

西方数学文化理念传播译丛

丛书主编 汪宇

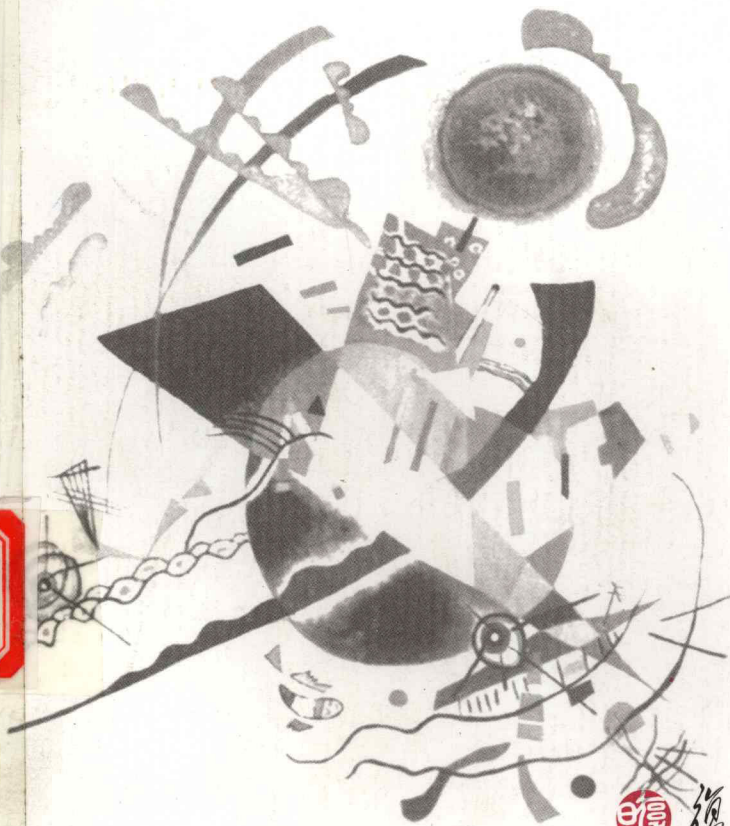
Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint

高观点下的初等数学

(第三卷) 精确数学与近似数学

[德] 菲利克斯·克莱因 著

吴大任 陈 鸮 译



復旦大學出版社

www.fudanpress.com.cn

西方数学文化理念传播译丛

丛书主编 汪宇

Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint


高观点下的初等数学

(第三卷) 精确数学与近似数学

[德] 菲利克斯·克莱因 著

吴大任 陈 鸮 译



 复旦大学出版社

www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

高观点下的初等数学/[德]克莱因著;舒湘芹等译. —上海:
复旦大学出版社, 2008. 9
(西方数学文化理念传播译丛)
书名原文: Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint
ISBN 978-7-309-05982-3

I. 高… II. ①克…②舒… III. 初等数学 IV. 012

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 038205 号

高观点下的初等数学

[德]克莱因 著 舒湘芹 陈义章 杨钦樑 吴大任 陈 鸷 译

出版发行 复旦大学出版社 上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65100562(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com <http://www.fudanpress.com>

责任编辑 范仁梅

出品人 贺圣遂

印 刷 上海浦东北联印刷厂
开 本 890 × 1240 1/32
印 张 28.375
字 数 776 千
版 次 2008 年 9 月第一版第一次印刷
印 数 1—6 000

书 号 ISBN 978-7-309-05982-3/O · 410

定 价 68.00 元

如有印装质量问题, 请向复旦大学出版社发行部调换。

版权所有 侵权必究

内 容 提 要

菲利克斯·克莱因是19世纪末20世纪初世界最有影响力的数学学派——哥廷根学派的创始人，他不仅是伟大的数学家，也是现代国际数学教育的奠基人、杰出的数学史家和数学教育家，在数学界享有崇高的声誉和巨大的影响。

本书是克莱因根据自己在哥廷根大学多年为德国中学数学教师及在校学生开设的讲座所撰写的基础数学普及读物。该书反映了他对数学的许多观点，向人们生动地展示了一流大师的遗风，出版后被译成多种文字，是一部数学教育的不朽杰作，影响至今不衰。全书共分3卷。第一卷：算术、代数、分析；第二卷：几何；第三卷：精确数学与近似数学。

克莱因认为函数为数学的“灵魂”，应该成为中学数学的“基石”，应该把算术、代数和几何方面的内容，通过几何的形式用以函数为中心的观念综合起来；强调要用近代数学的观点来改造传统的中学数学内容，主张加强函数和微积分的教学，改革和充实代数的内容，倡导“高观点下的初等数学”意识。在克莱因看来，一个数学教师的职责是：“应使学生了解数学并不是孤立的各门学问，而是一个有机的整体”；基础数学的教师应该站在更高的视角（高等数学）来审视、理解初等数学问题，只有观点高了，事物才能显得明了而简单；一个称职的教师应当掌握或了解数学的各种概念、方法及其发展与完善的过程以及数学教育演化的经过。他认为“有关的每一个分支，原则上应看做是数学整体的代表”，“有许多初等数学的现象只有在非初等的理论结构内才能深刻地理解”。

本书对我国从事数学学习和数学教育的广大读者具有较好的启示作用，用本书译者之一，我国数学家、数学教育家吴大任先生的话来说，“所有对数学有一定了解的人都可以从中获得教益和启发”，此书“至今读来仍然感到十分亲切。这是因为，其内容主要是基础数学，其观点蕴含着真理……”。

译者的话

克莱因的讲演《高观点下的初等数学》分3卷先后出版；前两卷有英译本，经舒湘芹、陈义章、杨钦樑同志译成中文，1989年出版。第三卷似无英译本，兹据德文本译出。

第三卷的副标题是“精确数学与近似数学”。克莱因认为，数学科学是一个有机整体，包括精确数学和近似数学两部分：“近似数学是数学运用于实际应用的那一部分，精确数学是近似数学赖以建立的坚实框架。”令克莱因不安的是，在他那个年代，“理论数学家的兴趣和思路同数学应用中实际采取的方法离得非常远”。他希望这部分讲演能有助于消除这种分歧，使数学重新成为完整和谐的科学。因此，反复阐明精确数学和近似数学的相互作用及其区别，批判在这个问题上（特别是教材里的）种种错误观点和错误做法，就成为贯穿全卷的中心思想。

克莱因提醒人们，不要因为近似数学这个名称而降低它的地位。他指出：近似数学不是“近似的数学”而是“关于近似关系的精确数学”。他又指出，“必须从精确数学中区分出那些对实用没有直接意义的东西”，诸如无理数概念，有公度与无公度的区别等等。至于所谓的“几何三大问题”，当然都完全属于精确数学。

本卷讨论的内容侧重几何方面，采用的是解析方法。联系着本卷的中心思想，克莱因着重论述了精确几何与应用几何、理想图形与经验图形、几何理论和直觉的关系。他指出：精确几何的基础是公理系统，采用解析方法时，相当于现代实数概念；但公理产生于感觉（和人的创造），而且直觉还引导人们逻辑思维，它又是精确几何新发现的源泉。他同时强调，严格的证明不能单纯凭直觉。

和前两卷类似,本卷着重讨论一般教材不讨论的内容或是它们所忽略的精微处。例如在精确数学方面,克莱因详细介绍了魏尔斯特拉斯连续而无处可微的函数,以及作为闭节的单值连续像而完全覆盖一个区域的皮亚诺曲线,讨论了二元函数的连续性和偏导次序可颠倒的条件。在近似数学方面,他突出了函数带概念,详细地介绍了插值法,并随时把误差估计放在十分重要的位置。他通过一些植根于实际应用的反演群来获得某些具有值得注意的性质的点集,如一个无处稠密却自稠密而完备的点集,一条处处有切线但非解析的若当(Jordan)曲线。他用一定篇幅论述了应用几何中的测量学、作图法和几何模型。克莱因认为,“在测量学中,近似数学的思路发挥得最清楚而彻底”。结合作图法和几何模型,他论述了当时代数几何中的一些基本概念和若干引人注目的成果。

本卷涉及的数学内容一部分是较复杂的,但由于采用由简到繁、由具体到一般的论证方法,而且到处结合几何图像,读起来仍然感到引人入胜。和前两卷一样,克莱因成功地把严谨的科学态度和避免过多形式推证、灵活多彩的阐述方法巧妙地结合起来。

克莱因不愧为“塑造几何图像的造型艺术大师”,他十分热心地鼓励图片和模型的制作,而结合图片和模型来讲授与学习几何和一般数学,其效益显然是巨大的。制作图片和模型需要学识、想象力、技巧以及不畏繁琐的奉献精神。电子计算机对这项工作提供了极大的便利和新的无限广阔的可能性。例如制作关于数学的动画片,将比以前容易得多。这项工作在中国还很薄弱,我们希望有志之士会为此努力。

原书底注有一部分带方括号的是第三版整理者赛法特加的,中译本又加了一些中译者注。希望读者对中译本中的错误,无论是内容还是文字方面的,都不吝指出,以凭订正。本卷中译本在付刊期间承陆秀丽教授鼎力参与校订,十分认真仔细,减少了不少差错,谨此致谢。

译 者

1991年7月1日

第一版序

去年夏天我所作的讲演已经以手稿形式印出来了,现在我愿意沿着我近年所主要致力的方向迈出新的一步:把数学科学重新结合成为包罗它的各个方面的有机整体,来发挥其作用。早些时候,在专业分支还没有出现时,数学自然就是这样的;现在不同了,特别是像目前那样,抽象数学和应用数学的代表人物越来越明显地站在互相对立的地位。针对最后这一种情况,我已经反复指出,必须对这两部分数学的区别及其相互联系作出明晰的阐述,并把这作为有核心意义的一项工作。以后数学的这两部分将称为精确数学与近似数学。布克哈特和霍伊恩(Heun)两位先生近年都发表过和我类似的见解,可以参阅 Burkhardt 先生的就职演说[苏黎世,1897年^①],它在 *Jahresberichts der deutschen Mathematiker-Vereinigung* 第11卷第一册重印,从而使更大范围的同行容易看到。还可以参阅霍伊恩先生关于科技中的动力学问题的报告,它发表在上述杂志第9卷(1900—1901年)。在这篇报告中,就我所知,第一次出现“近似数学”这个词,至少我是从那里取用这个词的。我希望看到对上面所说的互相对立的现状有详尽的分析,像下面的讲演在几何领域中的作法,以引起更多人士对这个问题的兴趣和理解。

在这个讲演里,我同时对以前关于数学教育,特别是高等学校的数学教育所作的各次讲演(参看,例如 *Jahresbericht* 第8卷,1898—1899年)加以充实。以后和以前一样,我的观点是,对初学者以及对

① 数学和科学思想。

那些把数学仅仅作为进一步学习工具的青年学生的教育,从感性阶段起,就要让他们去进行简单的应用。从教学观点来看,这样做是必要的,这是近年从对大多数学生的调查研究中越来越明显地看出来的。在外国也是如此。但是,并非次要地,我有一种信念(而且从不放弃它),认为在当前数学发展的形势下,对于培养高级数学人才,这样的教育还不够,在直观事实之外,还必须强调现代实数概念的核心地位以及和这个概念联系着的深入发展。遗憾的是,就我所知,在教科书和讲义中,还缺乏从这一观点引导到那一观点的论述。这个讲演将可满足这方面的部分要求,它的最高目标是,有朝一日它要成为多余的。因为那就表示,它所阐明的意见已经成为高等数学教育中理所当然的组成部分。

F·克莱因

哥廷根,1902年2月28日

第二版序

第二版基本上是这个讲演 1902 年第一版的重印本,改动极小。只是改善了个别不准确处,并补充了一些新发表的文献,这些文献都是涉及与讲演内容密切相关的发展的。最后还重印了“Gutachtens der Göttinger philosophischen Fakultät betreffend die Beneke-Preisaufrage für 1901”(“哥廷根哲学系关于 1901 年本内克奖课题的报告文集”),本演讲内容有多处和它有关。

米勒(C. H. Müller)

哥廷根,1907 年 1 月 5 日

第三版序

作为 F·克莱因的《高观点下的初等数学》第三卷,这部讲演在“精确数学与近似数学”(Präzisionsund Approximations-mathematik)的副标题下初次以书本的形式出现。这是在前两卷出版几年前克莱因所作的讲演。由于其目标和内容,它也像前两卷一样,拥有广大读者。作为手稿,它长期被引用的标题是 *Anwendung der Differential-und Integralrechnung auf Geometrie (Eine Revision der Prinzipien)*(《微积分对几何的应用(对原则的一项修改)》)。改变标题是 F·克莱因本人的意愿,在他去世前的两个月里,我和他关于出版这一卷的需要曾有过一系列的交谈。克莱因认为,新标题比原先标题更合乎讲演的倾向。

编辑这部讲演所采取的基本方针和出版前两卷相同。原来的论述总的来说都保持不变,但在许多具体地方由于内容和形式的需要,做了改动和补充。一部分补充当然是考虑到讲演本身的需要而添加了一些新文献,其他补充则以底注形式出现(放在方括号内),插图改善很多,特别是在讲演的第三编里,要增加一些图来刻画空间的三次曲线和三次曲面的形状。在那部分讲演里,显示了克莱因是塑造几何形象的造型艺术大师,而在这方面他是很闻名的。原来写这部分时,他设想读者手边有相关的模型。通过增加插图和补充内容读者可以不必依赖模型。在充实这部分时,克莱因 1907 年所作关于曲面和空间曲线的讲演起了很大作用。

1907 年第二版中加进来的“哥廷根哲学系关于 1901 年本内克奖课题的报告文集”现在删去了,因它已重印在克莱因的数学论文集

的第二卷里。

在编辑工作中,我得到哥廷根的瓦尔特先生许多有价值的建议和帮助。他和科隆的弗尔梅特(H. Vermeit)先生都读了校样,后者还负责编制了索引。我的同事霍曼(H. Homann)协助我拍照了当地收集的一系列数学模型。特别是柯朗(Courant)教授先生和我进行了多次有关我工作进展的谈话。对于上述先生们的帮助,我应当对施普林格出版社热情地满足我的愿望表示深深的谢意。

赛法特

哥廷根,1928年1月31日

前 言

从最近文献中可以看到一种深刻的分歧：理论数学家们的兴趣和思路同数学应用中实际采用的方法，离得非常远。对此，你们必定感到惶惑。这不但损害对数学人才的培养，也损害数学科学本身。看来，反对这种弊端是非常重要的。我现在开始的讲演，希望能对此做出贡献；我试图从所谓认识论的观点，把各种不同数学问题彼此之间的关系，按其本来面目加以阐明。你们既要学会了解现代理论家们的兴趣，又要能判断数学思维中哪些部分对应用是有直接意义的。我不怀疑，你们对于已经出现的不同观点的对立有兴趣并由此获益。希望我的讲演导致这样的结果：你们将来会做出贡献，以改变数学科学目前存在的不良的发展片面性，使数学重新形成包罗各个方面的一门和谐的科学。

我提出的计划太广泛，在一个学期内不可能对一切方面都加以论述。因此，我将主要突出数学中一个领域，即几何学。几何的实践包括几何作图和度量，这些问题，从希腊人开始，都已用抽象的处理方式在理论上解决了，我将采用分析方法论述从几何作图和度量两方面提出的问题。这样做本来不是必要的；人们也可以完全不从几何领域出发。不过，我所提出的问题基本上是结合分析学的；特别是联系到微分和积分的发展及其作用的。

关于文献，我不能举出教材。我将在有关地方给出单个的文献；此外，我愿意推荐 *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*（《数学科学百科全书》）。这部书的目的，在于全面论述 19 世纪数学，并对全部有关文献加以编列。

若要把同样的计划推广到数学的其他领域,就特别要考虑数学在自然界研究中的应用(如力学等)。与此有关的一系列想法已发表(在报告文集里),这是1901年我们哥廷根哲学系在纪念本内克(Beneke)基金(Beneke-Stiftung)时的报告集^①。此外,主要可以举出1873年我已发表于 *Erlanger* 报告中的一篇文章,题目是“Über den allgemeinen Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Kurve”(“关于一般函数概念及其用任意曲线的表示法”)^②。还有我在 Evanston 讨论会上所作的讲演“Lectures on Mathematics”(“关于数学的讲演”,纽约,1894年^③)。由兰格尔(L. Langel)译成法文,巴黎,1894年)中的第7篇报告,题目是“On the mathematical character of space-intuition and the relation of pure mathematics to the applied sciences”(“关于空间直觉的数学本质以及纯粹数学对应用数学的关系”)。

① *Math. Annalen* 第55卷(1902年),翻印在 F. Klein: *Gesammelte Math. Abhandlungen Bd. II* (《数学论文集》II,第241—246页)。

② 重印于 *Math. Annalen* 第22卷(1883年)(以及 F·克莱因:《数学论文集 II》,第214—224页)。

③ 美国数学会新版,纽约,1911年(所述报告又见 F·克莱因:《数学论文集 II》,第225—231页)。

第三卷目录

译者的话	i
第一版序	i
第二版序	i
第三版序	i
前言	i

第七部分 实变函数及其在直角坐标下的表示法

第二十二章 关于单个自变数 x 的阐释	3
§ 22.1 经验准确度与抽象准确度, 现代实数概念	3
§ 22.2 精确数学与近似数学, 纯粹几何中亦有此分野	5
§ 22.3 直观与思维, 从几何的不同方面说明	9
§ 22.4 用关于点集的两个定理来阐明	11
第二十三章 单变数 x 的函数 $y = f(x)$	16
§ 23.1 函数的抽象确定和经验确定(函数带概念)	16
§ 23.2 关于空间直观的引导作用	19
§ 23.3 自然规律的准确度(附关于物质构成的 不同观点)	21
§ 23.4 经验曲线的属性: 连通性、方向、曲率	25
§ 23.5 关于连续函数的柯西定义和经验曲线类似到	

什么程度?	31
§ 23.6 连续函数的可积性	35
§ 23.7 关于最大值和最小值的存在定理	39
§ 23.8 4个广义导数	41
§ 23.9 魏尔斯特拉斯不可微函数;它的形象概述.....	46
§ 23.10 魏尔斯特拉斯函数的不可微性.....	53
§ 23.11 “合理”函数.....	60
第二十四章 函数的近似表示	62
§ 24.1 用合理函数近似表示经验曲线	62
§ 24.2 用简单解析式近似表示合理函数	64
§ 24.3 拉格朗日插值公式	65
§ 24.4 泰勒定理和泰勒级数	69
§ 24.5 用拉格朗日多项式近似表示积分和导函数	72
§ 24.6 关于解析函数及其在阐释自然中的作用	75
§ 24.7 用有尽三角级数插值法	80
第二十五章 进一步阐述函数的三角函数表示	85
§ 25.1 经验函数表示中的误差估计	85
§ 25.2 通过最小二乘法所得的三角级数插值	87
§ 25.3 调和分析仪	89
§ 25.4 三角级数举例	92
§ 25.5 切比雪夫关于插值法的工作	99
第二十六章 二元函数.....	102
§ 26.1 连续性.....	102

§ 26.2	偏导次序的颠倒 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 的实例	107
§ 26.3	用球函数级数近似表示球面上的函数	115
§ 26.4	球函数在球面上的值分布	122
§ 26.5	用有尽球函数级数作近似表示的误差估计	124

第八部分 平面曲线的自由几何

第二十七章	从精确理论观点讨论平面几何	129
§ 27.1	关于点集的若干定理	129
§ 27.2	通过对两个或多个不相交圆的反演 所产生的点集	130
§ 27.3	极限点集的性质	136
§ 27.4	二维连续统概念、一般曲线概念	140
§ 27.5	覆盖整个正方形的皮亚诺曲线	142
§ 27.6	较狭义的曲线概念：若当曲线	149
§ 27.7	更狭义的曲线概念：正则曲线	153
§ 27.8	用正则理想曲线近似表示直观曲线	154
§ 27.9	理想曲线的可感知性	155
§ 27.10	特殊理想曲线：解析曲线与代数曲线，代数 曲线的格拉斯曼几何产生法	157
§ 27.11	用理想图形表现经验图形；佩雷观点	161
第二十八章	继续从精确理论观点讨论平面几何	163
§ 28.1	对两个相切圆的相继反演	163

§ 28.2	对3个循环相切圆的相继反演(“模图形”).....	167
§ 28.3	4个循环相切圆的标准款.....	171
§ 28.4	4个循环相切圆的一般款.....	173
§ 28.5	所得非解析曲线的性质.....	177
§ 28.6	这整个论述的前提,韦龙尼斯的进一步理想化.....	183
第二十九章	转入应用几何: A. 测量学.....	186
§ 29.1	一切实际度量的不准确性,斯涅尼奥斯 课题的实践.....	186
§ 29.2	通过多余的度量来确定准确度,最小 二乘法的原则阐述.....	189
§ 29.3	近似计算,用关于球面小三角形的勒让德定理来 说明.....	191
§ 29.4	地球参考椭圆面上最短线在测量学中的意义 (附关于微分方程论的假设).....	192
§ 29.5	关于水准面及其实际测定.....	197
第三十章	续论应用几何: B. 作图几何.....	201
§ 30.1	关于作图几何中一种误差理论的假设, 用帕斯卡定理的作图说明.....	201
§ 30.2	由经验图形推导理想曲线性质的可能性.....	205
§ 30.3	对代数曲线的应用,将要用到的关于代数的 知识.....	208
§ 30.4	提出所要证明的定理: $w' + 2t'' = n(n-2)$	214
§ 30.5	证明中将采用的连续性方法.....	216