排列组合
概率论及其应用

下 册

赵人杰 编

中国人民解放军洛阳外国语学院

1980

排列组合
概率论及其应用

下　册

赵人杰　编

下册目录

第二部分　概率论

第三部分　数理统计初步

第一章　随机事件及其概率

§1. 前言

概率也叫或然率、可能率或机率，通俗地说，它是表示某一事件发生的“可能性”大小的一个量。

宇宙间的各种现象，有一类称为“必然现象”。例如，水在一个大气压下加温到100°C，则必然沸腾。另一类称为“随机现象”，即带有随机性、偶然性的现象。例如，随意抛掷一枚分币，其结果可能是出现正面，也可能是出现反面，事先无法肯定。

必然现象具有某种“因果规律”，即只要实现某些确定的条件，就肯定会发生某个结果。如上面所举的例子，一个大气压和100°C的温度就是条件，这些条件一经实现，则必然发生“水沸腾”这一结果。物理学、化学、数学中的许多定理、定律都是阐明必然性的因果规律。随机现象不具备这种因果律，但随机现象也是有规律的，不过这种规律的表现形式不同罢了。例如，随意掷一枚分币，掷少数几次看不出什么规律，如果掷的次数很多，则可发现：出现正面的次数大约占一半左右。据此，我们说“出现正面”有$\frac{1}{2}$的机会，或者说“出现正面”的可能性为$\frac{1}{2}$。$\frac{1}{2}$就是反映掷分币这个随机现象的客观规律的一个数值。

类似的例子很多，一台自动车床在一定条件下进行大量生产，它所加工的产品的合格率常常是稳定的；分子物理学中研究气体分子的运动规律，个别分子运动的方向和速度由于受许多复杂因素的影响而具有随机性，但由于分子的数量很大，其随机性互相抵消，因而表现出某些稳定的物理性质，如气压等；一门火炮在一定条件下进行射击，个别炮弹的弹着点可能偏离目标而有随机性的误差，但大量炮弹的弹着点则表现出一定的规律性，如一定的命中率，一定的分布规律等等。

这种在一定条件下对某种现象的大量观测中表现出来的规律性叫做“集体规律”，或叫“统计规律”。随机现象常常表现出这样那样的集体规律，这正是概率论所研究的对象。现代概率论已发展成为一个内容极为丰富的数学分支，它在物理学、通信理论、炮兵射击理论以及工农业生产中都有广泛的应用。

恩格斯曾经指出：“在表面上看去是发生着偶然性的地方，其实这种偶然性本身总是服从于内部隐藏着的规律的。全部问题就在于发现这种规律。”“偶然性只是必然性的补充和表现形式。”概率论就是帮助我们认识、掌握和运用随机现象规律性的一门科学。

§2. 随机事件

在一些确定条件下对某事物进行试验或观测，如果这种试验或观测具有以下两个性质，称为随机试验：（1）试验结果是随机的，即试验出现什么结果事先不能予见，只有在试验已经做过之后才会知道；（2）试验能够在相同条件(至少是大体相同)下重复多次地进行，因为只有在这种情况下，才谈得上大量现象的集体规律性。随机试验简称试验。

试验的结果称为事件。

在一次试验中可能发生也可能不发生的事件叫做随机事件，必然发生的事件叫做必然事件，必然不发生的事件叫做不可能事件。为了处理上的方便，我们把必然事件和不可能事件都看成随机事件的特例。

例1．掷一枚分币，“出现正面”就是一个随机事件，因为在一次试验中，它可能发生，也可能不发生。样同，“出现反面”也是一个随机事件。

例2．火炮在一定条件下射击，“命中目标”和“不命中目标”都是随机事件，

例3．在一张字母表中统计100个字母，看其中有多少个“a”，这是一次试验。如果我们关心的是a的个数是否大于8，那么“a的个数不大于8”就是一个随机事件。

事件一般用大写字母A，B，C，…表示。习惯上，必然事件和不可能事件分别用字母U，V表示。

一个事件的反面叫做该事件的相反事件，或者叫做对立事件、逆事件。例如，掷分币“出正面”与“出反面”；射击“命中”与“不命中”；a 的个数“大于8”与“不大于8”都互为相反事件。事件 A 的相反事件一般用记号 $\overline{A}$ 表示。

§3. 概率的古典定义

如前所说，随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生，事先难以完全予料。然而，不同的随机事件，其发生的可能性的大小是不同的。例如，从一批产品中抽查一件，如果这批产品中的合格品比例很大，那么，抽到的产品是合格品的可能性也大；反之，如果这批产品中的合格品比例较小，那么抽到合格品的可能性也就小一些。数学上希望用一个量表示某事件发生的可能性的大小，这个量就是概率。在概率论发展的历史上，概率的概念最初是从一些简单的“机会游戏”中产生的，由此形成了概率的古典定义。

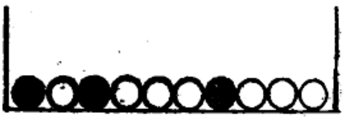
例1．掷一枚分币，出现正面的可能性多大？

掷一枚分币，有两种可能情形：出现正面、出现反面。如果掷时是随意的，且分币的构造是均匀的，那么，这两种情形具有相等的出现机会（或者说，具有等可能性）。在这两种机会相等的可能情形中，出现正面的情形占一种，所以我们说：出现正面的可能性为$\frac{1}{2}$，或者说，出现正面的概率为$\frac{1}{2}$。

以 A 表示“出现正面”这个事件，$P(A)$ 表示 A 出现

的概率，那么$P(A)=\frac{1}{2}$，A的对立事件$\overline{A}$表示“出现反面”，其概率也等于$\frac{1}{2}$，即$P(\overline{A})=\frac{1}{2}$。

例2．袋中有大小相等的10个球，7个是白球，3个是红球，从袋中随意摸出一个球，得红球的可能性有多大？



从袋中摸出一个球，每个球都可能被取到，有$C_{10}^{1}=10$种可能情形。因为摸时是随意的，不带有主观意向，所以每个球被摸到的机会是相等的。在这10种机会相等的可能情形中，得红球的情形占3种，所以恰好摸得红球的可能性为$\frac{3}{10}$，或者说，得红球的概率为$\frac{3}{10}$。

以A表示事件“得红球”，则$P(A)=\frac{3}{10}$，

A的对立事件是“得白球”，其概率为$\frac{7}{10}$，即$P(\overline{A})=\frac{7}{10}$。

定义：如果在一次试验中，有m种机会相等的可能情形，其中事件A出现的情形（简称“有利情形”）有n种，那么，比值$\frac{n}{m}$叫做事件A出现的概率，记作$P(A)$：

$$P(A)=\frac{(\text{对}\ A)\ \text{有利情形数}}{\text{可能情形数}}=\frac{n}{m}$$

这个定义叫做概率的古典定义，适用这个定义的概率问题通常叫做“古典概型”。这里要注意，古典概型必须具备以下两个条件：第一，在一次试验中可能发生的结果只有有限多个（有限性），即可能情形数 m 必须是一个有限数，否则不能应用古典定义；第二，所有 m 种可能情形一定要“机会相等”（等可能性），否则也不能应用古典定义。例如，某射手射击的可能情形有 2 种：命中，不命中，能不能说他命中的概率是 $\frac{1}{2}$ 呢？显然不能，因为这两种情形一般说来并不是等可能的。

因为有利情形只是全部可能情形中的一部分，所以

$$0 \leqslant n \leqslant m$$

$$\therefore 0 \leqslant \frac{n}{m} \leqslant 1$$

即

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

这就是说，任一事件的概率总是介于 0 与 1 之间的一个数。如果 $P(A)=1$，则 A 为必然事件；如果 $P(A)=0$，则 A 为不可能事件。

在 m 种可能情形中，事件 A 出现的情形有 n 种，那么，A 不出现的情形有 $m-n$ 种，A 不出现即是 $\overline{A}$ 出现，所以

$$P(\overline{A})=\frac{m-n}{m}=1-\frac{n}{m}=1-P(A)$$

$$\therefore P(A)+P(\overline{A})=1$$

即两个对立事件的概率之和等于 1。

§4. 例题

本节举一些例子，说明如何应用古典定义计算概率。由这些例子看出：计算古典概率实际上主要用到排列组合的知识。

例 1．同时掷两个分币，都出现正面的概率多大？出现一正一反的概率多大？

分析：掷一个分币有两种机会相等的可能情形：正、反；根据排列组合中的乘法定理，掷两个分币有 $2\times2=4$ 种可能情形，它们是：

正正　正反　反正　反反

这 4 种可能情形显然是机会相等的，其中两个分币都出现正面的情形只有 1 种，所以两个都出现正面的概率为 $\frac{1}{4}$，

在这 4 种可能情形中，一正一反的情形有 2 种，所以出现一正一反的概率是$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，这说明掷两个分币时，出现一正一反的可能性比出现两个正面的可能性大一倍。

例 2．任意取一组双码，得到重码的概率是多少？

分析：双码是由两个数码组成的排列，如果两个数码相同，就叫做重码。双码的第一位有10种可能情形(0—9)，第二位也有 10 种可能情形，搭配起来有 $10^2=100$ 种可能情形。在任意取的情况下，这 100 种可能情形是机会相等的，其中有利情形（出现重码）有10种：

0 0　1 1　2 2　……　9 9

所以得到重码的概率为

$$P=\frac{10}{10^2}=0.1$$

例 3．袋里有10个红球、5个白球，从袋中随便摸出3个球，3个都是白球的概率是多少？摸出4个，正好2红2白的概率是多少？

分析：袋中一共有15个球，任意取出3个，有C_{15}^3种机会相等的可能情形，3个都是白球的情形有C_5^3种，所以3个都是白球的概率是

$$p_1=\frac{C_5^3}{C_{15}^3}=\frac{2}{91}\doteq 0.02$$

从15个球中任意摸出4个，有C_{15}^4种机会相等的可能情形，2红2白的情形有$C_{10}^2\cdot C_5^2$种，所以2红2白的概率是：

$$p_2=\frac{C_{10}^2\cdot C_5^2}{C_{15}^4}=\frac{30}{91}\doteq 0.33$$

例 4．任意取一个中文电报号码，四个数码不重复的概率是多少？四个数码不重复且排成自然序的概率是多少？

分析：中文电报号码是允许重复的排列，总共有$10^4=10000$个。任取一个中文电报号码，可能情形有10000种，其中四个数码不重复的情形有$A_{10}^4=5040$种；四个数码不重复

且排成自然序的情形有$C_{10}^4=210$种。所以

（1）四个数码不重复的概率是：

$$p_1=\frac{A_{10}^4}{10^4}=\frac{5040}{10000}=0.504$$

（2）四个数码不重复且排成自然序的概率是：

$$p_2=\frac{C_{10}^4}{10^4}=\frac{210}{10000}=0.021$$

例5．一批产品共20个，其中有5个废品，现在从这批产品中任意抽查3个，至少有1个废品的概率是多少？

分析：从20个产品中抽查3个，有C_{20}^3种可能情形；至少有1个废品的情形数可将以下三种情形加起来：1废2好，2废1好，3废，即$C_5^1C_{15}^2+C_5^2C_{15}^1+C_5^3$种；故所求概率为：

$$p=\frac{C_5^1C_{15}^2+C_5^2C_{15}^1+C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{137}{228}\doteq 0.6$$

另一种解法："至少有1个废品"的对立事件是"3个都不是废品"，后者的概率比较容易计算，它等于$C_{15}^3\Big/C_{20}^3$；因为两个对立事件的概率和等于1，所以，至少有1个废品的概率为：

$$p=1-\frac{C_{15}^3}{C_{20}^3}=1-\frac{91}{228}\doteq 1-0.4=0.6$$

对比以上两种解法，显然后一种解法更为简便。这就说

明，在有些情况下，如果从反面考虑比较简便，可以先求出相反事件 $\overline{A}$ 的概率，然后应用公式

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{P(A)=1-P(\overline{A})}$$

就可以求出 A 的概率。

例 6．从一付52张扑克牌中任取13张，求出现以下事件的概率：13 张牌中包含黑桃、红心、方块各 3 张，梅花 4 张。

分析：可能情形数是 C_{52}^{13} 种，其中有利情形数为 $C_{13}^{3}C_{13}^{3}C_{13}^{3}C_{13}^{4}$ 种，故所求概率为：

$$p=\frac{\left(C_{13}^{3}\right)^{3}C_{13}^{4}}{C_{52}^{13}}$$

这个概率的计算很复杂，可以利用阶乘对数表（附表 1）：

$$p=\frac{\left(\frac{13!}{3!10!}\right)^{3}\frac{13!}{4!9!}}{\frac{52!}{13!39!}}=\frac{(13!)^{5}39!}{52!(3!)^{3}(10!)^{3}4!9!}$$

两边取对数：

$$\begin{aligned} lg\,p &= 5\,lg13!+lg39!-(lg52!+3lg3!+3lg10!+lg4!+\\ &\quad +lg9!)\\ &= 5\times 9.79428+46.309585-(67.906648+3\times\\ &\quad \times 0.778151+3\times 6.559763+1.380211+\\ &\quad +5.559763)\\ &=95.280985-96.860364\doteq\overline{2}.4206 \end{aligned}$$

查反对数表得

$$p = 0.02634 \doteq 0.026$$

这个结果表明，任取13张牌，正好得到黑桃、红心、方块各3张、梅花4张的可能性是不大的，大约只有2%—3%的机会。

习　　题

1．从0，1，2，3，……，9十个数码中任取一个，求以下事件的概率：

（1）取到的数码大于2；

（2）取到的数码能被2整除；

（3）取到的数码能被3整除；

（4）取到的数码既能被2整除，又能被3整除。

2．一个口袋装有4个红球、6个白球，

（1）任意取出1球，得红球的概率是多少？得白球的概率是多少？

（2）任意取出2球，都是红球的概率是多少？一红一白的概率是多少？

（3）任意取出3球，一红两白的概率是多少？至少有一个红球的概率是多少？

3．任意取一个五位电话号码，求数码不重复的概率。

4．只记得某单位的电话号码是由1，9，6，2四个不同的数码组成的，如果用这四个数码随便凑成一个四位电话号码来打电话，求结果恰好碰对了的概率。

5．一个盒子里有90只好的螺丝钉，10只坏的螺丝钉，如

果从盒中任意取出10只螺丝钉，恰好都是好的螺丝钉的概率是多少？

6．从26个英文字母中任意取出1个，求以下事件的概率：

（1）取得的字母是 a；

（2）取得的字母不是 a；

（3）取得的字母是元音；

（4）取得的字母是辅音。

（注：a，e，i，o，u 是元音，其余是辅音）

7．从26个英文字母中任意取出5个不同的字母，求以下事件的概率：

（1）两个元音，三个辅音；

（2）至少有一个元音；

（3）元音不超过两个。

8．一个口袋装有5红球、4白球、3黑球，从袋中任意摸出6球，求每种颜色的球各2个的概率；再求每种颜色的球都有的概率。

9．从1，2，3，4，5五个数码中任意取2个，求以下事件的概率：

（1）相加的和是偶数；

（2）相乘的积是偶数。

10．随机取一个中文电码，求

（1）恰好是1359的概率；

（2）包含1，3，5，9的概率。

11．将1，2，3，4，5，6六个数码任意打乱重排，求以下事件的概率：