數 學 全 書

第二册 代數

Von H. Weber 著

鄭 太 朴 譯

商 務 印 書 館 發 行

中華民國二十三年七月初版
中華民國二十四年五月三版
（55784B）

數學全書 第二册 代數

Enzyklopadie der Elementarmathematik
Zweites Buch, Algebra

每册定價大洋壹元捌角
外埠酌加運費匯費

原著者 Von H. Weber
譯述者 鄭太朴 上海河南路

發行人 王雲五 上海河南路
印刷所 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

（本書校對者緆靜盦）

八

目次

第十二章

一次方程　行列式

第十三章

二次三次及四次之方程

第十四章

整函數

第十五章

對稱函數 錯列類之不變式

第十六章

數字方程之近似解法

第十七章

圓之分割

第十八章
不可能之證明

數學全書

第二册 代數

第十二章 一次方程 行列式

§ 74. 一元及二元一次方程

1. 前於第三章內,曾以如次之問題,確定除法之意義:設 a, b 爲已知數,則當求一數 x,使其適合下列之條件:

(1) $$ax=b$$

吾人並知恆有一數,亦祇有一數 $x=\dfrac{b}{a}$ 能適合此條件,惟 a 須不爲 0 方可. 若 $a=0$ 而 b 不等於 0, 則無有此項 x 可求,若 a 與 b 俱爲 0, 則 x 可取任何值,恆能適合此條件.

(1) 名爲一元一次方程, x 之任何值,凡能適合此方程者,名爲此方程之根.

尋常之課題書中,多採集有極多的問題,或爲日常生活上所可遇見之事,或則出於某種科學,令學者將其列爲方程以求其解. 此項問題中,每有來源極古,歷數千年而傳至今日者,且各時代之已開化民族,均是貢獻於此.[1] 古

---

1. 例如古埃及 Ahmes 之算書,古希臘之算術的歌謠, Muhammed ibn Musa 之代數, Leonardo von Pisa 之 Liber Abaci, Luca Paciuolo 及 Cossisten 之算書,等等. 古時傳下之此項問題,大多爲鍛鍊智性之用,故殊有價值,以云實際生活上之需要,則相去殊遠. 近時對於習題,多注重其能使人瞭然於方程之意義者,俾學者知代數方程於實際生活及科學之要求上,有何等重大之作用,其方針頗爲合宜也.

算書中之所謂"三數法"(Regeldetri),其所從事者實亦爲一次方程上之問題.

2. 今試由其他一較廣之觀點出發,以研究**1.**中之問題.(1)之左端可單獨取之,並用一字母表之如下:

$$y=ax \tag{2}$$

此中之a爲一定數,但x則視之爲可變動者.今使x取若不同之值,則於x之每一值,y亦有一確定之值.如爲之量y,其值決定於一其他的量x之值者,名爲一函數.[1]如(2)中所表出者,y名爲x之一次函數.x旣變動,則y自亦隨之而變.故吾人稱x爲自變數,y爲依變數.爲表明y爲x之函數計,吾人亦用$f(x)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$等符號.因之,**1.**中之問題,亦可如次提出之:

自變數x取何值時,一次函數$y=ax$取一定之值$y=b$?

今仍保存字母y,則

$$x=\frac{y}{a} \tag{3}$$

1. 例如車票之價目,爲距離之函數,所納的稅之多少爲所得之函數,一地方之平均溫度爲緯度及地高之函數,氣體之壓力爲體積及溫度之函數.

吾人恆可假定,所編之函數係用一確定的算式以表出之者,故x取某一値時,y之值卽可計算而得.此項概念,實肇自Leibniz,但經Johann Bernoulli及Euler始漸普及.以上所用較廣之定義,源於Dirichlet氏,見Repert. d. Phys. 1 (1837), Ostwalds Klassiker Nr. 116,但Euler亦曾先已用之(Instit. calc. diff., Petrop. 1755, pag VI),其中並包有不能用確定的算式以表出之函數,例如有某種函數,於一切有理的x取1爲值,於一切無理的x則取0爲值.參閱Pringsheim, Grundlagen d. allg. Funktionenlehre (Enzyklopädie d. math. Wiss. 2, 1).

爲此問題之解. 故亦可云: 解一方程之法,與將一已知函數倒轉之法相同,於此,原來之自變數,用依變數以表出之.

3. 倘於 (1) 內兩端各減 b, 則 **1.** 內之問題復可變其方式,而方程乃成爲如下之式:

$$ax-b=0 \tag{4}$$

此種方式,謂之將方程內之項遷於一端,使他端成爲0. 今以 y 表其左端,

$$y=ax-b \tag{5}$$

並視 x 爲變數,則此式仍爲 x 之函數, 且仍爲一次函數.[1] 因之,用 (1) 或 (4) 以表出之問題,亦可如是提出之:

自變數 x 取何值時, 一次函數 $y=ax-b$ 之值爲 0?

x 之此項值, 名爲函數之零點. 廣之, 吾人可云:

求解一端爲 0 之方程, 與求一已知函數之零點之意義相同.

4. 今有二個二元一次方程, 則吾人恆可將其寫成爲下式:

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y&=c_1 \\ a_2x+b_2y&=c_2, \end{aligned} \tag{6}$$

於此, a_1, b_1, c_1 及 a_2, b_2, c_2 均爲已知數. 吾人可假定, b_1 與 b_2 二數中至少有一非爲0, 否則未知數 y 將不存在矣. 今

1. (2) 內之函數, 實爲一特例, 即 $b=0$ 時之特例是.

如 b_1 非為0,則由第一方程,可得

$$(7)\qquad y=\frac{c_1-a_1x}{b_1},$$

即 y 為 x 之一次函數. 將 y 之式代入第二方程內,即有

$$a_2x+\frac{b_2}{b_1}(c_1-a_1x)=c_2.$$

此為一一元一次方程,故可云,吾人已將另一元 y 消去之.

由此,即不難得

$$x(a_1b_2-a_2b_1)=c_1b_2-c_2b_1,$$

故如 $a_1b_2-a_2b_1$ 一式非為0,則即有

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

x 之值既得,即可由(7)以得 y 之值.

5. 以上之方法,在用其一方程將一未知數用他未知數以表出之,然後將所得者代入其他方程內,以得其解,故謂之代入法. 於此,方程內之二未知數,用法不能全同,故多有不用此法,而採取一對稱的方法者,即方程內之量,均同等的使用之. 今明其法如下:

先用 $b_2, -b_1$ 乘方程(6),再用 $-a_2, a_1$ 乘之,並每次於除後加之,則第一次後 y 被消去,第二次後 x 被消去,而得

$$(8)\qquad \begin{aligned} x(a_1b_2-a_2b_1)&=c_1b_2-c_2b_1\\ y(a_1b_2-a_2b_1)&=a_1c_2-a_2c_1. \end{aligned}$$

此處 x 與 y 之因子

$$a_1b_2-a_2b_1=D, \tag{9}$$

名爲方程系統(6)之行列式,亦可如下寫之:

$$a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

四數目 a_1, b_1, a_2, b_2 之此種結合法,謂之一二次的行列式. 方程(8)之右端,自亦可用行列式表之,故得一定理如下:

方程系統(6)之行列式 D 如非爲0,則有一對數目,亦祇有此一對數目

$$x=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad y=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \tag{11}$$

能充適原來之方程.

6. 但如 $D=0$, 則可假定 a_1, b_1, a_2, b_2 諸數中無有爲0者. 蓋如 $b_1=0$ 或 $a_2=0$, 則亦必 $a_1b_2=0$, 卽 $a_1=0$ 或 $b_2=0$, 於是(6)中將祇有一方程或祇有一未知數矣. 由 $a_1b_2-a_2b_1=0$, 可知

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1},$$

故如以 λ 表此分數之值,則得

$$a_2=\lambda a_1,\quad b_2=\lambda b_1.$$

於是(6)中之二方程,卽爲

$$a_1x+b_1y=c_1$$

$$\lambda(a_1x+b_1y)=c_2,$$

故若此二方程可相容,則必 $c_2=\lambda c_1$ 而後可,即

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\frac{c_2}{c_1}.$$

但如是則不僅 $D=0$, 且其他的行列式亦均爲0:

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=0.$$

因而 (6) 中二方程,相互間並非無關係者,蓋第二方程實由第一方程得之也. 於是吾人可使 x 任取一值, y 之值即由之而定. 總括之,可得一定理如下:

倘(6)之行列式 D 爲 0, 而(12)中之行列式有不等於 0 者,則(6)中二方程本身間有矛盾,故無有根可求. 倘(12)中二行列式同時亦等於 0, 則(6)之二方程中之一,可得自他方程,故有無限多之解.

7. 關於二次的行列式,可較詳的一論之.

a_1, b_1, a_2, b_2 諸數,名爲行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

之元素. 此行列式由二行二列所成,每一行或列內有二元素.

倘將 b_1 與 a_2 相易,行列式之值仍不變:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

此即是: 行列式內行與列互易時,式之值仍不變.

8. 倘將二列互易之,則有

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_2b_1 - a_1b_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

將二行互易時亦然,故:

二行或二列互易時,行列式變其號.

9. 倘行列式內某一列有公因子,即 $a_1 = m\alpha_1$, $b_1 = m\beta_1$, 則

$$\begin{vmatrix} m\alpha_1 & m\beta_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = m(\alpha_1 b_2 - \beta_1 a_2) = m\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

行內有公因子時亦然,故:

行內或列內之公因子,可將其置於行列式之前.

§75. 三元一次方程.

1. 三個三元一次方程之普通形式如下:

$$(1) \qquad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

其中之 a_i, b_i, c_i, d_i $(i=1, 2, 3)$ 爲已知數.

求解此項方程時,可用<u>培素</u>(Bézout)之法[1],將二未知數同時消去之.今先用不定的數u_1, u_2, u_3依次乘三方程,並將其加之.於是再如是決定u_1, u_2, u_3之值,使y及z之係數爲0,即

$$\begin{aligned} b_1u_1+b_2u_2+b_3u_3&=0\\ c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3&=0. \end{aligned}\tag{2}$$

按此二方程以決定u_1, u_2, u_3後,y與z即被消去,故祇餘一個方程,其中僅有x者:

$$(a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3)x=d_1u_1+d_2u_2+d_3u_3.\tag{3}$$

今將方程(2)視爲u_2, u_3二未知數之方程,則按前節之**5.**,**8.**,及**9.**,有

$$\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} u_2=\begin{vmatrix} -b_1u_1 & b_3 \\ -c_1u_1 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} u_1$$

$$\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} u_3=\begin{vmatrix} b_2 & -b_1u_1 \\ c_2 & -c_1u_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} u_1.$$

爲簡便計,可設

$$\begin{gathered} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1, \quad \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}=a_2, \\ \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}=a_3, \end{gathered}\tag{4}$$

則有
$$a_1u_2=a_2u_1, \quad a_1u_3=a_3u_1.$$

---

1. Bézout, Théorie générale des équations algébriques, 1779.

今如設[1]

$$u_1=a_1,\ u_2=a_2,\ u_3=a_3,$$

則此項方程即能充適，因而(2)亦被充適．於是按(3)，有

$$(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3)x=d_1\alpha_1+d_2\alpha_2+d_3\alpha_3. \tag{5}$$

仿此，吾人亦可將 x 與 z 消去，祇須用 v_1, v_2, v_3 乘方程(1)，加之，並按

$$\begin{aligned} c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3&=0\\ a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3&=0 \end{aligned} \tag{6}$$

以決定 v_1, v_2, v_3 三數．於是得一方程，以 y 為未知數．為簡便計，設

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} c_2 & c_3\\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}=\beta_1,\quad \begin{vmatrix} c_3 & c_1\\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}=\beta_2,\\ \begin{vmatrix} c_1 & c_2\\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}=\beta_3, \end{aligned} \tag{7}$$

則方程(6)可為

$$v_1=\beta_1,\quad v_2=\beta_2,\quad v_3=\beta_3$$

所充適，故得 y 之式如下：

$$(b_1\beta_1+b_2\beta_2+b_3\beta_3)y=d_1\beta_1+d_2\beta_2+d_3\beta_3. \tag{8}$$

最後，復用 w_1, w_2, w_3 乘方程(1)，並使

$$\begin{aligned} a_1w_1+a_2w_2+a_3w_3&=0\\ b_1w_1+b_2w_2+b_3w_3&=0, \end{aligned} \tag{9}$$

---

1. 廣之，吾人亦可用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 之任何倍數於 u_1, u_2, u_3，所得仍無不同．

以及設

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \gamma_1, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = \gamma_2,$$

(10)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \gamma_3,$$

則方程(9)可爲

$$w_1 = \gamma_1, \quad w_2 = \gamma_2, \quad w_3 = \gamma_3$$

所充適,而得 z 之式爲

(11) $$(c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3)z = d_1\gamma_1 + d_2\gamma_2 + d_3\gamma_3.$$

2. (5) 內 x 之因子,倘其 a_1, a_2, a_3 仍易以(4)中之值,則得

(12) $$D = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1.$$

如將(8)與(11)中 y 與 z 之因子算出,可知其值亦爲 D. 吾人稱 D 爲方程系統(1)之行列式,寫之作

(13) $$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

此爲一第三次的行列式,由 $3 \cdot 3 = 9$ 個元素所成. 諸二次的行列式 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$ 名爲 D 之亞行列式.

(5) 之右端,所與 x 之因子不同者,則 a_1, a_2, a_3 與 d_1, d_2, d_3 之差別是. (8) 與 (11) 中之右端,與 y 及 z 之因子之差別,亦在 b_1, b_2, b_3, 以及 c_1, c_2, c_3 與 d_1, d_2, d_3 之不同. 因之, (5), (8) 及 (11) 之右端,亦爲三次的行列式,吾人祇須於 D 中

將其第一行,第二行,第三行以 d_1, d_2, d_3 易之卽可. 今將其如次表之:

$$D_1=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

(14)

$$D_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

則得一定理如下:

倘方程系統 (1) 之行列式 D 非爲 0, 則有一系統之根, 亦祇有此系統之根:

(15) $$x=\frac{D_1}{D}, \ y=\frac{D_2}{D}, \ z=\frac{D_3}{D}.$$

3. 若 $D=0$, 則祇有 $D_1=0$, $D_2=0$, $D_3=0$ 時, 方程(5), (8)及(11)乃能成立. 於是 x 可隨取其值. 如 D 之諸亞行列式不完全爲 0, 而有非爲 0 者, 如 $a_1=b_2\,c_3-b_3\,c_2$ 非爲 0, 則 y 與 z 爲以下之方程所決定:

$$b_2y+c_2z=d_2-a_2x$$

$$b_3y+c_3z=d_3-a_3x$$

故於 x 之任何一值, y 與 z 有一定的值. 故可知:

倘方程系絕 (1) 之行列式 D 爲 0, 而 D_1, D_2, D_3 中有不等於 0 者, 則 (1) 中諸方程有矛盾, 故無有根可求. 倘 D_1,

D_2, D_3 與 D 同時爲0,但 D 之亞行列式非盡爲0,則其中有一未知數可隨意取其值.

如 D 之諸亞行列式亦均爲0,則吾人仍可假定,D 之一切元素不盡爲0,蓋否則方程系統(1)將全不存在矣.今如 c_3 非爲0,則由(1)之末一方程,可知

$$z=\frac{d_3-a_3x-b_3y}{c_3}, \tag{16}$$

將其代入(1)中第一二二方程後,得

$$\begin{aligned} \beta_2x-a_2y&=d_1c_3-d_3c_1 \\ -\beta_1x+a_1y&=d_2c_3-d_3c_2 \end{aligned} \tag{17}$$

故如 $a_1=\beta_1=a_2=\beta_2=0$,則亦必 $d_1c_3-d_3c_1=0$, $d_2c_3-d_3c_2=0$,因而方程(17)於任何 x, y 均可充適,方程(1)亦然.於是對於 x, y 之每一對值,可由(16)以得 z 之值.故於此種狀況下,二未知數爲隨意者.

§76. n次之行列式. n元一次方程

1. 今試按前節中之式(12),詳細一觀三次行列式之構造定律.行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

由九元素所成,分配於三列三行內,作平方形之排列.平方形中自左上角至右下角之對角線,設之主要對角線,其