高等数学講义

第二册

数学理論与力学教研組編

武漢測量製圖学院

1958

目录

第四编 积分学

第一章 不定积分 ······ 1-27

§4-1-1. 原函数概念 ······ 1
§4-1-2. 积分法 ······ 3
§4-1-3. 基本积分表 ······ 4
习题 4-1-甲 ······ 6
§4-1-4. 基本积分法 ······ 6
习题 4-1-乙 ······ 9
习题 4-1-丙 ······ 12
§4-1-5. 分式有理函数的积分法 ······ 14
习题 4-1-丁 ······ 18
§4-1-6. 三角函数的积分法 ······ 18
§4-1-7. 无理函数的积分法 ······ 21
习题 4-1-戊 ······ 26
第四编第一章複习题 ······ 26

第二章 定积分 ······ 28-[illegible]

§4-2-1. 引起积分和式的问题 ······ 28
§4-2-2. 定积分 ······ [illegible]
§4-2-3. 定积分和不定积分的关係 ······ 34
习题 4-2-甲 ······ 35
§4-2-4. 定积分的基本性质 ······ 37
习题 4-2-乙 ······ 43
§4-2-5. 定积分的計算 ······ 44
习题 4-2-丙 ······ 47
§4-2-6. 定积分的近似計算法 ······ [illegible]
习题 4-2-丁 ······ [illegible]

…编第二章複习题

第三章 …积分的应用 …………………………………… 57-6

§4-3-1. 怎样用定积分解应用问题 …………………… 57

§4-3-2. 平面图形的面积 ……………………………… 59

习题 4-3-甲 ………………………………………… 62

§4-3-3. 平面曲线的弧長 ……………………………… 63

习题 4-3-乙 ………………………………………… 65

§4-3-4. 利用横断面計牀体积 ………………………… 66

§4-3-5. 旋転体的体积 ………………………………… 68

习题 4-3-丙 ………………………………………… 69

第五编 立体解析几何

第一章 坐标法 ……………………………………… 113-12

§5-1-1. 投影的定理 …………………………………… 113

§5-1-2. 空间的直角坐标系 …………………………… 11

§5-1-3. 关於空间坐标的一些问题 …………………… 11

§5-1-4. 直线的方向余弦和两直线间的夹角 ………… 11

习题 5-1-甲 ………………………………………… 12

第二章 曲面和方程 ………………………………… 123-1

§5-2-1. 曲面和方程的概念. 两个基本问题 ………… 12

§5-2-2. 球面方程 ……………………………………… 12

§5-2-3. 柱面方程 ……………………………………… 12

§5-2-4. 空间曲线的方程 ……………………………… 12

习题 5-2-甲 …………………………………………

第三章 空间平面 …………………………………… 128-

§5-3-1. 平面的法线式方程 …………………………… 1

§5-3-2. 平面的一般方程 ……………………………… 1

[illegible]……133
[illegible]面的距离……135
习题 5-3-甲……136
第四章 空间直线……138—146
§5-4-1. 作为两平面交线的空间直线……138
§5-4-2. 直线的标准方程和参数方程……138
§5-4-3. 直线的两点式方程……140
§5-4-4. 二直线间的夹角……140
§5-4-5. 直线和平面的夹角……142
习题 5-4-甲……144
第五章 二次曲面……146—155
§5-5-1. 引言……146
§5-5-2. 旋转曲面……147
§5-5-3. 椭球面……148
§5-5-4. 单叶双曲面……150
§5-5-5. 双叶双曲面……151
§5-5-6. 椭圆抛物面……[illegible]
§5-5-7. 双曲抛物面……152
§5-5-8. 二次锥面……[illegible]
习题 5-5-甲……155
附录 积分表的註释……附1—附[illegible]

第四编 积分學

第一章 不定积分

§4-1-1. 原函數概念 微分學的基本问题是求给定的函数的导数或微分。

积分學的第一個基本问题，恰好相反，就是求一個函数使它有给定的导数或微分。這种问题也是由实际问题所引起的。

在力學里面，如果已知在任一時刻t，物体运动的速度是

$$v=v(t)$$

現在要找這個物体运动的規律，也就是要找它所走过的路程s和時间t的依從关係，這就是一個积分學的问题。

我们怎样去解這個问题呢？首先要弄清楚，如果這個未知的函数是$s=f(t)$，那末，$f(t)$的导数就是$v(t)$

$$f'(t)=v(t)$$

現在要從這個关係式里面，求出未知函数$f(t)$，我们管這個函数叫做$v(t)$的原函数。一般地，如果可导函数$f(x)$的导数是$\varphi(x)$，我们就說$f(x)$是$\varphi(x)$的原函数。

例如当$v(t)$等于常数v_0的時候，我们要找的那個原函数$f(t)$就是

$$f(t)=v_0t$$

因此所求的运动規律可能就是

$$s=v_0t$$

不过我们还不能肯定，這就是唯一的規律。因为除此以外，还有其它的函数，如v_0t+3，v_0t-2等，也都是v_0的原函数，那末這个运动的方程就要用函数族

$$s=v_0t+C$$

来表達，其中C是任一常数。

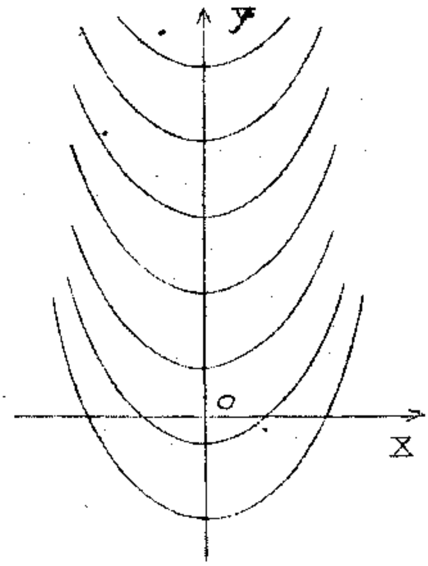
又如当$v(t)=gt$，其中g是常数，這個函数也有許多

原函数，显然 $\frac{1}{2}gt^2$ 就是其中的一個．函数族 $\frac{1}{2}gt^2+C$ 可以代表其中任意一個。

再從几何方面来講．設想有一条曲线，我們不知道它的方程，但是知道它在平面上各点处的切线的斜率，例如在点 x 处，它的切线的斜率是 $2x$，我們假定曲线的方程是

$$y=f(x)$$

那末 $f'(x)$ 是給定的．显然 $f(x)=x^2+C$，因此所求曲线方程就是函数族 $y=x^2+C$，這是一族抛物线（附图）。



一般地說起来，如果有一個未知的函数 $f(x)$，它的导数是一個給定的函数 $\varphi(x)$，這就是說給定了

$$f'(x)=\varphi(x) \qquad (1)$$

我們的问题就是要从這個給定的函数 $\varphi(x)$，求出一切合于条件(1)的函数 $f(x)$ 来．每一個這样的函数都叫做函数 $\varphi(x)$ 的原函数。現在假定函数 $\varphi(x)$ 有原函数，想弄清楚它到底有几個原函数，這些個原函数彼此有什么关係。下面的定理可以回答這個问题：

定理　如果函数 $\varphi(x)$ 有一個原函数 $f(x)$，那末它就有無穷多個原函数，并且所有的原函数都可以用 $f(x)+C$ 来表達。

（証）　如果 $f(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的原函数，显然函数族 $f(x)+C$ 也是它的原函数。因此它有無穷多個原函数。

如果另外有一個函数 $\Phi(x)$ 也是 $\varphi(x)$ 的原函数，我們取兩個原函数的差

$$\Phi(x)-f(x)$$

它的导数必是0，

$$\Phi'(x)-f'(x)=0$$

這是因為

$$\Phi'(x)=\varphi(x)\,;\quad f'(x)=\varphi(x)$$

的緣故。

所以 $\Phi(x)-f(x)$ 一定是一個常数k.（註）

或 $\Phi(x)=f(x)+k$.

可見這個原函数$\Phi(x)$也屬於函数族$f(x)+C$。

（注意）這個定理告訴我們，如果要找一個函数的一切原函数，只要找到任意一個原函数就够了．例如

$\cos x$ 的一個原函数是 $\sin x$，所以它的一切原函数是 $\sin x+C$；$\frac{1}{1+x^2}$ 的一個原函数是 $\operatorname{arctg}x$，所以它的一切原函数是 $\operatorname{arctg}x+C$。

§4-1-2．积分法． 求一個給定函数的一切原函数的过程叫做积分法。換句話說，從一个未知函数的导数或微分 求函数本身的方法．就是积分法．如果函数$\varphi(x)$有一個原函数是$f(x)$，那末它的一切原函数就用函数族$f(x)+C$来表達．叫做函数$\varphi(x)$的不定积分。我們採用以下的記号来表達函数$\varphi(x)$的不定积分：

$$\int\varphi(x)dx=f(x)+C$$

其中符号 $\int$ 叫做积分符号，它是字母S的变態。$\varphi(x)$叫做被积函数．$\varphi(x)dx$ 叫做被积分式。C叫做积分常数．它是任意实数。

定义 求原函数的方法叫做不定积分法，用来表達給定函数$\varphi(x)$的一切原函数的式子 $\int\varphi(x)dx=f(x)+C$．叫做它的不定积分。

例如 由于 $d\sin u=\cos u\,du$，$\sin u$ 是 $\cos u$ 的一个原函数，所以 $\cos u$ 的不定积分是

$$\int\cos u\,du=\sin u+C$$

（註）由微分法公式 I，常数的导数是 0．反过来說，0的原函数是常数。

同样，由於 $d\,\mathrm{arc\,tg}\,u = \frac{1}{1+u^2}\,du$，$\mathrm{arc\,tg}\,u$是 $\frac{1}{1+u^2}$ 的一個原函数，所以 $\frac{1}{1+u^2}$ 的不定积分是

$$\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \mathrm{arc\,tg}\,u + C$$

§4-1-3 基本积分表 不定积分的一些基本公式是可以從导数的基本公式推导出来的，我们把它们列成一个表（十一個公式），以后還要再补充几個。在這些個公式里面，v都是自变量x的函数：

(I) $\int v^m\,dv = \frac{v^{m+1}}{m+1} + C \qquad m \neq -1$.

因 $d\left(\frac{v^{m+1}}{m+1}\right) = v^m\,dv$.

(II) $\int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C \qquad v \gtrless 0$；

因 $d(\ln|v|) = \frac{1}{v}\,dv$；

(III) $\int a^v\,dv = \frac{a^v}{\ln a} + C$，$a > 0$，$a \neq 1$；

因 $d\left(\frac{a^v}{\ln a}\right) = a^v\,dv$.

(IV) $\int e^v\,dv = e^v + C$，因 $d(e^v) = e^v\,dv$.

(V) $\int Af(v)\,dv = A\int f(v)\,dv$，$A$是不等於0的常数，

因 $d\left[A\int f(v)\,dv\right] = A f(v)\,dv$

(VI) $\int \cos v\,dv = \sin v + C$，因 $d\sin v = \cos v\,dv$.

(VII) $\int \sin v\,dv = -\cos v + C$，因 $d(-\cos v) = \sin v\,dv$

(VIII) $\int \frac{dv}{\cos^2 v} = \mathrm{tg}\,v + C$，因 $d(\mathrm{tg}\,v) = \frac{dv}{\cos^2 v}$

(IX) $\int \frac{dv}{1+v^2} = \mathrm{arc\,tg}\,v + C = -\mathrm{arc\,ctg}\,v + C$.

因 $d(\mathrm{arc\,tg}\,v) = d(-\mathrm{arc\,ctg}\,v) = \frac{dv}{1+v^2}$.

(X) $\int \frac{dv}{\sin^2 v} = -\operatorname{ctg} v + C$. 因 $d(-\operatorname{ctg} v) = \frac{dv}{\sin^2 v}$

(XI) $\int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \arcsin v + C = -\arccos v + C$.

因 $d(\arcsin v) = d(-\arccos v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$

例 1. $\int 3x^{\frac{2}{3}} dx = 3\int x^{\frac{2}{3}} dx = 3\left(\frac{1}{\frac{2}{3}+1}\right) x^{\frac{2}{3}+1} + C$

$= \frac{9}{5} x^{\frac{5}{3}} + C$. 用公式(I)(V)

2. $\int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$. 公式 II

$\int \frac{dx}{(x+3)^3} = \int (x+3)^{-3} d(x+3) = \frac{(x+3)^{-3+1}}{-3+1} = \frac{-1}{2(x+3)^2} + C$

3 $\int \frac{dx}{(x+3)^3} = ?$ 〔提示〕 $dx = d(x+3)$

$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$,

4. $\int \frac{dx}{ax+b} = ?$ $a \neq 0$. 〔提示〕 $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$

5. $\int \frac{dx}{4x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{(2x)^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + C$ 公式 IX

6. $\int \frac{de^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \arcsin e^x + C$ 公式 X

7. $\int \sin(3x+2)dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+2)d(3x+2)$

$= -\frac{1}{3}\cos(3x+2) + C$ 公式 VII

8 $\int 3^{x^2} x\,dx = \frac{1}{2}\int 3^{x^2}(2x\,dx) = \frac{1}{2}\int 3^{x^2} d(x^2)$

$= \frac{1}{2}\frac{3^{x^2}}{\ln 3} + C$. 公式 III

9. $\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \operatorname{tg} x)dx}{\sec x + \operatorname{tg} x}$

$= \int \frac{d(\sec x + \operatorname{tg} x)}{\sec x + \operatorname{tg} x}$

$= \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$ 公式 II

10. $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x}$

$$= -\ln|\cos x| + C \qquad \text{公式 II}$$

習題 4-1-甲

(1) 什麽是一個已知函数的原函数？

(2) 什麽样的運算叫做函数的积分法？

(3) 为什麽在函数的不定积分里面有任意常数出現？

(4) 驗証基本积分表里面的十一個公式．

作下列各不定积分：

(5) $\int (x+1)^{15} dx$

(6) $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$

(7) $\int \frac{dx}{3+2x}$

(8) $\int 6a^{2x} dx$

(9) $\int \frac{dx}{e^x}$

(10) $\int 10^x dx$

(11) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$

(12) $\int \sin(2x-3)\,dx$

(13) $\int \csc x\,dx$

(14) $\int \cos 3\theta\,d\theta$

(15) $\int \cos(1-2x)\,dx$

(16) $\int \frac{dx}{\cos^2(1-x)}$

(17) $\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{2-x}{2}\right)}$

(18) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$

(19) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(20) $\int \frac{dx}{1+9x^2}$

(21) $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$

(22) $\int \frac{x}{4x^2+9} dx$

§4-1-4 基本积分法　求一個函数的不定积分，僅靠以上這几個公式是很不够的。下面要介紹三种基本方法。

(一) 逐項积分法．如果被积分的函数是几個函数的代数和，我們就要按下面的公式(XII)去作积分：

$$\int [f_1(u)+f_2(u)+f_3(u)]\,du$$

$$= \int f_1(u)\,du + \int f_2(u)\,du + \int f_3(u)\,du \qquad \text{(公式 XII)}$$

這公式的証明是很簡单的，只要取两边的微分就可以了．

例 1. $\int (x^2+1)^2 dx = \int (x^4+2x^2+1)\,dx$

$$= \int x^4 dx + 2\int x^2 dx + \int dx$$

$$= \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x + C$$

2. $\int \frac{x^2+3x+3}{x+1}dx = \int (x+2+\frac{1}{x+1})dx$

$$= \int (x+2)dx + \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{1}{2}x^2+2x+\ln|x+1|+C$$

3. $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$

$$= \int (1-\frac{1}{x^2+1})dx$$

$$= x - \operatorname{arc\,tg} x + C$$

(二)分部积分法　很多比較麻煩的不定积分问题，要用分部积分法来解决，這种方法是根据两函数的乘积的微分的公式推导出来的。

我们知道，当u, v都是自变量x的函数，並且都是可导的，我们就得到

$$d(uv) = vdu + udv$$

两边作积分　$\int d(uv) = \int [udv + vdu]$

這就是　$uv = \int udv + \int vdu$

由此可得分部积分法公式

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad \text{(公式 XIII)}$$

這個公式的用处是這样的：把积分号下的被积分式分解成u和dv两部分的乘积，再求出du和v，代到公式右边，那末求积分$\int udv$的问题，就轉到求积分$\int vdu$的问题。后一個积分如果能求出来，问题就解决了。如果还不能求出来，可以再用此法試一試。

[例] 1. 求 $\int x^2 \ln x\, dx$

(解) 設　$\ln x = u$，　$x^2dx = dv$

我们得到　$du = \frac{1}{x}dx$　　$v = \frac{1}{3}x^3$　（略去积分常数）

于是　$\int x^2\ln x dx = \frac{1}{3}x^3\cdot\ln x - \frac{1}{3}\int x^3\frac{1}{x}dx$

$\int \cancel{2x} e^{x}\cdot 2x\,dx$

$$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$$

(注意) 在求v的時候，可以略去积分常数，如果不略去，最后结果还是一样，建議讀者自己試一試。

2. 求$\int x^2e^xdx$

(解) 設 $x^2=u$， $e^xdx=dv$

那末 $du=2xdx$ $v=e^x$

所以 $\int x^2e^xdx=e^x\cdot x^2-2\int xe^xdx$ (1)

积分$\int xe^xdx$ 比較原来的积分简单些，我们再用一次分部积分法：

設： $x=u$， $e^xdx=dv$；

那末 $du=dx$ $e^x=v$

所以 $\int xe^xdx=xe^x-\int e^xdx$
$=xe^x-e^x$

代入(1)式里面

$$\int x^2e^xdx=e^xx^2-2(xe^x-e^x)+C$$

3. 求$\int e^x\cos x\,dx$

(解) 設 $e^xdx=dv$ $\cos x=u$

那末 $v=e^x$ $du=-\sin x\,dx$

所以 $\int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx$ (2)

对于后一個积分$\int e^x\sin x\,dx$，再用分部积分法，

設 $e^xdx=dv$ $\sin x=u$

$v=e^x$ $du=\cos x\,dx$

所以 $\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$

代入(2) $\int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+[e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx]$

最后一个积分和最初的积分是一样的，我们把它移到左边，

$$2\int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+e^x\sin x+C_1.$$

因此，$\int e^x\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$.

例4. $\int \sec^3 x\,dx$

〔解〕　令 $u=\sec x$ ，　$dv=\sec^2 x\,dx$

那末，　$du=\sec x\,tg\,x\,dx$　$v=tg\,x$

代入　$\int\sec^3 x\,dx=\sec x\,tg\,x-\int\sec x\,tg^2 x\,dx$

$$=\sec x\,tg\,x-\int\sec x(\sec^2 x-1)dx$$

$$=\sec x\,tg\,x-\int\sec^3 x\,dx+\int\sec x\,dx$$

所以　$2\int\sec^3 x\,dx=\sec x\,tg\,x+\int\sec x\,dx$

$$=\sec x\,tg\,x+\ln|\sec x+tg\,x|+C_1$$

最后，$\int\sec^3 x\,dx=\frac{1}{2}\sec x\,tg\,x+\frac{1}{2}\ln(\sec x+tg\,x)+C$.

習 題 4-1-乙

作积分：

(1) $\int(2x+1)^3 dx$

(2) $\int\frac{x^2+2x+3}{x^3}dx$

(3) $\int(x^3+x^2-x-1)(3x^2+2x-1)dx$

(4) $\int(\frac{e^x+e^{-x}}{2})dx$

(5) $\int\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}}dx$

(6) $\int(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+2}+3)dx$

(7) $\int\ln x\,dx$

(8) $\int x\cos x\,dx$

(9) $\int x\sin 2x\,dx$

(10) $\int xe^{-x}dx$

(11) $\int x\cdot 3^x dx$

(12) $\int arc\,tg\,x\,dx$

(13) $\int x^3 e^{x^2}dx$

(14) $\int x\ln x\,dx$

(15) $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$

〔提示〕　$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$$.

(再用分部积分法。求第二個不定积分

令 $u = x$ ，$dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$)

(三) 代换积分法　当我們作积分的时候，如果被积分式 $\varphi(x)dx$ 比較複杂，我們还可以用代换的手續，把它变化一下，這种手續是這样的：

如果在被积分式 $\varphi(x)dx$ 里面，引用新变量 u，

$$x = \psi(u), \qquad dx = \psi'(u)\,du$$

那末　$$\int \varphi(x)\,dx = \int \varphi[\psi(u)]\psi'(u)\,du$$

這個等式很容易証明，只要对两边作微分就行了。

左边的微分是 $d\left[\int \varphi(x)dx\right] = \varphi(x)\,dx$

$$= \varphi[\psi(u)]\psi'(u)\,du .$$

右边的微分是 $d\int \varphi[\psi(u)]\psi'(u)du = \varphi[\psi(u)]\psi'(u)\,du$ 。

有时候不用 $x = \psi(u)$，反过来用 $u = \Phi(x)$，$du = \Phi'(x)dx$ 也可以。

(例) 1. 作积分 $\int \sin^3 x \cos x\,dx$

(解)　令 $u = \sin x$ ，　$\cos x\,dx = du$

所以，$$\int \sin^3 x \cos x\,dx = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C$$
$$= \frac{1}{4}\sin^4 x + C$$

2. 作积分 $\int x^5 e^{x^3} dx$

(解)　令 $x^3 = u$ 　　$du = 3x^2 dx$

代入　$$\int x^5 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int x^3 \cdot e^{x^3} \cdot 3x^2 dx$$
$$= \frac{1}{3}\int u e^u du$$
$$= \frac{1}{3}e^u(u-1) + C ,\ \text{(分部积分法例(2))}$$
$$= \frac{1}{3}e^{x^3}(x^3-1) + C$$

3. 作积分 $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = ?$

(解) 在式子 $\sqrt{a^2-x^2}$ 里面，我們可以用 $a\sin x$ (或 $a\cos x$) 來代替变量 x，因为 x 的变动范围限於 $[-a, a]$；

$$x = a\sin u$$

那末，

$$\sqrt{a^2-x^2} = a\sqrt{1-\sin^2 u} = a\cos u$$

$$dx = a\cos u\,du$$

代入

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx &= a^2\int\cos u\cdot\cos u\,du\\ &= a^2\int\cos^2 u\,du\\ &= \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2u)\,du\\ &= \frac{a^2}{2}\left(u+\frac{1}{2}\sin 2u\right)+C\\ &= \frac{a^2}{2}(u+\sin u\cos u)+C\end{aligned}$$

由 $x = a\sin u$，得 $u = \arc\sin\frac{x}{a}$ 及 $\cos u = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，

最后，$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arc\sin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$ (公式 XIV)

4. 作积分 $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$

(解) 在式子 $\sqrt{x^2-a^2}$ 里面，我們可以設

$$\frac{x}{a} = \sec u.$$

那末 $\sqrt{x^2-a^2} = a\,\mathrm{tg}\,u$

$$dx = a\sec u\,\mathrm{tg}\,u\,du$$

代入

$$\begin{aligned}&a^2\int\sec u\,\mathrm{tg}^2 u\,du\\ &= a^2\int\sec^3 u\,du - a^2\int\sec u\,du\\ &= a^2\left[\frac{1}{2}\sec u\,\mathrm{tg}\,u+\frac{1}{2}\ln|\sec u+\mathrm{tg}\,u|\right]\\ &\quad - a^2\ln|\sec u+\mathrm{tg}\,u|+C_1\\ &= \frac{a^2}{2}\left[\sec u\,\mathrm{tg}\,u - \ln|\sec u+\mathrm{tg}\,u|\right]+C_1\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx &= \frac{a^2}{2}\left[\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} - \ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|\right]+C_1\\ &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C\end{aligned}$$ (公式 XV)

(注意) 按同理，可得

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left[x+\sqrt{x^2+a^2}\right]+C$$

(公式XVI)

5. 作积分 $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

(解) 設 $x=\operatorname{tg}u$ ， $dx=\sec^2u\,du$

$1+x^2=\sec^2u$

代入

$$\int\frac{\sec^2u\,du}{\sqrt{(\sec^2u)^3}}=\int\frac{du}{\sec u}=\int\cos u\,du$$
$$=\sin u+C$$
$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$$

習題 4-1-丙

作积分

(1) $\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+a^2}\,dx$

(2) $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$

(3) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$

(4) $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{4+x^5}}$

(5) $\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

(6) $\int\frac{(\ln x)^m}{x}\,dx$

(7) $\int e^x(\sin e^x)\,dx$

(8) $\int\frac{3x-1}{x^2-9}\,dx$

(9) $\int e^{x^2}x\,dx$

(10) $\int\cos^3x\sin 2x\,dx$

(11) $\int\frac{\sin 2x\,dx}{1+\cos^2x}$

(12) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

(13) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ （置換 $x+1=z$ ）

(14) $\int\frac{dx}{\sqrt{ax+b+m}}$

(15) $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

(16) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

(17) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(18) $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$

(19) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$

[提示] 用尤拉氏代换法可以求這個积分，設

$$\sqrt{x^2\pm a^2}=t-x$$

其中 t 是新变量，取上式两边的平方，得

$$x^2\pm a^2=t^2-2tx+x^2$$

$$\pm a^2=t^2-2tx$$

取两边的微分

$$0=2t\,dt-2t\,dx-2x\,dt$$

所以 $$t\,dx=(t-x)\,dt$$

$$\frac{dx}{t-x}=\frac{dt}{t}$$

代入 $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\int\frac{dx}{t-x}=\int\frac{dt}{t}$$

$$=\ln|t|+C$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$$

我們得到两個公式

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln[x+\sqrt{x^2+a^2}]+C \qquad (\text{公式 XVII})$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln[x+\sqrt{x^2-a^2}]+C \qquad (\text{公式 XVIII})$$

20. $$\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x-2}}$$

[提示] $$3x^2-4x-2=3\left(x^2-\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}\right)$$

$$=3\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{10}{9}\right]$$

$$=3\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2\right]$$