高职高专"十一五"规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

主编◎李欣

合肥工业大学出版社

高 等 数 学

主 编 李 欣

合肥工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/李欣主编．—合肥：合肥工业大学出版社，2009.8

ISBN 978-7-5650-0005-8

Ⅰ．高…　Ⅱ．李…　Ⅲ．高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 130721 号

高　等　数　学

李　欣　主编　　　　责任编辑　权　怡

出　版	合肥工业大学出版社	版　次	2009 年 8 月第 1 版
地　址	合肥市屯溪路 193 号	印　次	2009 年 8 月第 1 次印刷
邮　编	230009	开　本	787 毫米×1092 毫米　1/16
电　话	总编室：0551-2903038	印　张	20.5
	发行部：0551-2903198	字　数	498 千字
网　址	www.hfutpress.com.cn	印　刷	合肥现代印务有限公司
E-mail	press@hfutpress.com.cn	发　行	全国新华书店

ISBN 978-7-5650-0005-8　　　　定价：36.00 元

前　言

为了适应21世纪人才发展的市场需要和高等职业教育发展的需要，提升高等职业技术人才的综合能力和素质，以培养应用型、实用型人才，根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学教学基本要求》，结合高等职业院校学生和教师的实际情况，我们编写了这本《高等数学》。

本教材具有以下特点：

(1)体现高职特色。教材立足于高职高专开设《高等数学》的各个专业，是理工和财经类专业的基础课。根据各专业对数学的要求，贯彻“理解概念、强化应用和适用”的教学原则，以教师好用、学生好学为编写出发点，凸显高职特色，明确技能要求。教材内容的讲解和阐述过程中，充分考虑数学知识服务于专业的需要，从学生的实际情况出发，不拔高、不刻意追求知识的系统性，而是以立足于专业“够用、实用”为基本编写原则。

(2)难易适中，统筹兼顾。通过案例分析来解决数学知识与专业知识的结合问题，以增强数学知识的应用能力。在综合习题的设置上，主要考虑知识的综合运用和学生以后升本、自学的需要，因此，难度与例题持平。

全书共分十一章，总课时为150～180学时，各院校可根据实际情况决定内容的取舍。

参加本书编写的是淮南职业技术学院基础部数学教研室的部分教师，具体编写章节是徐利民(第一章)、刘玉德(第二章)、李欣(第三、九章)、陈夕南(第四章)、刘健(第五章)、段玉林(第六、八章)、胡娟(第七章)、刘乔生、汪先林(第十章)、白灏(第十一章)，由李欣统稿。

在编辑和出版的过程中，由于任务本身的难度大，时间紧，书中难免有值得商榷和不妥之处，我们欢迎专家、同行和读者批评指正，使得本书在教学实践中不断提高和完善。

编　者

2009年4月

目　录

第一章　函数极限与连续

§1-1　初等数学函数知识复习

一、函数的概念

在实际工作中，有些量是容易控制的量或容易测量的量，而有些量是不容易直接控制的量或不容易直接测量的量，我们希望建立这两种量之间的关系，从而能够间接地控制那些不容易直接控制的量或不容易直接测量的量. 人们考虑两个变量之间的相互影响时，也要建立它们之间的关系. 这里所要研究的关系是一种单值的函数关系.

1. 函数的定义

定义 1.1.1　设有两个变量 x 和 y，当 x 在它的取值范围 D 内，任意取定一个数值时，变量 y 按照某种法则 f 有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$，

其中变量 x 称为自变量，变量 y 称为自变量 x 的函数(或因变量). 自变量 x 的取值范围 D 称为函数的定义域，对于确定的 $x_0\in D$，函数 y 有唯一确定的值 y_0 相对应，则称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作：$(y)_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

所有函数值的集合，称为函数的值域，记作 M.

这里所讨论的定义域 D 和值域 M 是由实数组成的集合. 确定一个函数需要两个要素，一是函数的定义域，二是函数的对应法则. 当定义域和对应法则确定时，函数的值域也随之确定. 实质上函数是表示定义域和值域中的数之间的对应关系，而与定义域和值域中的数用什么字母表示无关. 自然我们也可以用其他字母来表示(定义域和值域里的数)自变量和因变量. 当同时讨论多个函数时，我们也用其他字母来表示对应法则. 如

$$y=f(x),\quad y=g(x),\quad v=h(t)$$

当同时讨论的函数较多时，使用角坐标可以区别更多的函数. 如

$$y=f_1(x),\quad y=f_2(x),\cdots.$$

例 1　设 $y=f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，求 $f\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

解　$f\left(\frac{2}{\pi}\right)=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

例 2　设 $f(x+1)=x^2+3x$，求 $f(x)$.

解　设 $t=x+1$，$x=t-1$.

所以 $f(t)=(t-1)^2+3(t-1)=t^2+t-2$　即　$f(x)=x^2+x-2$

例 3　求 $y=\sqrt{4-x^2}+\ln(x^2-1)$ 的定义域.

解　由 $4-x^2\geqslant 0$ 且 $x^2-1>0$，得

$$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ x<-1\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ x>1\end{cases}$$

所以定义域为 $[-2,-1)\cup(1,2]$.

例 4　下列函数是否相同，为什么？

(1) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$；

(2) $v=\sqrt{u}$ 与 $y=\sqrt{x}$.

解　(1) 函数 $y=\ln x^2$ 定义域是 $(-\infty,+\infty)$，函数 $y=2\ln x$ 定义域是 $(0,+\infty)$ 因为定义域不同，所以它们不是相同的函数.

(2) $v=\sqrt{u}$ 与 $y=\sqrt{x}$ 是相同的函数，因为对应法则与定义域均相同.

2. 函数的表示法

函数常用三种不同的方法来表示，即表格法、图像法和公式法.

(1) 表格法：用表格把自变量的值与之对应的函数值一一列举出来，这种表示函数的方法，称为表格法.

例如某工厂 1 月至 12 月份的生产情况统计表，即月份表示自变量，产量表示自变量的函数.

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
产量(公斤)	300	302	402	450	460	480	500	480	470	465	463	420

(2) 图像法：设 $x_0\in D$，$y_0=f(x_0)$，以 x_0 为横坐标，y_0 为纵坐标，在直角坐标平面上对应一个点 (x_0,y_0)，所有这些点在直角坐标平面上构成一个图像. 这个图像称为函数 $y=f(x)$ 的图像. 同样这样的图像也可以表示一个函数.

用直角坐标平面上的图像来表示函数的方法，称为图像法.

例 5　作出函数 $y=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x+1, & x>0\end{cases}$ 的图形：

解　如图 1-1 所示. 同样也可用此图像表示该函数.

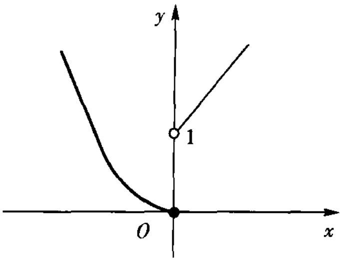

图 1-1

(3) 公式法：用公式表示函数的方法称为公式法.

例如 $y=\ln x^2$，$y=\sqrt{x^2+1}$ 等.

又如　$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 1\\ x-1, & x<1\end{cases}$

该函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，但它在定义域内不同的区间上是用不同解析式来表示的. 这样在定义域内的不同区间上用不同解析式表示的函数，称为分段函数.

表格法直接而方便查找函数值，但仅能描述离散和有限个函数值，图像法形象直观，公式法精确而便于理论分析，其各有所长和用处. 在高等数学中主要讨论的函数是以公式法表示的函数.

二、函数的几种特性

1. 有界性

若存在 $M>0$，使对任意 $x\in(a,b)$（或$[a,b]$），恒有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在(a,b)内（或$[a,b]$上）有界. 在定义域 D 上的有界函数，称为有界函数. 否则称为无界函数.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在(a,b)内（或$[a,b]$上）有定义. 若对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$（或$[a,b]$）以及 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$）则称函数 $f(x)$ 在(a,b)内（或$[a,b]$上）是单调增加的（或单调减少的）. 如图 1-2.

区间(a,b)（或$[a,b]$）称为单调增加的区间（或单调减少的区间），单调增加的区间和单调减少的区间统称为单调区间. 在定义域内单调增加的和单调减少的函数统称为单调函数.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若对任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$（或 $f(-x)=f(x)$）则称函数 $f(x)$ 是奇函数（或偶函数）.

设函数 $y=f(x)$ 是奇函数，若点$(x_0,f(x_0))$是函数图像上的点，则点$(-x_0,-f(x_0))$也是图像上的点. 所以奇函数的图像是关于坐标原点对称的.

设函数 $y=f(x)$ 是偶函数，若点$(x_0,f(x_0))$是函数图像上的点，则点$(-x_0,f(x_0))$也是图像上的点. 所以偶函数的图像是关于 y 轴对称的.

如 $y=x^2$ 是偶函数，图像关于 y 轴对称. $y=x^3$ 是奇函数，图像关于坐标原点对称.

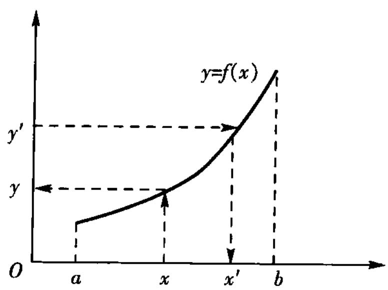

图 1-2

4. 周期性

若存在 $T\neq 0$ 使函数满足 $f(x+T)=f(x)$（任意 $x\in D$ 且 $x+T\in D$），则称函数是周期函数. T 称为函数的周期. 其中最小的正周期称为最小正周期，简称周期.

如：$y=\sin x$ 是周期函数，周期为 2π.

　　$y=\tan x$ 是周期函数，周期为 π.

三、反函数

定义 1.1.2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M，如果任给 $y\in M$，在 D 中都有唯一的 x 值，使 $y=f(x)$ 成立，此时也确定一个 y 到 x 的函数，这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 记 $x=f^{-1}(y)$，定义域为 M，值域为 D. 如图 1-3.

习惯上我们用 x 来表示自变量，y 表示自变量的函数，$y=f(x)$ 的反函数常表示为：$y=f^{-1}(x)$.

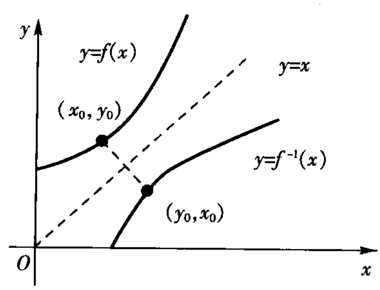

图 1-3

设 $y_0=f(x_0)$，所以 $x_0=f^{-1}(y_0)$，即如果点 (x_0,y_0) 是函数 $y=f(x)$ 图像上的点，则点 (y_0,x_0) 是反函数 $y=f^{-1}(x)$ 图像上的点. 所以，函数的图像与反函数的图像是关于直线 $y=x$ 对称.

例如，$y=x^3$ 的反函数表示为 $y=\sqrt[3]{x}$.

$y=x^2$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内没有反函数.

定理 1.1.1 单调函数一定有反函数.

四、复合函数

定义 1.1.3 设函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D，值域为 M_1，$y=f(u)$ 的定义域为 D_1，若 M_1 与 D_1 重合或部分重合，则部分或全部 x 取的值，通过 u 可唯一对应一个 y，即 y 通过 u 也是 x 的函数. 这个函数称为 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 的复合函数. 记为 $y=f(\varphi(x))$.

例 6 (1) 函数 $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$，$u=\sin x$ 复合而成的复合函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它也是 $u=\sin x$ 的定义域.

(2) 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，是由 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$ 复合而成的，其定义域为 $[-1,1]$.

例 7 $y=\arctan 2^{\sqrt{x}}$ 可以看做是 $y=\arctan u$，$u=2^v$，$v=\sqrt{x}$ 复合成的复合函数.

例 8 求函数 $y=\ln u$ 和 $u=1-x^2$ 的复合函数.

解 函数 $y=\ln u$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

函数 $u=1-x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 和值域为 $(-\infty,1]$，则复合函数 $y=\ln(1-x^2)$ 的定义域为 $(-1,1)$.

例 9 分析下列复合函数的结构：

(1) $y=2\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$； (2) $y=e^{\sin\sqrt{2x^2+1}}$.

解 (1) 函数 $y=2\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$ 是由 $y=2\sqrt{u}$、$u=\cot v$、$v=\dfrac{x}{2}$ 复合而成的函数.

(2) 函数 $y=e^{\sin\sqrt{2x^2+1}}$ 是由 $y=e^u$、$u=\sin v$、$v=\sqrt{t}$、$t=2x^2+1$ 复合而成的函数.

例 10 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解 $f(g(x))=f(2^x)=(2^x)^2=2^{2x}$，

$g(f(x))=g(x^2)=2^{x^2}$.

五、基本的初等函数

1. 幂函数

形如 $y=x^\mu$ (μ 为常数) 的函数叫做幂函数. 它的定义域随着的 μ 的取值不同而有所不同. 如当 μ 为非负整数时，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，当 μ 为负整数时，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 如图 1-4.

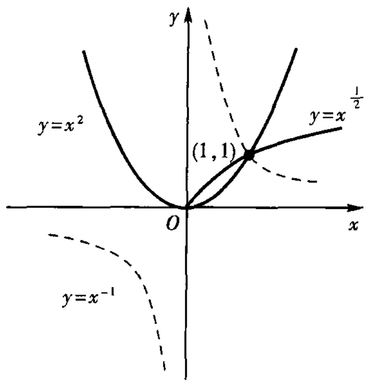

图 1-4

例 11 $y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

$y=x^{\frac{1}{2}}$，的定义域为 $[0,+\infty)$；

$y=x^{-1}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

但不论 μ 取何值，图形总过(1,1) 点，当 $\mu>0$ 时，还过(0,0) 点.

2. 指数函数

形如 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的函数称为指数函数，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，其图形总在 x 轴上方，且过(0,1) 点.

当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 是单调增加的，当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 是单调减少的. 图像都经过(1,1) 点，整个图像都在 ox 轴的上方. 如图 1－5.

3. 对数函数

指数函数 $y=a^x$ 的反函数，记为：$y=\log_a x$(a 为常数，$a>0,a\neq 1$)，称为对数函数，其定义域为$(0,+\infty)$. 由函数与反函数图像的关系可知，$y=a^x$ 的图形和 $y=\log_a x$ 的图形是关于 $y=x$ 对称的.

当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 单调递增的；当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 单调递减的，$y=\log_a x$ 图形总在 y 轴右方，且过(1,0) 点. 如图 1－6.

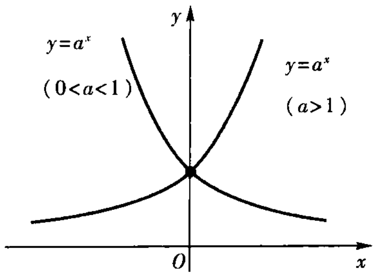

图 1－5

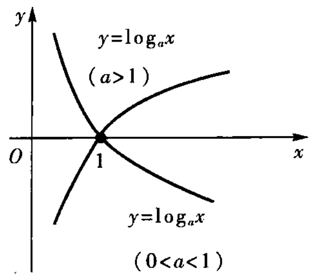

图 1－6

工程上常用以 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$，记为 $y=\ln x$，称为自然对数函数.

4. 三角函数

如图1-7所示，设 $M(x_0,y_0)$ 是以原点为圆心，半径为 $r(>0)$ 圆上的一点，x 是以 Ox 轴的正半轴为始边，OM 为终边的角，

$$r=\overline{OM}=\sqrt{x_0^2+y_0^2}.$$

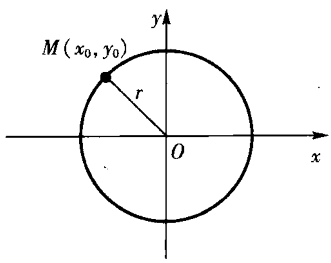

图 1－7

三角函数定义为：

(1) 正弦函数 $y=\sin x=\dfrac{y_0}{r}$ 定义域为：$(-\infty,+\infty)$，周期为 2π.

(2) 余弦函数 $y=\cos x=\dfrac{x_0}{r}$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，周期为 2π.

(3) 正切函数 $y=\tan x=\dfrac{y_0}{x_0}$，定义域为$(x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z)$，周期为 π. 如图 1－8.

(4) 余切函数 $y=\cot x=\dfrac{x_0}{y_0}$，定义域为$(x\neq+k\pi,k\in Z)$，周期为 π. 如图 1－9.

(5) 正割函数 $y=\sec x=\dfrac{r}{x_0}$，定义域为$(x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z)$，周期为 2π.

(6) 余割函数 $y=\csc x=\frac{r}{y_0}$,定义域为$(x\neq+k\pi,k\in Z)$,周期为 2π. 如图 1-10.

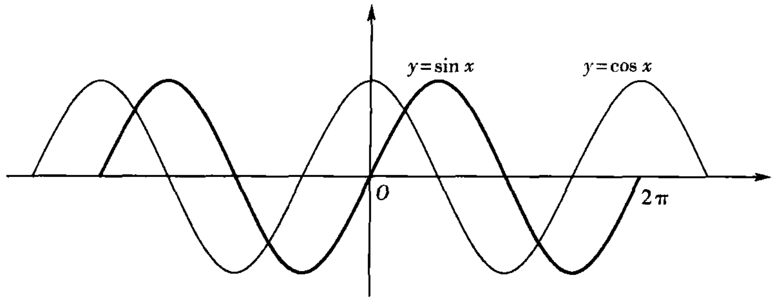

图 1-8

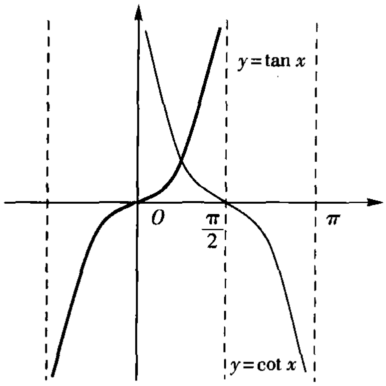

图 1-9

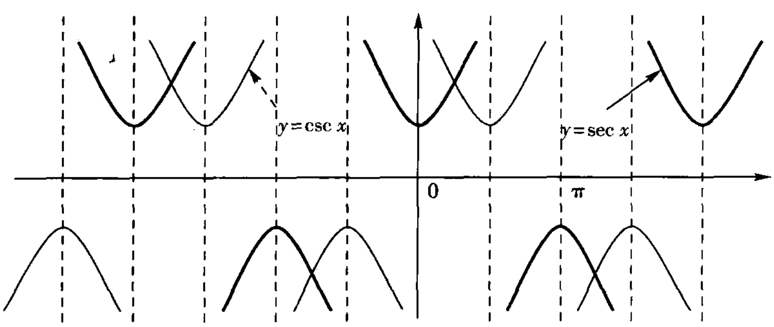

图 1-10

正弦函数、正切函数、余切函数、余割函数都是奇函数,余弦函数为偶函数.

5. 反三角函数

(1) 函数 $y=\sin x$,$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 是单调函数,它的反函数称为反正弦函数. 如图1-11.

记为 $y=\arcsin x,x\in[-1,1],y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

(2) 函数 $y=\cos x$,$x\in[0,\pi]$(单调函数),它的反函数称为反余弦函数. 如图 1-12. 记为 $y=\arccos x, x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$

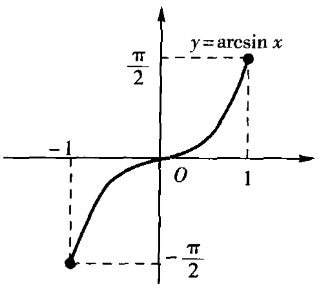

图 1-11

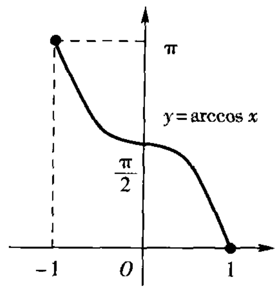

图 1-12

(3) 函数 $y=\tan x$,$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$(单调函数),它的反函数称为反正切函数. 如图 1-13.

记为 $y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty), y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

(4) 函数 $y=\cot x$,$x\in(0,\pi)$(单调函数),它的反函数称为反余切函数. 如图 1-14. 记为 $y=\operatorname{arccot} x, x\in(-\infty,+\infty), y\in(0,\pi)$.

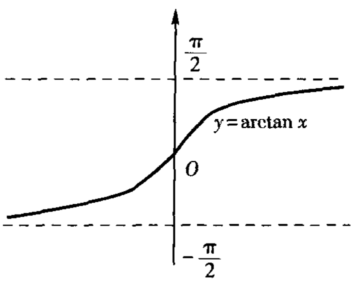

图 1-13

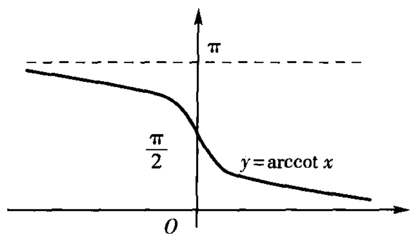

图 1-14

从图中不难看出,$\arcsin x$ 和 $\arctan x$ 是单调递增的,$\arccos x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 是单调递减的. 上述五类函数称为基本初等函数.

六、初等函数

定义 1.1.2 由基本初等函数和常数,经过有限次四则运算和有限次复合运算后并能用一个式子表示的函数,称为初等函数.

如: $$y=\sqrt[3]{x^2-1}+\log_{10}(1+x)-\sin(\ln(x^3-2))$$

分段函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域相同对应法则相同,即此分段函数在各分段区间上(或内)的对应法则可用同一个解析式 $\sqrt{x^2}$ 来表示,所以它是初等函数. 但有些分段函数不是初等函数.

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x+1}$　(2) $y=\sqrt[3]{x+1}$　(3) $y=\sqrt{x^2-2}$

(4) $y=\sqrt{2+x-x^2}$　(5) $y=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$　(6) $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$

2. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$　(2) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$

(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$　(4) $f(x)=\log(x+\sqrt{1+x})$

3. 设 $\varphi(x)=x^2,\psi(x)=2^x$,求 $\varphi(\psi(x)),\psi(\varphi(x))$.

4. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,求 $f(f(x))$.

5. 设 $f(x-1)=x^2$,求 $f(x)$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}2^x & x\geqslant 0\\ x^2+1 & x<0\end{cases}$,求 $f(1),f(0),f(-1)$.

7. 求下列函数的反函数和定义域.

(1) $y=2x+3$　(2) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$　(3) $y=\log_2\dfrac{x}{3}$　(4) $y=2\arctan x$

8. 指出下列复合函数的复合过程分解.

(1) $y=\sqrt{x^2+2}$　(2) $y=\arctan e^{x+1}$　(3) $y=\log_2\sqrt{x^3+1}$　(4) $y=\cos^2(2\ln x)$

§1-2　极限的概念

一、数列的极限

1. 数列的概念

定义 1.2.1　按照自然顺序排列的一串数 $u_1,u_2,\cdots,u_n\cdots$,称为数列,记为 $\{u_n\}$,其中 u_n 称为数列的第 n 项.若第 n 项表示为项数 n 的函数,即 $u_n=f(n)$,称为数列的通项公式.

单调数列　如果从第二项起,每一项比前一项大,即 $u_n<u_{n+1}$,则称数列 $\{u_n\}$ 为单调递增数列;类似地,如果从第二项起,每一项比前一项小,即 $u_n>u_{n+1}$,则称数列 $\{u_n\}$ 为单调递减数列.

单调增加的数列和单调减少的数列,统称为单调数列.

有界数列　如果存在一个正常数 M,使数列 $\{u_n\}$ 的每一项 u_n,都有 $|u_n|\leqslant M$,则称数列 $\{u_n\}$ 为有界数列;否则,称为无界数列.

如数列 $1,2,2^2,\cdots,2^n,\cdots$ 是单调数列和无界数列.数列 $-1,1,-1,\cdots,(-1)^n,\cdots$ 是有界数列.数列 $a,a,\cdots,a,\cdots$ 是有界数列,称为常数数列.

2. 数列的极限

对一个数列 $\{u_n\}$，由通项公式 $u_n = f(n)$ 可以计算出任意有限项，但数列以后项是如何变化呢？我们需要考虑当项数 n 无限增大（记为 $n \to \infty$）时，数列的一般项的变化趋势.

例 12　当 $n \to \infty$ 时，观察下列数列的变化趋势：

(1) $u_n = \dfrac{n}{n+1}$；　　(2) $u_n = \dfrac{1}{2^n}$；

(3) $u_n = 2n+1$；　　(4) $u_n = (-1)^{n+1}$.

解　(1) 对于数列 $u_n = \dfrac{n}{n+1}$，即 $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n}{n+1}, \cdots$

当 $n \to \infty$ 时，显然数列的一般项 $u_n = \dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ 无限接近常数 1.

(2) 对于数列 $u_n = \dfrac{1}{2^n}$，即 $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{1}{2^3}, \cdots, \dfrac{1}{2^n}, \cdots$

当 $n \to \infty$ 时，显然数列的一般项 $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ 无限接近常数 0.

(3) 对于数列 $u_n = 2n+1$，即 $3, 5, 7, \cdots, 2n+1, \cdots$

当 $n \to \infty$ 时，数列的一般项 $u_n = 2n+1$ 不接近任何常数.

(4) 对于数列 $u_n = (-1)^{n+1}$，即 $1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$

当 $n \to \infty$ 时，数列的一般项 $u_n = (-1)^{n+1}$ 在 -1 和 $+1$ 之间跳动，不始终无限接近任何常数.

定义 1.2.2　对于数列 $\{u_n\}$，如果当 n 无限增大时，通项 u_n 无限接近于某个确定的常数 A，则称 A 为数列 $\{u_n\}$ 在 $n \to \infty$ 时的极限，此时称数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$ 或 $u_n \to A (n \to \infty)$. 若数列 $\{u_n\}$ 没有极限，则称该数列发散.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$；$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)$ 不存在；$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在.

当从直观上和几何上判断一个函数的极限等于 A 时，又怎样说明其判断的正确的呢？这一直是人们争论和研究的问题，直到 1865 年由威尔斯托拉斯给出了严格的极限定义，由此定义来证明判断的正确性.

* **定义 1.2.2′**　（“$\varepsilon - N$”语言）设有数列 $\{u_n\}$，A 是一个常数，如果对任意 $\varepsilon > 0$，总存在自然数 N，当 $n > N$ 时，恒有 $|u_n - A| < \varepsilon$ 成立，则称 A 为数列 $\{u_n\}$ 的极限，或称数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A. 记作

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A \text{ 或 } u_n \to A, (n \to \infty)$$

如果数列 $\{u_n\}$ 没有极限，就称数列 $\{u_n\}$ 发散.

就其数学的严密性而言，极限的“$\varepsilon - N$”语言定义是必不可少的，其含义是：

(1) ε 是可以取到任意小的正数，人们用 $|u_n - A| < \varepsilon$ 来描述变量 u_n 与 A 接近的程度，即任意的接近.

(2) 定义中的条件命题：对任意 $\varepsilon > 0$，总存在自然数 N，当 $n > N$ 时，恒有

$$|u_n - A| < \varepsilon.$$

（如果这个命题成立，则称 A 为数列 $\{u_n\}$（当 n 趋于无穷大时）的极限）

(3) 当已知 $n \to +\infty$ 时,其意为在这个变化过程中,对于自然数 N 总有一个时刻,在这个时刻以后 $n > N$ 成立. 如果定义的条件命题(2) 为真,则在这个时刻以后 $|u_n - A| < \varepsilon$ 为真(即任意的接近).

也就是说,如果定义的条件命题(2) 为真,在已知 $n \to +\infty$ 过程中,总有一个时刻,在这个时刻以后,变量 u_n 可变到任意的接近于常数 A. 即 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = A$.

要证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = A$,就是要证明定义中的条件命题(2) 为真命题.

例如　证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=1$

证　任给 $\varepsilon > 0$,无论有多小,

因为

$$|u_n - 1| = \left|\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-1\right| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$$

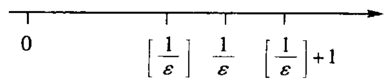

图 1-15

只要 $n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ 就有

$$\varepsilon \geqslant \frac{1}{n} > |u_n - 1|$$

所以取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$($[x]$ 表示 x 的整数部分. 即 $x = [x] + r$,其中$[x]$ 是整数,$0 \leqslant r < 1$) 即定义的条件命题. 如图 1-15.

对 $\varepsilon > 0$,存在自然数 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$,当 $n > N\left(n > \frac{1}{\varepsilon}\right)$ 时,$|u_n - 1| < \varepsilon$ 成立. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=1$.

如何判断数列的极限是否存在,我们有下列定理:

3. 数列极限存在定理

定理 1.2.1　(单调有界原理) 单调有界数列必有极限.

定理 1.2.2　(夹逼定理) 若$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$,$\lim\limits_{n\to\infty} v_n = A$ 并且 $u_n \leqslant h_n \leqslant v_n$,则$\lim\limits_{n\to\infty} h_n = A$.

显然当 $n \to \infty$ 时,数列的敛散性与其前有限项无关. 即改变数列的前有限项,不改变数列的敛散性.

二、函数的极限

当自变量有某种变化趋势时,函数值是如何变化的呢? 或者说当我们考虑函数在 x_0(有定义或无定义) 点处附近的函数值的变化情况或无穷远点附近的函数值的变化情况时,需要研究当 x 无限接近 x_0(记为:$x \to x_0$,读作 x 趋向于x_0) 时,或当 $|x|$ 无限增大(记为:$x \to \infty$,读作 x 趋向于无穷大) 时,函数的变化情况.

1. $x \to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

先从函数图形特征观察简单函数极限.

如图 1-16:当已知 $x \to 1$ 时,$f(x) = x + 1$ 无限接近 2;

如图 1-17:当已知 $x \to 1$ 时,$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 无限接近于 2.