值的不准确、仪器刻度的不准确而引起的测量误差，就具有这种性质。

系统误差决定了测量结果偏离真实值的程度。因此，它决定测量的正确度。系统误差愈小，则测量结果愈正确。

(3) 过失误差

明显歪曲测量结果的测量误差称为过失误差。例如，在测量时读错了数据，记错了数据，不正确地操作仪器，都会带来过失误差。

过失误差决定了测量的可取性，凡确实含有过失误差的实验测量值，应该舍去不用。

1.3 测量的精密度和正确度

如前所述，随机误差决定了测量的精密度，系统误差决定了测量的正确度。正确度说明测量的结果对未知量真实值的偏离程度，而精密度则说明测量的结果本身不确定的程度，这可以用图 1.1 和图 1.2 大致加以说明。图 1.1 中的 X 为未知量的真实值，θ 表示测量结果含有的系统误差，L' 和 L'' 分别表示测量结果的下限和上限。L' 和 L'' 之间的一段区域说明测量结果不确定的程度，它由随机误差的大小决定。由于存在系统误差 θ，即使测量很精密(随机误差很小)，测量结果同样是不正确的。如果不正确度超过允许范围，测量结果就没有意义，因它偏离真实值 X 的程度过大，不能代表真实值。

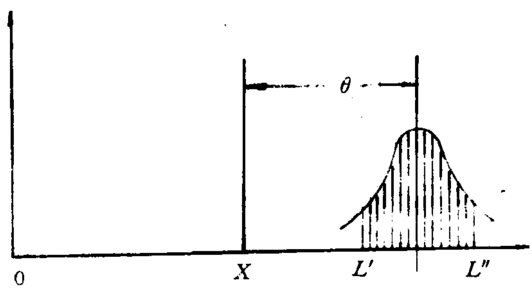

图 1.1　系统误差 θ 和正确度

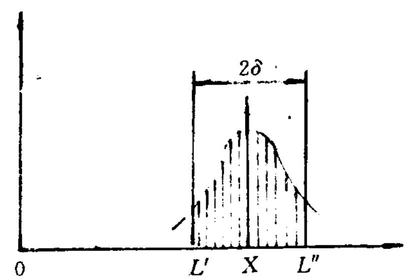

图 1.2　随机误差 δ 和精密度

如果在测量时消除了系统误差(即 $\theta\approx0$)，则得图 1.2 的情况，图中的 δ 为测量结果的随机误差，δ 值越大，则测量结果的不确定程度越大。

由图 1.1、图 1.2 可以得到一个非常重要的概念，即：一个精密的测量结果($\delta\approx0$)。可以是不正确的($\theta\neq0$ 且较大，超过允许范围)，也可以是正确的($\theta\approx0$，如图 1.2)，只有消除了系统误差以后，精密的测量才能获得正确的测量结果。

我们称一个既精密($\delta\approx0$ 或很小)又正确($\theta\approx0$ 或很小)的测量为精确的测量。一切测量都应力求在给定的允许范围内做到既精密又正确，即精确的测量是我们追求的目的，精确的测量意味着随机误差和系统误差在一定程度上做到同时被消除(实际上随机误差是不可能完全消除的，只能控制在某一范围之内)。过失误差在任何测量中都是不应存在的，不言而喻，精确的测量结果中不应含有过失误差。

1.4 测量误差的综合

在每个测量过程中，测量误差的来源是多方面的，既有随机误差，也有系统误差，它们产生的原因是复杂的。例如，随机误差本身就是许多无法掌握的微小误差所产生的综合效应；系统误差也是多种多样的，它们各自对测量结果产生影响。这些个别的效应(由单项误差引起)是怎

样综合起来而构成对测量结果的总效应呢？这是必须研究的问题。

作为一个测试人员，最关心的问题是希望能够得到切实反映客观实际的测量结果，或者就能够得到比较精确的测量结果，包括得出其比较符合实际的测量误差表达式，这就要求测试人员进一步了解测量误差的合成方法。

在实际工作中，常按系统误差对测量结果影响程度的不同而作不同的处理：当系统误差远大于随机误差的影响，随机误差可以忽略不计时，基本上可按纯系统误差来处理，但这样的情况只有在极个别的情况下才会发生；当系统误差较小，或者已经改正，此时基本上按纯随机误差来处理，一般精度的测量均属此类情况；最常见的情况是系统误差和随机误差的影响相差不多，二者均不可忽略，此时，测量误差的综合可根据具体情况按不同方法进行处理。

对于不同性质的测量误差应采取不同的综合方法，即使相同类型的测量误差，由于其分布律不同，综合的方法也不同。因此，我们在研究测量误差的综合问题时，除了要区别测量误差的类型之外，还要确定各单项误差的分布律，通常对随机误差的计算，都是基于正态分布的假设进行的，随着对测量误差的认识的深化，发现随机误差属于非正态分布的情况还是存在的，这样各单项随机误差综合时，要考虑到它们的不同分布对测量误差综合的影响。但是，到目前为止，对于非正态分布测量误差的研究还是很不充分的，特别是系统误差的概率分布，更有待作进研究。至于随机性系统误差，则更难于确切掌握它们的概率分布，而且往往都是非正态的，如何处理才更为妥当，是一个棘手的问题。

所谓测量的精确度，就是能综合反映测量中存在的系统误差和随机误差对测量结果的综合结果，由于系统误差影响测量的正确度，随机误差影响测量的精密度。因此，测量的精确度，可以用测量的综合误差来表征，综合误差是由不同性质的测量误差综合而成，为了要表达测量的精确度，应首先研究相同测量误差的合成问题，然后再研究不同性质测量误差的综合问题，以寻求一个确切的测量误差表达式，来科学地反映测量的精确度。

关于误差综合的方法，本书不作介绍，读者可参阅有关书籍。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 2 章　随机误差

在研究随机误差的过程中，为论述方便，假定在测量数据中已消除了系统误差和过失误差，换言之，在本章的讨论中，必须在上述假设的条件下，导出有关随机误差的结论才是正确的。

2.1　概述

在相同的测量条件下，对同一量值进行多次重复的测量，得到一系列不同的测量值（常称为测量列）。在测量列的每一个测量值中都含有误差，若误差中每一个体的出现不具有规律性，即前一个误差出现后，不能预定下一个误差的大小和方向，但就测量列的总体而言，却具有统计规律性，具有这样性质的测量误差，称为随机误差。

随机误差存在一切测量中，引起随机误差的原因是多方面的，例如：测量时温度的微量变化而引起测量仪器各部分的变化；空气的扰动而引起的某些部件的位移；测量人员的感觉器官如眼、耳等临时的生理性变化而引起对信号的敏感程度的变化；测量仪器本身的偶然性变化；电磁场的微量变化；测量时最后一位数估计得不确切等等。这些原因引起的干扰，有时大，有时小，有时正，有时负，其发生带有偶然性，个别地考虑这些干扰的影响是不可能的，只能从其总体上来研究它们对测量结果的影响。因此，我们只能用概率论和数理统计的方法对随机误差作分析与研究。因为，对于每一个单独的随机误差，无法作出判断，只有对重复测量所得的测量列进行研究，才能对这一测量列的随机误差的总体情况作出结论并据此计算这些误差对测量结果的影响，

虽然随机误差的存在是绝对的，但是，如果测量仪器的灵敏度不够高，随机误差将无法显露出来，每次重复测量所得的结果总是同一个数值。但是，重复测量所得的结果彼此相差很大也是不正常的。因此，好的测量必须具备的条件是：在极端仔细地从事测量的情况下，所得各测量数值既有相同者，又有稍微相差者。

由前述，可以得到如下的结论：

随机误差的出现是一个随机事件，用概率论的观点来观察它，可以发现：

① 某一测量出现随机误差是唯一可能的事件，因为在一次测量中，不可避免地要出现随机误差。

② 是互不相容的事件，因为在一次测量中，只存在一个随机误差，一次测量发生两个随机误差是不可能的。

③ 是独立的简单事件。因为某一次测量中出现的随机误差的数值不会影响另一次测量出现随机误差的数值。

经过大量的试验研究，我们还发现，随机误差虽然在个体上不存在规律性，但在总体上符合下述规律性：

① 在测量次数无限多时，绝对值相等的正误差与负误差出现的机会相等，这称为随机误差的对称性。

② 绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的次数多，这称为随机误差的单峰性。

③ 在一定的测量条件下，随机误差的绝对值不会超过一定的界限，这称为随机误差的有界性。

2.2 未知量值真实值的估计

2.2.1 真实值估计的加权平均值原理

设对某一未知量值作了 n 次测量($n\to\infty$)，得到一组 n 个彼此独立的测量值：

$$l_1,\quad l_2,\quad l_3,\quad \cdots,\quad l_n$$

在此数列的每一个数中，都包含有相应的随机误差。由前述，随机误差在数值上是彼此独立的，它们是：

$$\delta_1,\quad \delta_2,\quad \delta_3,\quad \cdots,\quad \delta_n$$

设该未知量值的真实值为 X(它是不知道的)，则定义为：

$$\begin{cases} l_1 = X + \delta_1 \\ l_2 = X + \delta_2 \\ l_3 = X + \delta_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ l_n = X + \delta_n \end{cases} \tag{2.1}$$

上式中，因 X 是未知的，所以虽然得到的 $l_1,\ l_2,\ l_3,\ \cdots,\ l_n$ 是一组测得的数，数列 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$ 仍然是不知道的，它们之间的关系只是一种纯数学的描述。但为了分析测量列中的随机误差，我们可用一个最可信的值 L_0 来作为真实值 X 的估计值。很明显，数值 L_0 必定是 n 次测量得到的数列的函数，即

$$L_0 = F(l_1,\ l_2,\ l_3,\ \cdots,\ l_n) \tag{2.2}$$

因为 L_0 是最接近于真实值 X 的量，故上述函数关系也可近似地认为能给出真实值 X，故

$$F(l_1,\ l_2,\ l_3,\ \cdots,\ l_n) = X \tag{2.3}$$

现在问题就是要求出这个函数关系。

对式(2.3)求偏导数，得：

$$\frac{\partial F(l_1,\ l_2,\ l_3,\ \cdots,\ l_n)}{\partial X} = \frac{\partial X}{\partial X} = 1$$

或

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{\partial F}{\partial l_1}\cdot\frac{\partial l_1}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial l_2}\cdot\frac{\partial l_2}{\partial X} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial l_n}\cdot\frac{\partial l_n}{\partial X} = 1$$

对式(2.1)求偏导数，得：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l_1}{\partial X} = 1 \\ \dfrac{\partial l_2}{\partial X} = 1 \\ \quad \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial l_n}{\partial X} = 1 \end{cases}$$

故

$$\frac{\partial F}{\partial l_1} + \frac{\partial F}{\partial l_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial l_n} = 1 \tag{2.4}$$

式(2.4)可以写成如下形式：

$$\frac{\partial F}{\partial l_1} + \frac{\partial F}{\partial l_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial l_n} = \frac{P_1}{S} + \frac{P_2}{S} + \cdots + \frac{P_n}{S} = 1$$

式中

$$P_1 + P_2 + \cdots + P_n = S$$

所以，函数 F 应具有下列形式：

$$F(l_1, l_2, \cdots, l_n) = \frac{P_1}{S} l_1 + \frac{P_2}{S} l_2 + \cdots + \frac{P_n}{S} l_n$$

于是，真实值 X 的估计值 L_0 可写成下列形式：

$$L_0 = \frac{1}{S}(P_1 l_1 + P_2 l_2 + \cdots + P_n l_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i l_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i} \tag{2.5}$$

式(2.5)中，P_i 称为各次测量值的权；L_0 又称为各测量值的加权平均值。因此，各次测量值的加权平均值是真实值 X 的最可信的估计值。

在测量学中，加权平均原理属于处理不等精密度测量数据处理的理论基础，即若在 n 次测量中，每次测量精密度不同，则应选择不同的权，如果某一次测量较为粗糙，则应取较小的权；反之，若某次测量较为精密，则应取较大的权。

2.2.2 真实值估计的算术平均原理

事实上，在测试工作中，对某一未知量的重复测量都是在相同的条件下进行的，每次测量均是具有相同的精密度，故它们的每次测量的权应该相等。这时：

$$L_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i l_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i} = \frac{P \sum_{i=1}^{n} l_i}{nP} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} l_i$$

这种情况下，L_0 便变成各测量值的算术平均值，一般用 L 来表示，则：

$$L = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n} \tag{2.6}$$

所以，用等精密度测量得到的测量列来估计真实值 X 时，可用算术平均值 L 作为 X 的最可信的估计值。

很明显，估计值与真实值之间，必然会产生误差，若用 λ 表示它的误差，则：

$$\lambda = L - X$$

若以式(2.1)、(2.6)代入上式，得：

$$\lambda = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n}{n} \tag{2.7}$$

当测量次数 $n \to \infty$ 时，由于 δ_i 是一个随机变量，它具有对称性和单峰性，δ_i 中绝对值相等、符号相反的误差值出现的机会相等。则：

$$\lambda = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n}{n} \to 0$$

所以

$$L \to X$$

由此可见，在等精密度测量中，只有当 $n \to \infty$ 时，算术平均值 L 趋近于真实值 X。故 L 是 X 的无偏估计，这个结论在误差理论中命名为高斯公设。

2.2.3 残余误差及其性质

因为 δ_i 是不能测定的值，所以在误差分析中，常用残余误差来说明问题。若用 υ_i 表示各测量值 l_i 对算术平均值 L 的偏差，则：

$$\begin{cases} \upsilon_1 = l_1 - L \\ \upsilon_2 = l_2 - L \\ \quad \cdots\cdots \\ \upsilon_n = l_n - L \end{cases} \tag{2.8}$$

υ_i 称为各测量值的残余误差。

残余误差有下列性质：

① 各测量值的残余误差之和等于零，即：

$$\sum_{i=1}^{n} \upsilon_i = 0$$

证明：由式(2.8)，得：

$$\upsilon_i = l_i - L \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n} \upsilon_i = \sum_{i=1}^{n} l_i - nL$$

又因

$$L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} l_i$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} \upsilon_i = \sum_{i=1}^{n} l_i - \sum_{i=1}^{n} l_i = 0$$

② 各测量值残余误差平方和为最小，即：

$$\sum_{i=1}^{n} \upsilon_i^2 = \min$$

证明：任设一值 $L' \neq L$，则有：

$$\upsilon'_i = l_i - L' \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i'^2 - \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (l_i - L')^2 - \sum_{i=1}^{n} (l_i - L)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (l_i^2 - 2l_iL' + L'^2) - \sum_{i=1}^{n} (l_i^2 - 2l_iL + L^2)$$

$$= n(L'^2 - L^2) - (L' - L)\sum_{i=1}^{n} l_i$$

$$= n(L' - L)^2$$

所以：

$$\sum_{i=1}^{n} (l_i - L')^2 = \sum_{i=1}^{n} (l_i - L)^2 + n(L' - L)^2$$

因上式的 $n(L'-L)^2$ 项的值总为正，故

$$\sum_{i=1}^{n} (l_i - L')^2 > \sum_{i=1}^{n} (l_i - L)^2$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} v'^2_i > \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

所以 $\sum_{i=1}^{n} v_i^2$ 为最小。

③ 当测量次数 $n\to\infty$时，$v_i=\delta_i$

证明：当 $n\to\infty$时，

$$\lambda = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n}{n} = 0$$

所以

$$L=X$$

根据定义：

$$v_i = l_i - L; \quad \delta_i = l_i - X$$

所以，可得：

$$v_i = \delta_i$$

2.3 随机误差的分布

2.3.1 高斯分布

(1) 高斯分布的导出

在研究随机误差的分布时，假设测量列的测量次数 $n\to\infty$，这时，测量列的随机误差与残余误差值相等。

在论证随机误差的分布规律时，可先对试验结果作统计分析。假设对某一长度进行多次测量，其残余误差的分布直方图如图 2.1 所示。图中每一个长方形的底边均相等，长方形的高度与在该残余误差值区间内出现残差的个数成正比。

很明显，随着测量次数 n 的无限增加，在作直方图时可将残差的间隔缩小，当 $n\to\infty$ 时，

$\triangle v \to 0$，这时，上述直方图便趋近于图上虚线。按残余误差的性质，它可用随机误差来代替。

设图 2.1 上虚线的方程为：

$$Y=\varphi(\delta)$$

现需要导出此方程。

在图 2.1 中，每一个长方形的底边都是相等的，因此，可将长方形的面积看成是在该误差区间 $(\delta,\delta+\triangle\delta)$ 内出现误差个数成比例。这样，虚线下的面积便与误差出现的个数成比例。

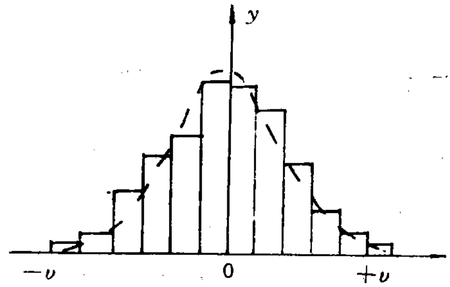

图 2.1 残余误差的直方图

设 m 为测量列中误差在 $(\delta,\delta+\triangle\delta)$ 区间内的个数，n 表示全部误差的个数，则：

$$m=CY\triangle\delta$$

$$n=C\sum_{i=1}^{n}Y_i\triangle\delta$$

式中，C 为比例常数，它决定于图形所选用的比例。

若令虚线下所包络的面积为 1，则：

$$\frac{m}{n}=Y\cdot\triangle\delta$$

式中，$\frac{m}{n}$ 是随机误差在 $(\delta,\delta+\triangle\delta)$ 区间内出现的频率。

根据概率论中的大数定理，可知当 n 足够大时，$\frac{m}{n}$ 值便趋近于概率，即

$$P\{\delta,\delta+\mathrm{d}\delta\}=Y\cdot\mathrm{d}\delta$$

式中，Y 不是概率，而具有密度的量纲，故称

$$Y=\varphi(\delta)$$

是随机误差 δ 的概率密度函数。

当 $n\to\infty$ 时，$\triangle\delta\to\mathrm{d}\delta$，则随机误差落入 $(\delta,\delta+\mathrm{d}\delta)$ 区间内的概率为：

$$P\{\delta,\delta+\mathrm{d}\delta\}=\varphi(\delta)\mathrm{d}\delta$$

因此，随机误差落入 (δ_1,δ_2) 区间的概率为：

$$P(\delta_1,\delta_2)=\int_{\delta_1}^{\delta_2}\varphi(\delta)\mathrm{d}\delta$$

随机误差在 $(-\infty,+\infty)$ 区间内的出现，是一个必然事件，其概率为 1，即：

$$P\{-\infty,+\infty\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\delta)\mathrm{d}\delta=1$$

此式证明了 $\varphi(\delta)$ 曲线下的面积定义为 1 的正确性。

在测量列的测量值 l_i 中，分别包含随机误差 δ_i。它们落入 $(\delta_1,\delta_1+\mathrm{d}\delta)$，$(\delta_2,\delta_2+\mathrm{d}\delta)$，…，$(\delta_n,\delta_n+\mathrm{d}\delta)$ 各区间的概率为：

$$\varphi(\delta_1)\mathrm{d}\delta\ ;\quad \varphi(\delta_2)\mathrm{d}\delta\ ;\quad \cdots\ ;\quad \varphi(\delta_n)\mathrm{d}\delta$$

在 n 次测量中，所有这些误差是同时出现的，而且它们之间是互相独立的，故根据概率论的乘法定理，这些随机误差同时出现的概率为

$$P_\delta=\varphi(\delta_1)\varphi(\delta_2)\cdots\varphi(\delta_n)(\mathrm{d}\delta)^n$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com