普通高等院校大学数学系列教材

高等数学教程

李顺初 陈子春
王玉兰 徐艳艳 编著

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等院校大学数学系列教材

高等数学教程

李顺初　陈子春
王玉兰　徐艳艳　编著

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书是根据地方性高等院校文理兼收的经济、管理类专业本科数学教学要求，参照教育部最新颁布的研究生入学考试中数学三的考试大纲编写而成的.

本书内容共9章，分别为函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数的微积分、无穷级数、微分方程、差分方程. 每节后配有习题，每章后配有本章概要与补充例题及总习题.

本书结构严谨、逻辑清晰、叙述清楚、文字流畅、例题丰富、习题量较大，注重经济应用. 可供普通高等院校经济、管理类专业本科学生及非数学类专科学生选用，也可供理工科学生参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学教程/李顺初等编著. —北京：科学出版社，2009
(普通高等院校大学数学系列教材)
ISBN 978-7-03-025080-3

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 127511 号

责任编辑：王 静 唐保军 / 责任校对：李奕萱
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009年8月第一次印刷 印张：28 1/4
印数：1—4 000 字数：555 000

定价：39.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书是依据经济、管理类各专业的微积分课程教学基本要求以及教育部最新颁布的研究生入学考试中数学三的考试大纲编写而成的．为了适应经济、管理类各专业对数学要求越来越高的趋势，结合我们长期讲授该门课程的经验，于 2008 年由西华大学经济数学课题组成员编写了此教材．本书继承和保持了在西华大学广泛使用且深受好评的《高等数学简明教程》(秦昌明编)的优点．

吴文俊院士语："总的一句话，中国这个数学的道路跟西方欧几里得的传统公理化的数学道路是不一样的，中国的数学是另外一套，中国没有什么公理，没有什么公理系统，根本不考虑定理．中国主要是解决问题，这是我的分析了．开头也是不懂，因为它的古文的文字我就看不懂，我先看通俗的，然后再看原文，因为古文的专门名字跟现在是大不相同了．就这样慢慢一点一点地弄懂．所以中国的古代数学，为了要解决形形色色的问题，自然而然引到解方程．那么中国的解方程它是这样子的，是一步一步地做，第二步怎么样，第三步怎么样，要用现代的语言来讲就是程序．根据算法用现在的话，你就可以编成程序，输到机器里面，让他一步一步去做，最后给出要求的解答，这是中国的数学．"

遵循这一思路，本教材在结构体系、内容安排、习题配置等方面努力体现经济管理类专业的特色：注意加强对学生应用数学方法解决经济问题的能力的培养；适当淡化严密的纯理论性的推导而加强对学生"清晰的直觉和必要的推理"这方面的训练；在保证教学要求的同时，让教师比较容易组织教学，学生比较容易理解接受；在章节内容上注重说明有关内容的关联和地位；在概念的引入上注重从实际例子、几何直观出发并增加有益的说明和注释；在讲解常用方法时，清楚地列出程序化的步骤，做到脉络清晰、化难为易；为学生将来利用数学分析的方法讨论更深入的经济问题打下良好的基础．

本书内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数的微积分、无穷级数、微分方程、差分方程共 9 章．第 1、第 2、第 6 章由李顺初编写，第 3～5 章由陈子春编写，第 7～9 章由王玉兰编写，附录和部分习题解答由徐艳艳完成，全书由李顺初统稿．电子科技大学的贾闻惠副教授阅读了部分书稿，秦昌明教授审阅了全书．编写与修改过程中一直得到伊良忠教授、秦昌明

教授的大力支持和鼓舞. 在此一并致谢!

由于编者水平有限,加之时间仓促,教材中难免存在不妥之处,希望专家、同行、读者批评指正,使本书在教学实践过程中不断完善.

编　者

2008 年 12 月

目 录

前言
第 1 章 函数与极限 …… 1
1.1 数系简介 …… 1
1.2 函数及其特性 …… 5
1.3 初等函数 …… 14
1.4 数列的极限 …… 21
1.5 函数的极限 …… 28
1.6 极限的运算法则 …… 34
1.7 极限存在准则及两个重要极限 …… 39
1.8 无穷大与无穷小 …… 47
1.9 连续函数 …… 53
概要与补充例题 …… 61
总习题一 …… 68
第 2 章 导数与微分 …… 71
2.1 导数的概念 …… 71
2.2 求导法则 …… 81
2.3 高阶导数 …… 90
2.4 函数的微分 …… 93
2.5 导数与微分在经济学中的应用 …… 100
概要与补充例题 …… 110
总习题二 …… 116
第 3 章 中值定理与导数的应用 …… 119
3.1 中值定理 …… 119
3.2 洛必达法则 …… 126
3.3 函数的单调性与极值 …… 132
3.4 函数曲线的凹凸性与函数图形的描绘 …… 139
3.5 函数的最值及其在经济学中的应用 …… 145
概要与补充例题 …… 150

总习题三 …… 155
第 4 章　不定积分 …… 157
4.1　不定积分的概念和性质 …… 157
4.2　换元积分法 …… 164
4.3　分部积分法 …… 175
概要与补充例题 …… 181
总习题四 …… 185
第 5 章　定积分 …… 187
5.1　定积分的概念 …… 187
5.2　定积分的性质 …… 193
5.3　微积分学基本公式 …… 197
5.4　定积分的换元积分法 …… 203
5.5　定积分的分部积分法 …… 208
5.6　广义积分 …… 211
5.7　定积分的几何应用 …… 220
5.8　定积分的经济应用 …… 229
概要与补充例题 …… 235
总习题五 …… 240
第 6 章　多元函数的微积分 …… 242
6.1　空间解析几何简介 …… 243
6.2　多元函数的基本概念 …… 252
6.3　偏导数及其经济应用 …… 260
6.4　全微分及其应用 …… 269
6.5　多元复合函数的求导法则 …… 273
6.6　隐函数的求导公式 …… 280
6.7　多元函数的极值及其应用 …… 284
6.8　二重积分 …… 293
概要与补充例题 …… 307
总习题六 …… 313
第 7 章　无穷级数 …… 317
7.1　常数项级数的概念和性质 …… 317
7.2　正项级数及其审敛法 …… 323
7.3　任意项级数敛散性的判别 …… 332

7.4 幂级数 …… 336
7.5 函数的幂级数展开 …… 344
概要与补充例题 …… 353
总习题七 …… 358
第 8 章 微分方程 …… 360
8.1 微分方程的基本概念 …… 360
8.2 一阶微分方程 …… 363
8.3 可降阶的高阶微分方程 …… 373
8.4 二阶常系数线性微分方程 …… 376
概要与补充例题 …… 386
总习题八 …… 390
第 9 章 差分方程 …… 392
9.1 差分方程的基本概念 …… 392
9.2 一阶常系数线性差分方程 …… 394
9.3 二阶常系数线性差分方程 …… 397
9.4 差分方程在经济学中的简单应用 …… 401
概要与补充例题 …… 404
总习题九 …… 406
部分习题答案与提示 …… 408
参考文献 …… 435
附录 备查知识 …… 436
附 1 极坐标简介 …… 436
附 2 复数简介 …… 436
附 3 三角公式 …… 438
附 4 初等几何 …… 439

第 1 章　函数与极限

在初等数学中，我们所学的内容基本上是一些确定性的、有限步骤的、有理数的四则运算及其反运算(解方程)；还有与此相关推理的逻辑合理性. 在大学的基础数学课(微积分、线性代数、随机数学)中，我们将要学习的主要内容是：有关无穷的运算、数学结构和随机性的研究，其中微积分的主要内容是无穷变动的量的研究.

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学的研究对象则是变动的量. 函数是对现实世界中各种变量之间的相互依存关系的一种抽象，它是微积分学研究的基本对象. 在中学时，我们对函数的概念和性质已经有了初步的了解，在 1.1～1.3 节中，我们将进一步阐明函数的一般定义，介绍函数的简单性态以及反函数、复合函数、基本初等函数和初等函数以及一些经济学中常见的函数等概念，这些都是学习这门课程的基础.

函数(变量)是微积分学研究的基本对象，而极限方法是研究变量的一种基本方法. 微积分学中其他的一些重要概念，如微分、积分、级数等都是建立在极限概念的基础之上的. 因此，有关极限的概念、理论与方法，自然成为微积分学的理论基石. 在 1.4～1.8 节中，将讨论数列极限与函数极限的定义、性质及基本计算方法；在此基础上，在 1.9 节讨论函数的连续性及其一些重要性质.

1.1　数 系 简 介

研究函数离不开变量的取值问题，因而我们首先从研究的基本量——数开始.

1.1.1　数系

所谓数系，通常指包括自然数(零和正整数)、整数、有理数、实数和复数的系统. 这些数之间的关系如图 1.1 所示.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{零和正整数}\\ \text{负 整 数}\end{array}\right\}\text{整数}\\ \text{分数}\end{array}\right\}\text{有理数}\\ \text{无理数}\end{array}\right\}\text{实数}\\ \text{虚数}\end{array}\right\}\text{复数}$$

图 1.1

1. 几个数系(集)

(1) 所有自然数构成的集合$\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$称为**自然数系(集)**. 习惯上，常把数 0 包括在自然数中，记为 $\mathbf{N}$；若不包括数 0 在内，常记为 $\mathbf{N}^+$.

(2) 所有整数构成的集合记为 $\mathbf{Z}$，称为**整数系(集)**.

(3) 所有有理数构成的集合记为 $\mathbf{Q}$,称为**有理系(集)**.

(4) 所有实数构成的集合记为 $\mathbf{R}$,称为**实数系(集)**.

(5) 所有复数构成的集合记为 $\mathbf{C}$,称为**复数系(集)**.

2. 实数系的几何模型——数轴

微积分学以研究实数的四则运算为基础,并在此基础上着重研究函数的运算.因此,本教材只在个别的章节里为了处理问题的方便,使用了复数,在没有特别申明的章节里,所谓数,总是指实数.

实数可以看成是对线段长度进行度量的结果.从这一观点出发,在中学数学里,已经建立了实数系的一个几何模型——**数轴**.

数轴是一条规定了原点、方向和单位长度的直线,也叫数直线.轴的原点 O 与实数系中的 0 对应,轴上其他的点 A,则根据以长度单位度量线 OA 时所得的结果 a(即 OA 的长度)以及 OA 的方向与数轴的方向一致与否,分别与实数 a 与 $-a$ 对应.当数轴水平放置、方向向右时,也就是根据点 A 在原点 O 的右侧或左侧分别与实数 a 与 $-a$ 对应(图 1.2).

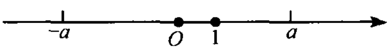

图 1.2

注 (1) 数轴上每一点都与一个实数对应,并且不同的点对应不同的数.反过来,任意给定一个实数,也必有数轴上的某一个确定的点与该数对应.换句话说,在数轴与实数系之间建立了点与数的一一对应关系.

(2) 实数间的大小顺序与对应点居右、居左的位置顺序是完全一致的.

(3) 以后,对数轴上的点与实数不作区别,凡谈到数轴上的点,即是指该点所对应的实数,反之亦然.

3. 几何直观数的稠密性

在数轴上直观地看,我们不难得到如下的关于数的稠密性的一些重要性质:

(1) 自然数分布稀疏离散,每一个自然数 n 与其后继者 $n+1$ 之间不再有其他的自然数,而形成一段间隔.

(2) 有理数的分布虽然密集,不存在明确的间隔,但是全部有理数依然没有布满数轴,而是留下了无数(由无理数形成)的空隙.

(3) 以全部无理数填入有理数所留下的空隙,恰好连续成一条完整的数直线——数轴.实数系在直观上表现出来的这一特征,被称为实数系的**连续性**,是实数系区别于有理数系的最重要的特点.

高等数学的基本理论就是建立在实数系的连续性之上的,而不像初等数学那样大多时局限在有理数范围内,认识到这点对今后学习高等数学是非常重要的.

1.1.2 绝对值及其性质

数轴给实数赋予了几何上的直观，距离是几何上的基本量，因而研究实数的绝对值是有必要的也是必然的.

1. 绝对值的定义

一个实数 a 的**绝对值**记为 $|a|$，其定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

由此可知，$|a|$ 总是表示正数或零，且有 $|a|=\sqrt{a^2}$.

2. 绝对值的几何意义

就几何上来说，$|a|$ 在数轴上表示点 a 与原点 O 之间的距离. 一般来讲，数轴上两个点 a 与 b 之间的距离用绝对值来表示就是 $|a-b|$.

3. 绝对值的性质

(1) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$；

(2) $|ab|=|a||b|$；

(3) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}, b\neq 0$；

(4) 若 $|a|\leqslant k, k\geqslant 0$，则有 $-k\leqslant a\leqslant k$，反之亦然；若 $|a|\geqslant k, k\geqslant 0$，则有 $a\geqslant k$ 或 $a\leqslant -k$，反之亦成立；

(5) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$；

(6) $|a-b|\geqslant |a|-|b|$.

性质(1)～性质(4)，根据绝对值的定义证明是明显的，在此只给出性质(5)、性质(6)的证明. 事实上，由性质(1)有

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|,$$
$$-|b|\leqslant b\leqslant |b|,$$

将两式相加，有

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|,$$

这等价于不等式

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|.$$

而对于性质(6)，只要注意到

$$|a|=|a-b+b|\leqslant |a-b|+|b|.$$

移项可得

$$|a-b|\geqslant |a|-|b|.$$

在高等数学课程中，时常要用到上述有关绝对值的知识，请读者务必掌握.

1.1.3　区间和邻域

1. 区间

区间指介于两个数之间的数的全体组成的集合. 它是微积分中常用的一类数集. 它们的记号和定义如下(其中 $a,b\in\mathbf{R}$)：

开区间　$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$；

闭区间　$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$；

半开半闭区间　$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$，　$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$；

无限区间　$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}$，　$[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$，

$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\}$，　$(-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}$，　$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$.

注　(1) 前四个区间也称为**有限区间**，a,b 分别称为区间的**左端点**和**右端点**，$b-a$ 称为**区间长度**.

(2) $+\infty$和$-\infty$分别读作“正无穷大”和“负无穷大”，它们不表示数值，仅仅是记号，切勿将符号$\pm\infty$与绝对值很大的数混为一谈.

(3) 在不一定要指明区间是开的或闭的以及是有限的或无限的场合，就简单地称其为**区间**，并且常用字母 I 或 X 等表示.

2. 邻域

邻域也是微积分学中常用到的特殊的开区间. 以点 a 为中心的任何开区间称为**点 a 的邻域**，记作 $U(a)$.

设 δ 是任一个正数，则开区间$(a-\delta,a+\delta)$就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\mid |x-a|<\delta\},$$

其中，点 a 是这**邻域的中心**，δ 是这**邻域的半径**(图 1.3).

因为$|x-a|$表示点 x 与点 a 间的距离，所以 $U(a,\delta)$表示：与点 a 距离小于 δ 的一切点的全体.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

其中，$0<|x-a|$就表示 $x\neq a$(图 1.4).

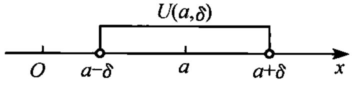

图 1.3

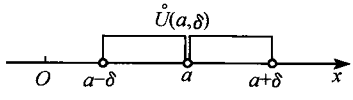

图 1.4

为了方便,有时把开区间$(a-\delta,a)$称为a的**左δ邻域**,把开区间$(a,a+\delta)$称为a的**右δ邻域**.

习 题 1.1

1. 用区间表示满足下列不等式的所有x的集合:

(1) $|x|\leqslant 3$; (2) $|x-2|\leqslant 1$; (3) $|x-a|<\varepsilon$(a为常数,$\varepsilon>0$);

(4) $|x|\geqslant 5$; (5) $|x+1|>2$; (6) $x^2<9$;

(7) $|x+3|<2$; (8) $1<|x-2|<3$.

2. 用不等式或绝对值不等式表示下列各区间:

(1) $(-2,3)$; (2) $[-2,2]$; (3) $(5,+\infty)$.

3. 已知$|x-a|<\frac{\varepsilon}{2}$,$|y-b|<\frac{\varepsilon}{2}$,试证:$|(x+y)-(a+b)|<\varepsilon$.

4. 已知$|x-a|<\frac{|a|}{2}$,试证:$\frac{|a|}{2}<|x|<\frac{3|a|}{2}$.

5. 证明下列不等式:

(1) 当$|x+1|<\frac{1}{2}$时,有$|x-2|<\frac{7}{2}$;

(2) 当$|x-1|\leqslant 1$时,有$|x^2-1|\leqslant 3|x-1|$.

6. 用区间和集合分别表示当$a=-1,a=0,a=1$时的$\frac{1}{2}$邻域和去心邻域.

1.2 函数及其特性

函数是微积分学所研究的基本对象.在中学数学里,我们已经讨论过函数的概念,在本节,将作一个必要的回顾和复习.

1.2.1 函数的概念

1. 定义

定义 1.2.1 设D是一个非空的实数集(记为$D\subset\mathbf{R}$),x,y是两个变量,f是定义在D上的一个对应关系(法则),如果对于任意的实数$x\in D$,都有唯一的实数$y\in\mathbf{R}$通过f与之对应,则称f是定义在D上的一个**函数**,记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中,x是**自变量**,y是**因变量**.自变量的取值范围D称为函数f的**定义域**(也常记为D_f,即$D_f=D$),所有函数值$f(x)$构成的集合$\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$称为函数f的**值域**(常记为W或$f(D)$或R_f,即$W=R_f=f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$).

注 (1) 决定一个函数$y=f(x)(x\in D)$的是两个因素:一是定义域D;二是

D 上的函数关系 f，即与每一个 $x\in D$ 对应的函数值. 两个函数相同，指的是两者有相同的定义域，并且对于定义域中的每一点，两个函数有相同的取值，否则应视为不同的函数. 但在不至于混淆的情况下，函数的定义域可以省略，不予标出，甚至将函数简记为 $f(x)$ 或 f.

(2) 在实际问题中，要根据问题的条件或实际意义确定函数的定义域. 对于用公式形式给出的函数，如果没有其他附加条件，则认为函数的定义域是使得公式有意义的一切 x 值，这种定义域称为函数的**自然定义域**.

(3) 当自变量 x 取数值 $x_0\in D_f$ 时，与 x_0 对应的因变量 y 的数值称为定义在 D_f 上的函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，这时，也说函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义.

(4) 在函数的定义中，对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为**单值函数**. 如果给定一个对应法则，按这个法则，对每个 $x\in D$，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，我们称这种法则确定的是一个**多值函数**. 对于多值函数，往往只要附加一些条件，就可以将它化为单值函数，这样得到的单值函数称为多值函数的**单值分支**. 例如，在由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出的对应法则中，附加"$y\geqslant 0$"的条件，即以"$x^2+y^2=r^2$ 且 $y\geqslant 0$"作为对应法则，就可得到一个单值分支 $y=y_1(x)=\sqrt{r^2-x^2}$；附加"$y\leqslant 0$"的条件，即以"$x^2+y^2=r^2$ 且 $y\leqslant 0$"作为对应法则，就可得到另一个单值分支 $y=y_2(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$.

(5) 表示函数的记号是可以任意选取的，除了常用的 f 外，还可用其他的英文字母或希腊字母，如"g"、"F"、"φ"等. 相应地，函数可写作 $y=g(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$ 等. 有时还直接用因变量的记号来表示函数，即将函数记作 $y=y(x)$. 但在同一个问题中，讨论到几个不同的函数时，为了表示区别，需用不同的记号来表示它们.

(6) 在数学上，所谓定义一个函数 f，就是给定它的定义域 D，同时确定 D 中的每一个数 x 所对应的函数值 $f(x)$. 至于以何种形式给定，可以是公式，也可以是表格、图形，甚至可采用文字叙述，并无定则. 但在本教材中，常用数学式子表示函数，其优点在于准确简明，行文方便，适宜作数学运算与理论分析，必要时还用图像直观显示其函数的几何性质，便于读者理解.

2. 分段函数

有的函数可以用一个式子表示，如 $y=\ln x$，$x>0$ 等，这类函数我们在中学数学里有了广泛的见识. 但在自然科学、工程技术和经济学中还常会遇到在其定义域的不同范围内要用不同的数学式子来表示(即在不同范围内有不同的对应关系)的函数，这类函数称为**分段函数**. 下面列举几个常用的分段函数的例子.

绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$[0,+\infty)$,如图 1.5 所示.

符号函数

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

其定义域是 **R**,值域是$\{-1,0,1\}$,如图 1.6 所示. 对于任何实数 x,下列关系式成立:

$$x = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|.$$

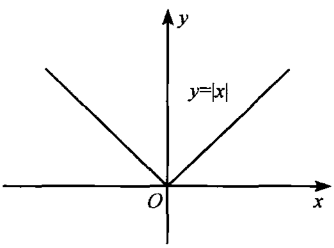

图 1.5

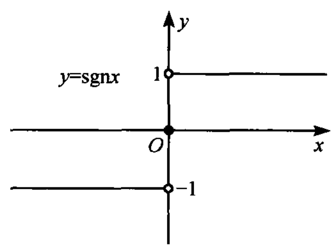

图 1.6

取整函数 设 x 为任意一个实数,不超过 x 的最大整数称为 x 的**整数部分**,记为$[x]$. 例如,$[2]=2$,$[\sqrt{2}]=1$,$\left[-\dfrac{1}{2}\right]=-1$,$[-\pi]=-4$.

这个函数可分段表示如下:

$$y = [x] = n, \quad n \leqslant x < n+1, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

它的定义域为 **R**,值域为 $\mathbf{Z}=\{$整数$\}$,如图 1.7 所示.

注 分段函数是用几个式子合起来表示一个函数,而不是几个函数.

例 1.2.1 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1+x, & x > 1 \end{cases}$$

是一个分段函数(图 1.8). 它的定义域为

$$D = [0,1] \cup (1, +\infty) = [0, +\infty).$$

当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时,$y=2\sqrt{x}$;当 $x>1$ 时,$y=1+x$.

例如,$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{2}$,$f(1)=2\sqrt{1}=2$,$f(3)=1+3=4$.

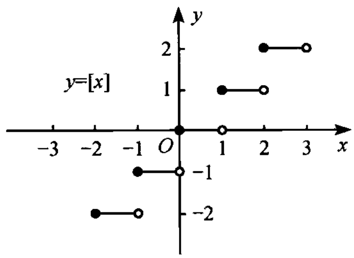

图 1.7

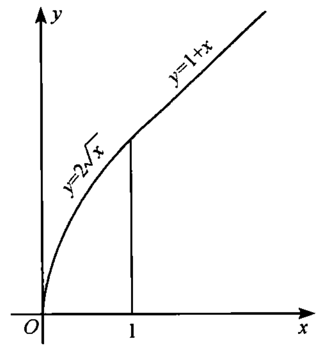

图 1.8

例 1.2.2　根据个人所得税法规定：个人工资、薪金所得应缴纳个人所得税. 假设个人应纳税所得额与税率之间的关系如表 1.1 所示. 试写出个人月工资、薪金收入 x 与应缴纳税款 y 之间的函数关系.

表 1.1

级　数	全月个人工资、薪金收入 x/元	应纳税所得额	税率/%
1	$x\leqslant 2000$	0	
2	$2000<x\leqslant 2500$	$x-2000$	5
3	$2500<x\leqslant 4000$	$x-2500$	10
4	$4000<x\leqslant 7000$	$x-4000$	15
5	$x>7000$	$x-7000$	20

解　当 $x\leqslant 2000$ 时，不必纳税，这时税款额 $y=0$.

当 $2000<x\leqslant 2500$ 时，超过 2000 的部分 $x-2000$ 应纳税，税率为 5%，税款额为

$$y=\frac{5(x-2000)}{100}=\frac{1}{20}(x-2000).$$

当 $2500<x\leqslant 4000$ 时，前 2500 元的税款额为 $500\times\frac{5}{100}=25$ 元. 超过 2500 的部分 $x-2500$ 的税率为 10%，应纳税额为 $\frac{10(x-2500)}{100}=\frac{1}{10}(x-2500)$，因此这时税款额为

$$y=25+\frac{1}{10}(x-2500).$$

类似地，可得 $4000<x\leqslant 7000$ 时的税款额为 $y=175+\frac{3}{20}(x-4000)$；$x>7000$ 时的税款额为 $y=625+\frac{1}{5}(x-7000)$.

最后得到关于个人月工资、薪金收入 x 与应缴纳税款 y 之间的一个分段函数