算學小叢書

數理叢談

余言鈞著

商務印書館發行

中華民國二十四年五月初版

七一〇上

周

算學小叢書 數理叢談 一冊 (55138)

每冊定價大洋叁角伍分

外埠酌加運費匯費

著作者 朱言鈞

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者王養吾)

序

荷庭根為全球數學之中樞，赫百德為當世數學之巨擘．公謹博士學於荷庭根，為赫氏登堂入室之高足，學識廣博而純粹，每與討論數理，常有獨到之見解，議論精闢，遠非生吞活剝者所能及其萬一．近以新著數理叢談見示，雖字不足十萬，而所言皆各科之本源；理極奧賾，而出之以爽利之筆，通俗之辭．化難為易，深入顯出，非所謂食而能化者耶？

數學之難，不難於繁複之演算而難於基本之理法．必基本之理法真明，方能執簡馭繁，深入無阻，以牛頓來本之(Leibniz)之天才集前賢之大成，創微積之學術，厥功不可謂不偉，徒以致力於方法之進展，無暇為根深之探索，於希臘大幾何學家所已發之不可通約數論，未加注意，遂致基礎未固．後人沿之，往往謬誤之結果發生於著名之方法．及十八稘末十九稘初高斯(Gauss)，藍格朗(Lagrange)，康遷(Cauchy)諸氏起，始力求恢復希臘幾何家之嚴密，致意於微積基礎之批評，讀亞培爾(Abel)致哈斯頓(Harsteen)

二書:'今日流行之解析,其間有無限之黑暗,吾欲盡吾之力,散播光明於其中,以計畫與統系如是之缺乏,而從事其間者,竟如是其衆多,甯非異事?其更大之弊,實爲嚴密之絕對缺乏.在高等解析中,定理之曾經嚴密證明者,爲數甚少.無論何處,常見不經證明,卽以特例推爲公例之惡習……二項定理,從未經過嚴密之證明,Taylor 展開式乃微積全體之基礎,亦復如是.'可見當時歐洲數學之狀態.直至十九稘末華斯泰斯康脫戴特根三氏之無理數論完成.所謂近世解析,始有穩固不拔之基礎.夫無理數論,常人視之皆以爲區區無足重輕,殊不知其關係,乃如此之巨.卽牛頓來本之二氏,亦未嘗不知希臘幾何學家之早有不可通約數論,或亦以爲如 $\sqrt{2}$ 之類已有開方之法,可求至其任何位之小數,儘可不必深論.一念之差,遂使空前偉業,留一微隙至三百餘年之久,且費十九稘諸大師百年之力,始能爲之補苴.基本理法之重要,有如此者.公謹此書價値如何,從此可知矣.

歐美數學名著於基本理法,雖皆論及而文字過於謹嚴.吾國學子,讀之往往以不易全明,遂不求甚解,躐等而進,買櫝還珠.彼讀書未嘗不多,演算未嘗不熟,而仍見解

駁雜,毫無統系;與但知記憶公式,不知應用條件,初無二致者,皆由於始基未固之病.公謹此書,旣言數學各科之本源復及治學之要法;且懼人之難明設爲問答,以爽利之筆,借通俗之語,明奧賾之理,實爲療此大病之良藥,爲益學界,必非淺鮮.

吾國數學,發明最先,徵諸歷史,人才輩出.輓近學者日衆,反進步甚遲,不能與歐美相頡頏者,良由近二十年數學界同人不事著述之故.現在學校數學教本,皆取材異國,書價甚昂,學生但購課本,已感困難;至於參考諸書,更非力所能及.求諸圖書館,亦至多每種但具一册,甲已借讀,乙即向隅.以公謹學識之精湛,與其研究一二問題,以自鳴高,不如從事譯著,多出數册有益學界之書,以促全國數學之進步,水到渠成,自有能與歐美頡頏之一日.不知公謹之意若何.公謹嘗欲屏絕一切,從事研究,爲吾國學術爭地位,其志未嘗不卓,而不佞則以此說進,茲爲之序,遂附及之

中華民國二十三年六月無錫顧澄

弁言

民國十四年言鈞游學德國苟庭根，時赫百德教授方主講‘智識與數學思想’，以通俗曉暢之辭，闡專門高深之理；受業者千餘人，名教授如羅格 (C. Runge)，藍踏 (E. Landau)，科朗脫 (R. Courant)，納爾松 (L. Nelson) 輩均列席聽講，言鈞生平所受激刺，此次當爲最劇烈者之一．歸國後，輒欲效法名師，有所編述，旣牽於教務，而當日聽講筆錄，復缺而不完，欲加整理，已非易事．其後讀克蘭 (F. Klein) 海虎脫 (L. Heffter) 之著作，益感今日數學範圍之廣博，研究方法之嚴密，欲擷其綱要，溯其淵源而不流於支離破碎；自愧淺學，何足語此，故欲作而輟者，不知幾何次矣．九一八變起，學校休課，始乘間從事於此，所有體例，悉仿海虎脫‘何謂數學’一書，其中題材則採自海氏者十之六，採自赫氏原稿者十之四，數月之力，僅成三章而已．去年秋，賡續爲之，次第發表於光華半月刊，辱承海內賢達不棄，枉書商榷，其間無錫顧養吾教授澄文昌范秉鈞博士曾國二君補正尤多．今徇友好之意，重加删訂，付諸手民，非

敢自炫心得,亦就正有道云爾.

中華民國二十三年十月一日餘姚朱言鈞書於上海寓齋

目　次

數理叢談

這是春夏之交的一天傍晚，開赴歐洲的"中國號"離上海忽忽已兩天了．無限的天空，受夕陽反照，刻刻發生變化；天風海濤，奏着微妙的音樂，令人心境開曠 旅客們大半二三成羣，在船面散步消遣，其中獨有兩位却坐在休息室裏娓娓談話．一位是皓首蒼髮，精神矍鑠的大學教授；這次出游目的，是要到德國出席世界算學大會，因爲多年沒有航海，就取道印度洋地中海，趁此休養身體．其他一位是年富力強的商人，擬到印度考察發展商業的機會，順便過南洋羣島與華商有所商洽．他們雖非舊識，却是一見如故，那位商人忽然狠誠懇的道：

"先生，我年小的時候，對於算學 發生很濃厚的興趣．後來中途輟學，奔走衣食，再沒有研究的機會．先生，所謂現代算學，究竟是什麼？"

"要知道一種學問是什麼,惟有竭盡心力去從事研究;算學當然不是例外."

"那麼,我將永遠不知道算學是什麼了.因爲我的職務不許我去從事研究.先生,你或者能介紹幾本淺而易讀的著作嗎?"

那位大學教授見了這商人一片熱誠,很爲所動,於是用躊躇未決的態度回答他道:"這類著作,在中西出版界中實在不多.但是,你旣有志於此,我們航行無事,可以隨便談談:不過得一漏萬,絕無系統,未必有若何成績可望罷."

"這眞是我求之不得的,謝謝先生的好意.明天晚飯以後,准在這裏領教."

第一次談話

次日晚上,這兩位旅客晤見之後,就談論起來.

教　我們所乘的"中國號"在大海中行駛,其原因是什麼?

商　當然是蒸汽的壓力.

教　正是.蒸汽的壓力是"中國號"所以運動的原因.

但所謂運動,究竟是什麼意思?

商　運動是地位的變遷.

教　不錯.所謂運動,是空間地位隨時間而變遷之意.因此"中國號"在空間中所處的地位所以時時變遷,實由於蒸汽的力.旣然如此,地位的變遷與蒸汽的壓力,其間必有一種相倚相隨的關係.要發見這關係,必先詳考運動的狀態;申言之,必詳細知道其地位如何隨時間而變遷.精確言之,我們必用數去量其每小時所行之途程.有了數,則"中國號"的運動狀態可以詳悉無遺,而壓力的強弱,也可以精確的表達出來.惟其如此,然後壓力與運動之如何相應相倚,纔有認識之餘地.所以推本窮源,一切精密智識的可能,都根據於數的應用.

商　因此之故,我們講科學,宜從數入手.數,我也知道一些;有整數,有分數,還有所謂虛數.

教　先生,請慢些.數的來源與本質,是哲學家與算學家聚訟紛紜的問題,我現在姑且不談.我們知道,1, 2, 3, 4, 5, 6,……等等都叫做正整數.任何兩個正整數相加,其結果——

商　又是一正整數.

教　但由一正整數減去一正整數,又是一正整數嗎?

商　這不盡然.如 2 減 5 是 -3, -3 却不是正整數,是負整數.

教　不錯.任何兩正整數相加,必為一正整數;但由一正整數減去一正整數,其結果未必為一正整數.因此之故,如果我們僅有正整數,換言之,如正整數之外,別無他數,則減法在算學中未必在在可能.如以 a, b 表示兩正整數,且假定 a 小於 b, 則 $a-b$ 絕無意義可言.所以要使減法在在得有結果,非創他種數不可.於是負整數及零遂因之而起.我們既假定 a 小於 b, 則 $b-a$ 顯然是一正整數,於是 $a-b=-c$ 就叫做負整數.又任何數減去其本身之後叫做零.自有了負整數及零之後,減法遂可以暢行無阻了.不過有一事不可不加以注意,我們既有負整數之後,若欲從 a 減去 b, 可不必應用減法的手續,祇把 $-b$ 加於 a 即得.由此看來,減法可以歸併於加法之下,減法本身可以不必用了.

商　這事有些希奇.我們欲使減法徹底的可能,纔不得不假定負整數的存在;如今有了負整數,減法却可省去不用了.

教　妙極.正整數,負整數與零,初看去好像平淡無奇,其實不然.算學中有一種理論,叫做整數論,專門研討這種數的性質及其所循的公例.整數論內容的豐富,推理的美妙,在各種理論中.罕有其比;從前德國大算學家高斯(Gauss)且尊之為"算學的女皇".

商　先生,請你引我去見這位女皇何如?

教　未嘗不可.不過內容太豐富了,各種問題,層出不窮,即終身從事於此,也無不可.雖然如此,我們不妨略舉一二端,以明其所研究者究竟是些什麼問題.整數中有一種很重要的數叫做素數.素數是什麼?凡祇能被1及其本身除盡之數叫做素數,如1, 2, 3, 5, 7, 11, 13

商　還有17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59……

教　好了好了.長此下去,永無盡期,就此收場罷!

商　這是什麼意思?為何沒有盡期?

教　因為素數之多,無限無極,我生有涯,此數無盡.

商　先生,我還不明白呢.

教　當然一時不能明白.請你讓我來證明這件事.什麼叫做素數已經明白了.其他之數如60却是素數相乘之結果 $60=2\cdot2\cdot3\cdot5$, 如 $100=2\cdot2\cdot5\cdot5$, 也是素數之積.

商　這麼看來,素數可說是一切整數之本.因爲任何整數都是素數之積,因此都可用素數表達出來.

教　我却不敢貿然說這句話.何以呢?我們誠然知道60與100是素數之積,但這不過是兩個實例罷了.從這兩個實例,何以能推知一切整數都有這種性質呢?所謂一切整數都是素數之積,其意是說任何整數都是素數之積.細考這條定理的內容,可知其含有普遍性與必然性.所謂普遍,是偏攝無漏,所謂必然,是不容有異.但整數之多,我們旣公認爲無窮,故這條定理所包羅者也是無窮.因此之故,我們自不能以少數實例,作這條定理的根據.

商　我知道我的錯誤了.

教　你的揣想,未嘗不是.誠然,任何整數,都可析成素數之積.不過要認識這事之眞確,非有一普遍的證明不可.今有一任何整數 m 於此,m 旣非素數,那末,除1及其本身外必有其他一數如 a 可以除盡之; a 若非素數,則除1及其本身外,必有其他一數如 b 可以除盡之; b 若尙非素數,則除1及其本身外,必更有其他一數如 c 可以除盡之;循是以推,可得 a, b, c……等數.但 b 小於 a,c 又小於 b,故依前法類推遂得一羣漸漸變小之數 a, b, c…….如是推至

最後,必可得一素數 p, 既得一素數 p, 遂不能再往下推了.於是 m 必可被 p 除盡,故得 $m=pm'$.若其中之m' 已爲素數,則m已變爲素數之積,我們的證明,可稱圓滿.苟其不然,我們把m'再據前法析爲$m'=p'm''$,故$m=pm'=pp'm''$.其中之p'又爲一素數,而m''又小於 m'. 於是依法推之.必可將任何整數 m 析成素數之積.

商　這倒容易明白.但是,先生前說素數之多不可限量,這件事又怎樣證明呢?

教　要證明這件事,可用算學中所常用的反證法.無論什麼事,可以如此,或非如此;如今天下雨或未下雨,又如素數之多爲無窮或非無窮,斷沒有第三種的可能.這是邏輯中的排中律,無論何人不能否認的.我們如要證明一件事果然是如此,可先假定其反面,在這反面的假定之下,加以種種推論;推論的結果若是一個矛盾,則其假定不能成立,所以這件事遂非如此不可.要而言之.我們要證明一條定理,僅在其反面的假定之下,找出一個矛盾就是了.若用邏輯學中三段論法表之,這反證法的推論經過大概如下:

大前提:這是如此或非如此.

小前提:苟非如此,則得一矛盾.

結論：這是如此.

其中大前提之眞確，旣爲人人所公認，所以我們祇求小前提之成立，就可依法獲得我們所欲求的結論. 這是反證法的大概，因其簡明便利，所以應用很廣. 旣明以上所談，如我們要證明素數之多，不可量計，可先假定其反面，卽假定素數之多，未必無盡，希望在這反面的假定之下，得一矛盾，藉以決定素數之多，必爲無窮，於是這條定理遂得證明了. 據這反面的決定，素數之多，未必無盡，旣非無盡，則此有盡的素數中，必有一最大者，我們把這有盡的素數一一依其大小排列於下：

$$2, 3, 5, 7, 11, \cdots\cdots p$$

列於最後的 p 爲最大之素數. 我們試把這有盡的素數一一相乘，旣乘之後再加以 1 得一整數 m：

$$m=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdots p+1$$

這個 m 旣大於 p，顯然不是素數. 旣非素數，則如前所言，必爲素數之積，換言之，非至少被一素數除盡不可. 但求之上列的一切素數中，無一能將 m 除盡：於此可見這個 m 也是一個素數，所以 p 實非最大的素數，與所假定者適相矛盾. 素數之多，無限無窮，於是遂得證明了.

商 有趣之至.先生,你能允許我提出一個疑問嗎?所謂無窮多是否最多,無窮大是否最大呢?

教 否.整數中無一最大者;苟其有之,把這最大的數加以1,必得一更大的數,豈不是一個矛盾嗎?所以我們不能意像一最大的整數.因此之故,整數之多,無限無窮;窮我一生,不能將整數一一盡舉,旣舉其一,他卽隨之,長此以往,永無盡期,故整數的個數可說爲無窮大.

商 明瞭了,謝謝先生.

教 整數理論,精微周到,最能鍛練我們的思想力.我今天且舉一個例來說一說.如我們要求索三個整數 x, y, z 使其滿足如下之條件:

$$x^2+y^2=z^2$$

這三個整數是什麽?

商 $x=3 \quad y=4 \quad z=5$

教 不錯.但若有一方程式如

$$x^3+y^3=z^3$$

或

$$x^4+y^4=z^4$$

則其能否解答,換言之,有無 x, y, z 三個整數使其滿足,却是比較困難的問題.從前法國算學家費邁脫 (Fermat) 以