线性规划与随机线性规划

XIANXING GUIHUA YU SUIJI XIANXING GUIHUA

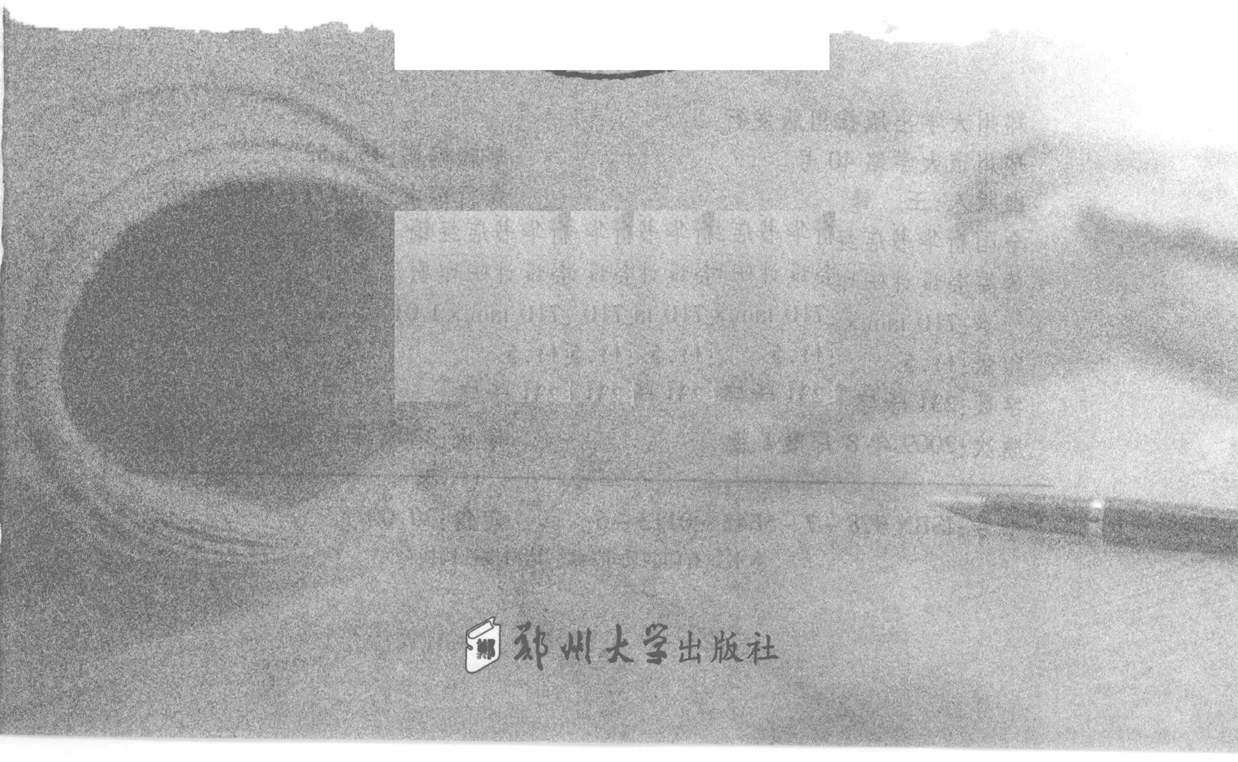
庞碧君　编著

郑州大学出版社

线性规划与随机线性规划

XIANXING GUIHUA YU SUIJI XIANXING GUIHUA

庞碧君　　编著



郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性规划与随机线性规划/庞碧君编著.—郑州:郑州大学出版社,2009.8

ISBN 978-7-5645-0113-6

Ⅰ.线… Ⅱ.庞… Ⅲ.①线性规划②随机规划:线性规划 Ⅳ.O221

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 100074 号

郑州大学出版社出版发行

郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052

出版人:王　锋　　发行部电话:0371-66966070

全国新华书店经销

黄委会设计院印刷厂印制

开本:710 mm×1 010 mm　　1/16

印张:11.5

字数:231 千字

版次:2009 年 8 月第 1 版　　印次:2009 年 8 月第 1 次印刷

书号:ISBN 978-7-5645-0113-6　　定价:20.00 元

内容提要

本书分为线性规划和随机线性规划两大部分内容.在线性规划中,介绍了线性规划的理论、方法和应用,内容包括线性规划的单纯形方法、对偶单纯形方法、互补基解性质的应用研究、灵敏度分析与参数线性规划等;在随机线性规划中,介绍了期望值模型、机会约束规划模型、机会约束规划的确定性等价类、机会约束规划的α可靠度线性规划和正态随机规划的确定性规划及其灵敏度分析,介绍了带有补偿的二阶段数学规划模型和随机运输问题.

本书可作为应用数学、运筹学、管理科学、信息科学及经济学等专业高年级本科生和研究生的教材或参考书,也可供相关专业的研究人员阅读参考.

前言 PREFACE

运筹学是研究如何把科学的方法、技术和工具应用到一个系统的各种管理问题上并提供最优的解决问题的方法，它是数学领域中一门重要的应用数学学科.线性规划是运筹学的一个非常重要的分支，最早提出和研究线性规划问题的是苏联数学家康托洛维奇，1939年，他在《生产组织与计划中的数学方法》一书中提出了类似线性规划问题的模型.被誉为“线性规划”之父的美国数学家丹泽格在1947年提出了求解线性规划问题的单纯形方法.此后线性规划的理论、方法和应用得到逐步丰富和发展.线性规划是一门实用性很强的应用数学学科，20世纪70年代一项对全世界计算机数值计算时间的统计表明，大部分机时是用于线性规划的求解上，由此可见线性规划在整个应用数学中的重要性.如果线性规划问题中带有随机参数，就变成了随机线性规划问题，它是20世纪50年代后期兴起的随机运筹学中的一个重要分支.目前，随机线性规划的许多方面还不完善，特别是计算方法不很成熟，但它在工程、管理、经济、工业和军事等领域的应用中已显示出了非常重要的作用.基于线性规划和随机线性规划在应用数学学科中的重要性和它广泛的应用前景，作者经过努力写出了这本《线性规划与随机线性规划》.

本书分为线性规划和随机线性规划两大部分内容.前四章是线性规划部分，第1章介绍了线性规划问题.第2章介绍了单纯形方法.第3章介绍了对偶单纯形方法、原始－对偶单纯形法和互补基解性质的应用研究.第4章介绍了灵敏度分析与参数线性规划.第5章至第8章是随机线性规划部分，第6章介绍了期望值模型法.第7章介绍了机会约束规划模型、机会约束规划的确定性等价类、机会约束规划的α可靠度线性规划和正态随机规划的确定性规划及其灵敏度分析等内容.第8章介绍了带有补偿的二阶段数

学规划模型.作为线性规划和随机线性规划的应用,在第9章中,给出了运输问题的进一步研究.

本书在解释概念时,尽量做到由易到难,由实际到理论;在引进算法上,力求方法的实用性;在理论证明的过程中,努力做到严谨透彻.考虑到理工科和管理学科的本科生、研究生、研究人员阅读的需要,书中数学基础既与本科生所学知识衔接,又适当提高了数学理论的基础.

衷心感谢在本书的编著和出版过程中给予我大力支持的同事和朋友们.

由于作者水平有限,书中难免存在疏误之处,恳请各位读者批评指正.

作　者
2009年3月

目 录 CONTENTS

第 1 章 线性规划问题

线性规划是运筹学的一个重要分支,它研究的问题主要有两类:一类是当任务确定后,如何安排最少的人力、物力资源完成这一任务;另一类是如何统筹安排已有的人力、物力资源,使完成的任务最多. 这两类问题是求最优问题的两个方面. 因为线性规划在解决这类问题方面的简单、有效性,所以它广泛应用于工业、农业、商业、交通运输等许多领域. 本章首先通过几个实例,说明线性规划的研究对象,抽象出线性规划问题的数学模型,然后介绍线性规划问题的标准形式和线性规划问题解的性质,为后面建立线性规划的算法打下基础.

1.1 线性规划问题的数学模型

1.1.1 常见线性规划问题的数学模型

1.1.1.1 生产组织与计划问题

设用 $A_1, \cdots, A_m$ 种资源,可以生产 $D_1, \cdots, D_n$ 种产品,现有资源数 b_i,每单位产品所需资源数 a_{ij},每单位产品可得利润数 $c_j (i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n)$,有关数据如表 1.1 所示. 问如何组织生产才能使利润最大?建立该问题的数学模型.

表 1.1

	D_1	D_2	$\cdots$	D_n	资源量
A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
利润	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	

解

① 确定决策变量：设 x_j 为生产产品 D_j 的计划数($j=1,\cdots,n$)；

② 确定目标函数：利润最大，求 $z=c_1x_1+\cdots+c_nx_n$ 的最大值；

③ 满足的约束条件：

资源约束 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \quad (i=1,\cdots,m)$，

基本约束 $x_j \geqslant 0 \quad (j=1,\cdots,n)$.

用 max 表示求最大值，s. t(*subject to*) 表示约束条件，这一问题的数学模型是

$$\max z = c_1x_1+\cdots+c_nx_n;$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i & (i=1,\cdots,m),\\ x_j \geqslant 0 & (j=1,\cdots,n).\end{cases}$$

1.1.1.2 配料问题

设用 n 种原料 $A_1,\cdots,A_n$ 制成具有 m 种成分 $B_1,\cdots,B_m$ 的产品，产品所含成分的最低需要量、原料的单价以及各种原料所含成分的数量如表 1.2 所示. 问如何配料使成本最低?建立该问题的数学模型.

表 1.2

	A_1	A_2	$\cdots$	A_n	产品所含成分需要量
B_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
B_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
单价	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

解

① 确定决策变量：设所取原料 A_j 的数量为 x_j($j=1,\cdots,n$)；

② 确定目标函数：成本最低，求 $z=b_1x_1+\cdots+b_nx_n$ 的最小值；

③ 满足的约束条件：

所含成分约束 $\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \geqslant a_i \quad (i=1,\cdots,m)$，

基本约束 $x_j \geqslant 0 \quad (j=1,\cdots,n)$.

用 min 表示求最小值，这一问题的数学模型是

$$\min z = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n;$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \geqslant a_i & (i = 1,\cdots,m),\\ x_j \geqslant 0 & (j = 1,\cdots,n).\end{cases}$$

1.1.1.3 运输问题

某种物资有 m 个产地 $A_1,\cdots,A_m$,联合供应 n 个销地 $B_1,\cdots,B_n$. 各产地产量,各销地销量,各产地至各销地单位运价如表 1.3 所示,假定产销平衡,即 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. 问如何调运才使总运费最少?建立该问题的数学模型.

表 1.3

	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

解

① 确定决策变量:设 x_{ij} 为产地 A_i 运往销地 B_j 的物资数量($i = 1,\cdots,m;j = 1,\cdots,n$);

② 确定目标函数:总运费最少,求 $z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ 的最小值;

③ 满足的约束条件:

产量约束 $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,\cdots,m)$,

销量约束 $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,\cdots,n)$,

基本约束 $x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1,\cdots,m;j = 1,\cdots,n)$.

这一问题的数学模型是

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij};$$

$$
s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & (i=1,\cdots,m),\\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j=1,\cdots,n),\\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n).\end{cases}
$$

1.1.1.4 合理下料问题

设有一批条形原材料，截成长度分别为 $A_1,\cdots,A_m$ 的管材，在一件原材料上有 $B_1,\cdots,B_n$ 种不同的下料方式，每种下料方式可得各种长度的管材个数及每种管材需要量如表 1.4 所示. 问怎样安排下料方式才能使所用原材料最少？建立该问题的数学模型.

表 1.4

	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	管材需要量
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m

解 设用 B_j 种方式下料的条形原材料数为 $x_j(j=1,\cdots,n)$，这一问题的数学模型是

$$
\min z = \sum_{j=1}^{n} x_j;
$$

$$
s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \geqslant a_i & (i=1,\cdots,m),\\ x_j\geqslant 0, x_j\text{ 为整数} & (j=1,\cdots,n).\end{cases}
$$

1.1.1.5 投资问题

设有一笔资金 P 万元，可在三年时间内用于投资，有 A,B,C,D 四种投资项目可供选择：项目 A 每年均可投资，每年可增值的百分数是 α；项目 B 每年均可投资，第一年可增值的百分数是 β，第二年以后每年可增值的百分数是 γ；项目 C 必须在第一年投资，以后就不能投资，到第三年末可增值的百分数是 λ；项目 D 只能在第二年初投资，到第三年末可增值的百分数是 δ. 试制定投资计划，使得第三年末增值后的总额最大. 建立该问题的数学模型.

解 确定决策变量：$x_{i1}(i=1,2,3)$（万元）表示项目 A 在第 i 年年初的投资资

金；$x_{i2}(i=1,2,3)$（万元）表示项目 B 在第 i 年年初的投资资金；x_{13}（万元）表示项目 C 在第一年年初的投资资金；x_{24}（万元）表示项目 D 在第二年年初的投资资金.

第三年末的总资金（万元）是

$$z=(1+\alpha)x_{31}+(1+\gamma)x_{32}+(1+\lambda)x_{13}+(1+\delta)x_{24}.$$

约束条件

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}\leqslant P,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{24}+x_{13}\leqslant P+\alpha x_{11}+\beta x_{12},$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{13}+x_{24}\leqslant P+\alpha x_{11}+\beta x_{12}+\alpha x_{21}+\gamma x_{22}.$$

该问题的数学规划模型是

$$\max z=(1+\alpha)x_{31}+(1+\gamma)x_{32}+(1+\lambda)x_{13}+(1+\delta)x_{24};$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}\leqslant P,\\ -\alpha x_{11}-\beta x_{12}+x_{13}+x_{21}+x_{22}+x_{24}\leqslant P,\\ -\alpha x_{11}-\beta x_{12}-\alpha x_{21}-\gamma x_{22}+x_{13}+x_{24}+x_{31}+x_{32}\leqslant P,\\ x_{11},x_{21},x_{31},x_{12},x_{22},x_{32},x_{13},x_{24}\geqslant 0.\end{cases}$$

1.1.2 线性规划问题的一般形式

前面我们建立了几个常见问题的数学模型，虽然它们实际意义不一样，但它们的数学模型具有相同的数学形式，那就是表示问题最优化指标的函数都是线性函数，称这个函数为目标函数；表示约束条件的数学式子都是线性等式或线性不等式，称其为约束条件. 根据模型的特点，我们把这类问题称为线性规划问题.

线性规划问题数学模型的一般形式是

$$\min(\text{或}\max)z=c_1x_1+\cdots+c_nx_n;$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_1,\\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_2,\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_m.\end{cases}$$

1.1.3 线性规划问题的标准形式

规定线性规划问题的标准形式为

$$\min z=c_1x_1+\cdots+c_nx_n;$$

$$
s.t.\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \\ x_j\geqslant 0\quad (j=1,\cdots,n). \end{cases}
$$

用和式表示，其形式是

$$
\min z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j;
$$

$$
s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\quad (i=1,\cdots,m), \\ x_j\geqslant 0\qquad (j=1,\cdots,n). \end{cases}
$$

$z=c_1x_1+\cdots+c_nx_n$ 称为**目标函数**，$\min z$ 表示求目标函数的最小值，$c=(c_1,\cdots,c_n)$ 称为**价值向量**，其中 $c_j(j=1,\cdots,n)$ 称为**价值系数**，由 a_{ij} 组成的矩阵

$$
A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

称为**约束矩阵**，向量 $b=(b_1,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}(b\geqslant 0)$ 称为**右端向量**，$x_j(j=1,\cdots,n)$ 为**决策变量**，$x_j\geqslant 0(j=1,\cdots,n)$ 为**非负约束**，如果一个向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 满足约束条件，就称它为**可行解**，使目标函数取得最优值的可行解称为**最优解**，称由所有可行解组成的集合为**可行域**，可行域可以表示为 $D=\{x\mid Ax=b,x\geqslant 0\}$.

采用向量和矩阵的形式，线性规划问题数学模型的标准形式是

$$
\min z=cx;
$$

$$
s.t.\begin{cases} Ax=b, \\ x\geqslant 0. \end{cases}
$$

或

$$
\min_{x\in D} cx.
$$

上述标准形式的线性规划问题可以简称为 LP 问题，LP 是 linear programming 的缩写.

非标准形式的线性规划问题都可以化成标准形式的线性规划问题，这是因为

(1) 如果一个线性规划问题是求 $\max z$，可以转化为 $\min(-z)$.

(2) 如果一个线性规划问题的某一约束条件是线性不等式

$$
\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j\leqslant b_k,
$$

它可以转化为

$$
\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j+x_{n+k}=b_k,\quad x_{n+k}\geqslant 0;
$$

如果一个线性规划问题的某一约束条件是线性不等式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lj}x_j \geqslant b_l,$$

它可以转化为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lj}x_j - x_{n+l} = b_l, \quad x_{n+l} \geqslant 0.$$

增添的变量 x_{n+k} 和 x_{n+l} 称为**松弛变量**,松弛变量在目标函数中的系数为零.

(3) 如果一个线性规划问题的某一变量 x_j 无非负限制,可以引入两个非负变量 $x_j' \geqslant 0$ 和 $x_j'' \geqslant 0$,令 $x_j = x_j' - x_j''$,并将 $x_j' - x_j''$ 代入目标函数和约束条件中,这就将它化为了对所有变量都有非负限制的线性规划问题.

(4) 如果一个线性规划问题的某一约束条件中的 $b_i < 0$,就将不等式或等式两边同乘以 -1.

例 1.1 将下列线性规划问题化为标准形式,

$$\max z = -x_1 + 3x_2 - 4x_3;$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 \geqslant 10, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \leqslant 15, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant -3, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \leqslant 0, x_3 \text{ 无约束}. \end{cases}$$

解 令 $z' = -z, x_2' = -x_2, x_3 = x_3' - x_3''$. 该线性规划问题的标准形式是

$$\min z' = x_1 + 3x_2' + 4x_3' - 4x_3'';$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1 - x_2' - 2x_3' + 2x_3'' - x_4 = 10, \\ -2x_1 - 3x_2' - x_3' + x_3'' + x_5 = 15, \\ -2x_1 + x_2' - 3x_3' + 3x_3'' - x_6 = 3, \\ x_1, x_2', x_3', x_3'', x_4, x_5, x_6 \geqslant 0. \end{cases}$$

若令 $y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2', \quad y_3 = x_3', y_4 = x_3'', \quad y_5 = x_4, y_6 = x_5, y_7 = x_6$, $y = (y_1, \cdots, y_7)^{\mathrm{T}}, c = (1,3,4,-4,0,0,0), b = (10,15,3)^{\mathrm{T}}$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

则标准形式又可以表示为

$$\min z' = cy;$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} Ay = b, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

1.2 线性规划问题解的性质

1.2.1 预备知识

定义 1.1 设 x^1、x^2 为集合 $C \subset E^n$ 中的任意两点，若 x^1、x^2 连线上的所有点 $\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2 \in C, 0 < \alpha < 1$，则称 C 为 E^n 中的凸集.

从直观看凸集没有凹入部分，其内部没有空洞. 三角形，实心六面体等都是凸集. 规定空集也是凸集.

很容易证明，若 C 是凸集，λ 是实数，则集合 $\lambda C = \{x \mid x = \lambda y, y \in C\}$ 也是凸集；任何一组凸集的交集仍然是凸集.

例 1.2 证明 $D = \{x \mid Ax = b, x \geqslant 0, x \in E^n\}$ 是凸集，其中 E^n 是 n 维向量组成的集合.

证 任意给定两点 x^1、x^2，$x^1 \in D$，$x^2 \in D$，$0 < \alpha < 1$，显然有

$$\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2 \geqslant 0,$$

且

$$\begin{aligned} A(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) &= \alpha A x^1 + (1-\alpha)Ax^2 \\ &= \alpha b + (1-\alpha)b \\ &= b. \end{aligned}$$

即 $\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2 \in D$，这就证明了 $D = \{x \mid Ax = b, x \geqslant 0, x \in E^n\}$ 是凸集.

同样，可以证明 $D_+ = \{x \mid Ax \geqslant b, x \geqslant 0, x \in E^n\}$，$D_- = \{x \mid Ax \leqslant b, x \geqslant 0, x \in E^n\}$，$\overset{0}{D}_+ = \{x \mid Ax > b, x \geqslant 0, x \in E^n\}$，$\overset{0}{D}_- = \{x \mid Ax < b, x \geqslant 0, x \in E^n\}$ 都是凸集.

定义 1.2 设 $b \in E^1$，非零向量 $a \in E^n$，称 $H = \{x \mid ax = b, x \in E^n\}$ 为 E^n 中的一个超平面，向量 a 称为 H 的法向量.

一个超平面将空间 E^n 分为两部分，称为半空间. 若半空间包含超平面，称为闭半空间，$H_+ = \{x \mid ax \geqslant b, x \in E^n\}$ 和 $H_- = \{x \mid ax \leqslant b, x \in E^n\}$ 都是闭半空间；若半空间不含有超平面上的点，称为开半空间，$\overset{0}{H}_+ = \{x \mid ax > b, x \in E^n\}$ 和 $\overset{0}{H}_- = \{x \mid ax < b, x \in E^n\}$ 都是开半空间. 闭半空间和开半空间都是凸集.

E^n 中有限个闭半空间的交集是凸集，这样的凸集称为多面凸集或多面体. $D = \{x \mid Ax = b, x \geqslant 0, x \in E^n\}$ 和 $D_+ = \{x \mid Ax \geqslant b, x \geqslant 0, x \in E^n\}$ 都是多面凸集.

定义 1.3 设 C 是 E^n 中的凸集，$x \in C$，若 x 不是 C 中任一线段的内点，即若

$x = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2, x^1 \in C, x^2 \in C, \alpha \in (0,1)$，必有 $x^1 = x^2 = x$，则称 x 为 C 的极点.

定义 1.4 设 $C \neq \phi$ 是 E^n 中的一个凸集，$d \in E^n, d \neq 0$，若对任一 $x \in C$ 及 $\lambda > 0$，射线 $x + \lambda d \in C$，则称 d 为 C 的一个方向. 如果一个方向不能表示成两个方向的正线性组合，就称该方向为 C 的极方向.

定理 1.1 设 $D = \{x \mid Ax = b, x \geqslant 0, x \in E^n\}$ 的所有极点为 $x^1, \cdots, x^k$，极方向为 $d^1, \cdots, d^l$，则 $x \in D$ 的充分必要条件是存在一组数 $\lambda_i \geqslant 0 (i = 1, \cdots, k)$，$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ 与另一组数 $\mu_j \geqslant 0 (j = 1, \cdots, l)$，使

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d^j.$$

本书略去定理 1.1 的证明，有兴趣的读者可以阅读有关参考书籍. 定理 1.1 的一种特殊情况是 D 为有界凸集，这时 D 没有极方向，定理 1.1 就可以叙述为定理1.2.

定理 1.2 设 $D = \{x \mid Ax = b, x \geqslant 0, x \in E^n\}$ 为有界集，所有极点为 $x^1, \cdots, x^k$，则 $x \in D$ 的充分必要条件是存在一组数 $\lambda_i \geqslant 0 (i = 1, \cdots, k)$，$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$，使

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i.$$

1.2.2 线性规划问题解的性质

定义 1.5 设 x 是线性规划问题

$$\min z = cx;$$
$$s.t. \begin{cases} Ax = b, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

的一个可行解，若 $x = 0$，或 x 的非零分量所对应的系数列向量线性无关，则称可行解 x 为基础可行解或基本可行解. 使目标函数取最小值的基础可行解，称为基础最优解或基本最优解.

设线性规划问题的系数矩阵 A 的秩为 m，A 中 m 个线性无关的列向量组成满秩方阵 B，A 中其余各列组成的子阵记为 N，不妨设 $A = (B, N)$，把 $x = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 的分量相应分为两部分，记作 x_B 和 x_N，$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$，则 $Ax = b$ 可以表示为

$$Bx_B + Nx_N = b,$$

两边同乘以 B^{-1}，移项后得

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N,$$