



武汉大学
百年名典

静不定结构

俞忽 著

山
高
水
長
流
風
是
美

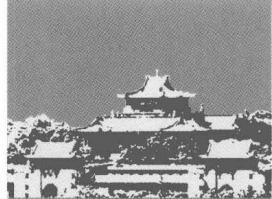
根
深
葉
茂
風
亦
聲
洪



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社





武汉大学

百年名典

静不定结构

俞忽 著



武汉大学出版社

WUHAN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

静不定结构/俞忽著. —武汉: 武汉大学出版社, 2010. 2
武汉大学百年名典
ISBN 978-7-307-07593-1

I. 静… II. 俞… III. 静不定—建筑结构 IV. TU311.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 019382 号

责任编辑: 杨 华 责任校对: 程小宜 版式设计: 支 笛

出版发行: 武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件: cbs22@whu.edu.cn 网址: www.wdp.com.cn)

印刷: 武汉中远印务有限公司

开本: 720 × 980 1/16 印张: 49.5 字数: 711 千字 插页: 4 插表: 8

版次: 2010 年 2 月第 1 版 2010 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-07593-1/TU · 84 定价: 98.00 元

版权所有, 不得翻印; 凡购我社的图书, 如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请与当地图书销售部门联系调换。

《武汉大学百年名典》出版前言

百年武汉大学,走过的是学术传承、学术发展和学术创新的辉煌路程;世纪珞珈山水,承沐的是学者大师们学术风范、学术精神和学术风格的润泽。在武汉大学发展的不同年代,一批批著名学者和学术大师在这里辛勤耕耘,教书育人,著书立说。他们在学术上精品、上品纷呈,有的在继承传统中开创新论,有的集众家之说而独成一派,也有的学贯中西而独领风骚,还有的因顺应时代发展潮流而开学术学科先河。所有这些,构成了武汉大学百年学府最深厚、最深刻的学术底蕴。

武汉大学历年累积的学术精品、上品,不仅凸现了武汉大学“自强、弘毅、求是、拓新”的学术风格和学术风范,而且也丰富了武汉大学“自强、弘毅、求是、拓新”的学术气派和学术精神;不仅深刻反映了武汉大学有过的人文社会科学和自然科学的辉煌的学术成就,而且也从多方面映现了 20 世纪中国人文社会科学和自然科学发展的最具代表性的学术成就。高等学府,自当以学者为敬,以学术为尊,以学风为重;自当在尊重不同学术成就中增进学术繁荣,在包容不同学术观点中提升学术品质。为此,我们纵览武汉大学百年学术源流,取其上品,掬其精华,结集出版,是为《武汉大学百年名典》。

“根深叶茂,实大声洪。山高水长,流风甚美。”这是董必武同志 1963 年 11 月为武汉大学校庆题写的诗句,长期以来为武汉大学师生传颂。我们以此诗句为《武汉大学百年名典》的封面题词,实是希望武汉大学留存的那些泽被当时、惠及后人的学术精品、上品,能在现时代得到更为广泛的发扬和传承;实是希望《武汉大学百年名典》这一恢宏的出版工程,能为中华优秀传统文化的积累和当代中国学术的繁荣有所建树。

《武汉大学百年名典》编审委员会

再版说明

俞忽先生所著《静不定结构》曾于 1954 年 12 月由高等教育出版社出版发行。我社据其版改以简体新版,并力求保持全书原貌。由于年代关系,原版中字、词、数字、符号用法等具有其时代特征,与现代图书出版规范不尽一致,新版中大多予以保留。书中例题和表的计算非常麻烦,当年先生花了两年多时间才完成,全靠算盘计算。表内数字有些差错。本着尊重历史的态度,未作重大更改。新版仅将微分符号 d 、圆周率 π 等由白斜体改为白正体;对原书中个别排版错误(如原书第 50 页缺漏右中括号“ $]$ ”,第 162 页公式号(3-25)应为(3-26))等作了修改,对缺漏项(如原书第 318 页方程式(12)缺漏“ $\times 0.7392$ ”项)作了补充;对个别将牵涉较大改动的版式问题未作修改,仅加注说明提示读者注意。

武汉大学出版社

2010 年 1 月

序

这本书初稿是用英文写的。最初于 1933 年由我自己花钱付印。曾在几家外国杂志上作了介绍,但在国民党反动时期,这种科学著作很难用祖国文字出版。到 1935 年,我又得了一点新材料,才把这本书在武汉大学当讲义用铅字排印。

抗战前,武汉大学答应我将这本书当武大丛书出版,由武大印刷所排印,打算先印一千本。已经排印了二百多面,抗战事起,武汉大学搬家到四川乐山。我的书排好的一部分也装箱往四川搬。到了宜昌,日本飞机一炸,一起炸光。幸好原稿由我自己带到四川,没有被炸毁。

现在这一本书大部分是从原稿翻译的,一部分完全写过。我写这本书的时候极力避免抄写人家的东西。因此在许多地方我用的方法和人家素常用的方法是不同的。

譬如求偏移的时候,我是用的相对偏移法,到现在为止,我还没有发现什么别的方法比我这个方法还要省事,还要准确。分析连续桁架和牢接架桥时,利用相对偏移也非常便利。

解联立方程式时我用逐渐加值法。方程式愈多,这个方法的优点就愈显著。分析各种牢接框架时,我总是用这个方法解联立方程式。如果弯矩分配法改用逐渐加值法,可以少写许多数字,表 2-27 就是一个例子。

分析有斜边的牢接框架时,我用三个 α 的方程式(1-17a), (1-18a) 和(1-19a), 从这三个方程式又导得三个弯矩的方程式(1-17c), (1-18c) 和(1-19c)。

计算牢接架桥和拱桥时,我总是把他排成许多表。当然别人也是用表的,但是我总觉得人家的表都没有我的表排得紧密。

计算悬桥时,悬索的张力我是从他的伸长尺寸推算出来的,计算起来不但省事(只须解一二次方程式)而且比用偏移理论法准确。

设计拱桥时,我用了许多表。这些表大约花了我二年的工夫才算成功。利用这些表,我们就可很快的把拱的形式尺寸定得刚刚恰好,不太强也不太弱。

计算矩形平版时,我用求 Fourier 氏级数的方法先把平版的偏移的双正弦级数求得,再把双级数改成单级数。平版上面只有集中荷重时,把他的偏移的双级数变成单级数,开始时也没有办法。后来我利用两个余弦级数,总算把这个问题解决了。这是研究平版时一个最重要的方程式,有了这一个方程式后,其他的平版的问题才能着手研究。我研究矩形平版大约在 1946 年开始,在 1948 年才把稿件整理就绪,在 1949 年才在武汉大学工科丛刊发表。后来我发现在苏联学者 A. C. Калманок 著的 *Строительная Механика Пластинок* (1950) 这一本书的里面也有矩形平版,在集中荷重之下,发生的偏移的单级数方程式,和我的方程式完全相同。但是我们的出发点和采用的方法是不同的,真是殊途同归。

1952 年长江水利委员会技术人员关于荆江防洪工程的闸门底版的设计有不同的意见,因此我写了一篇“混凝土底版的应力”在新科学发表。仍是先求得双级数的偏移方程式,再把一个双级数变成两个双级数。两个双级数中间,一个可改成单级数,另一个虽不能改成单级数,但收敛很快,这样也就把矩形底版的分析问题解决了。虽然如此,每一个例题的计算仍然是非常麻烦的。我很希望有哪位年轻同志肯做一点苦工,把底版在各种荷重情形之下发生的应力都算一算,然后制成图表,给人家参考,才是功德无量呢!

矩形底版问题解决之后,狭长底版的问题就显得简单了。在这里我把一个单级数变成两个单级数,再把一个单级数变成代数多项式,另一个是收敛很快的单级数。用这个方法计算狭长底版比用经典方法要省事得多。

俞 忽

1953 年 7 月 7 日

目 录

序.....	(1)
第一章 偏移和逐渐加值法.....	(1)
1-1 桁架的偏移:虚单位荷重法	(1)
1-2 简单梁的偏移:虚单位荷重法	(9)
1-3 相对偏移	(12)
1-4 简单梁的偏移:相对偏移法	(13)
1-5 桁架的偏移:相对偏移法	(14)
1-6 弯梁的偏移	(24)
1-7 最少工定理	(29)
1-8 相互定理	(41)
1-9 牢接结构的几个方程式	(43)
1-10 逐渐加值法	(49)
第二章 各种牢接结构	(63)
2-1 四边形框架	(63)
2-2 五边形框架	(72)
2-3 两边平行的四边形框架	(82)
2-4 空腹桁架	(90)
2-5 上下对称的空腹桁架	(116)
2-6 上下对称的桁架:另一解法	(133)
2-7 厂房屋架	(140)
2-8 矩形框格	(163)

2-9	两边不对称的多层多间屋架	(175)
2-10	两边对称的多层多间屋架	(194)
2-11	半牢接框格	(215)
2-12	横截面不全部一律的杆子和多间锯齿形厂房屋架 ...	(232)
2-13	副应力	(245)
第三章	连续梁和连续桁架	(267)
3-1	双孔连续梁	(267)
3-2	外面两跨间相等的三跨间连续架	(271)
3-3	两跨间相等的连续桁架	(276)
3-4	三跨间连续桁架	(285)
第四章	牢接架桥	(308)
4-1	铰支座单孔牢接架桥	(308)
4-2	固定支座单孔牢接架桥	(315)
4-3	铰支座双孔牢接架桥	(323)
4-4	固定支座双孔牢接架桥	(332)
4-5	铰支座三孔牢接架桥	(344)
4-6	固定支座三孔牢接架桥	(363)
4-7	斜交铰支座单孔牢接架桥	(380)
第五章	悬桥	(390)
5-1	悬桥的理论	(390)
5-2	双铰悬桥	(418)
5-3	连续悬桥	(436)
第六章	拱桥	(460)
6-1	固定端拱桥	(460)
6-2	固定端拱桥:轴向力的影响不算	(470)
6-3	固定端拱桥:弯度的影响	(471)

6-4	固定端对称拱桥的设计	(480)
6-5	连续拱桥	(654)
第七章	长方形薄版	(681)
7-1	三角级数	(681)
7-2	四边简支的长方形薄版上面摆满匀布荷重 w	(690)
7-3	四边简支的长方形薄版上面有一集中荷重	(709)
7-4	一边固定三边简支的矩形薄版	(717)
7-5	两邻近边固定,其余两邻近边简支的 方形薄版上面全部有匀布荷重	(722)
7-6	两对边没有支承其余两对边简支的平版	(726)
7-7	一边没有支承,三边简支的平版	(735)
7-8	四角简单支承的方平版上面摆满匀布荷重	(738)
7-9	四边简单支承,每五分之一宽度有四根柱子 支承的方形平版上面摆满匀布荷重	(741)
7-10	四边简单支承,每三分之一宽度,纵横两向, 另有直线连续简单支承的方平版	(750)
7-11	四边简支, $x=0$ 和 $x=1$ 边的长度 非常大的矩形平版	(756)
7-12	狭长底版的应力	(757)
7-13	混凝土底版的应力	(765)

第一章 偏移和逐渐加值法

1-1 桁架的偏移:虚单位荷重法

在这一本书的里面:

x_A, y_A 代表 A 点的横纵坐标;

Δ_{Ax} 代表 A 点的横向偏移,正方向朝右;

Δ_{Ay} 代表 A 点的竖向偏移,正方向朝下;

Δ_{Az} 代表 A 点的角度偏移,正方向顺钟转;

A 代表杆的横截面面积;

I 代表杆的惯性矩;

E 代表弹性系数;

S 代表杆的直接拉应力。

别的符号等他们初次出现时,我们再解释。横纵坐标轴的正方向朝右朝上。 y 轴偶然也朝下,如果是这样的话,我们就临时声明。

桁架的任一点的地位偏移 假定图 1-1 表示的结构上有荷重 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 。假定 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 的作用点 $A, B, C, \dots$ 在 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 的方向里的偏移是 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ 。假定这些荷重和他们的作用点的偏移是慢慢的增加起来的,这些荷重所做的工都变做形变能,储藏在结构里,没有发生一点动能。把 A 点移动一个些小的距离 Δ_1 的过程中间, A 点的荷重开始是零,最后是 P_1 ,平均是 $\frac{1}{2}P_1$,因此这个荷重所做的工是 $\frac{1}{2}P_1\Delta_1$ 。各荷重所做的工是 $\sum \frac{1}{2}P\Delta$,包括所有的荷重。各荷重从零增

加到 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 的时候, 假定结构上任何一杆 DE 的应力从 0 增加到 S , 他的长度从 l 增加到 $l + \frac{Sl}{AE}$, 那么各荷重在这根杆上所做的工, 也就是这杆的形变能, 是 $\frac{1}{2} S \times \frac{Sl}{AE} = \frac{S^2 l}{2AE}$ 。所有的杆子的总形变能是 $\sum \frac{S^2 l}{2AE}$ 。在有弹性的结构上, 这个总形变能应该和各荷重所做的工相等; 排列成方程式:

$$\sum \frac{S^2 l}{2AE} = \sum \frac{1}{2} P \Delta. \quad (1)$$

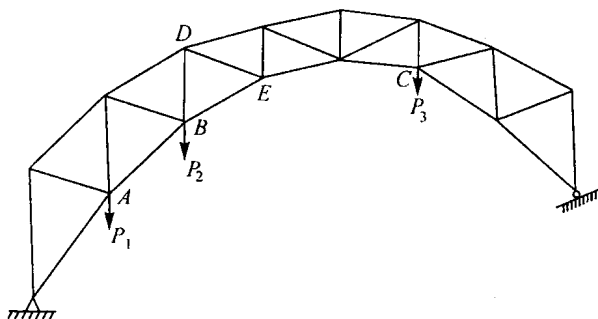


图 1-1

现在让我们在 C 点放一个新荷重 Q , 方向和 P_3 的方向相同。假定这个新荷重加入后, $A, B, C, \dots$ 各点在 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 的方向里得到新偏移 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ 。运用方程式(1),

$$\sum \frac{(S + uQ)^2 l}{2AE} = \frac{1}{2} \sum P(\Delta + \delta) + \frac{1}{2} Q(\Delta_3 + \delta_3), \quad (2)$$

这里 uQ = 新荷重在各杆上所发生的应力。

新荷重没有加入以前, 假定任一杆的应力是 S , 新荷重加入以后, 同一杆的应力就变成 $S + uQ$, 平均是 $S + \frac{1}{2} uQ$, 同时杆的长度又从 $l + \frac{Sl}{AE}$ 增加到 $S + \frac{Sl}{AE} + \frac{uQl}{AE}$, 可见得新荷重加入以后, 各荷重对于这根杆

子加做的工是

$$\left(S + \frac{1}{2}uQ\right)\frac{uQl}{AE},$$

他们对于结构的全部的杆子加做的工(也就是各杆增加的形变能的和)是

$$\sum \frac{\left(S + \frac{1}{2}uQ\right)uQl}{AE}.$$

新荷重从0增加到他的最后数值 Q 时, $P_1, P_2, P_3, \dots$ 的数值始终没有改变,但是他们的作用点各得到一个新偏移 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$,因此这些荷重加做的工一共是 $P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + P_3\delta_3 + \dots = \sum P\delta$,同样新荷重所做的工是 $\frac{1}{2}Q\delta_3$.各杆的形变能的增加应该和各荷重加做的工相等,因此

$$\sum \frac{\left(S + \frac{1}{2}uQ\right)uQl}{AE} = \sum P\delta + \frac{1}{2}Q\delta_3. \quad (3)$$

新荷重单独作用的时候,

$$\sum \frac{u^2 Q^2 l}{2AE} = \frac{1}{2}Q\delta_3. \quad (4)$$

从方程式(3)减去方程式(4),

$$\sum \frac{SuQl}{AE} = \sum P\delta. \quad (5)$$

从方程式(2),(4)和(5),我们得

$$\sum \frac{(S^2 + SuQ)l}{2AE} = \frac{1}{2} \sum P\Delta + \frac{1}{2}Q\Delta_3. \quad (6)$$

从方程式(1)和(6),我们得

$$\Delta_3 = \sum \frac{Sl}{AE}u. \quad (1-1)$$

这就是一个结构上任何一点 C 在任何一个方向(如果没有在这一个方向作用的荷重,那么 $P_3 = 0$)的偏移的普通方程式。 u 是一个纯粹

比例,因为便利起见,我们往往说他是一个单位荷重放在 C 点时各杆的应力。我们求 C 点的那一个方向的偏移,我们就把那单位荷重放在那个方向里。

Castigliano 的第一定理 假定 $S = u_1 P_1 + u_2 P_2 + u_3 P_3 + \dots$, 那么各杆的总形变能 U 是

$$U = \frac{1}{2} \sum \frac{S^2 l}{AE} = \frac{1}{2} \sum \frac{l}{AE} (u_1 P_1 + u_2 P_2 + u_3 P_3 + \dots)^2.$$

把 U 对 P_3 微分,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial P_3} &= \sum \frac{l}{AE} (u_1 P_1 + u_2 P_2 + u_3 P_3 + \dots) u_3 = \sum \frac{Sl}{AE} \frac{\partial S}{\partial P_3} \\ &= \sum \frac{Sl}{AE} u_3 = \Delta_3. \end{aligned} \quad (1-1a)$$

这就是 Castigliano 的第一定理。用语言解说起来,就是总形变能对于任何一个荷重 P_3 的偏导数等于 P_3 的作用点在 P_3 的方向里的偏移。

现在我们打算把图 1-2 表示的那个桁架的几个节点的偏移用上面说的方法算一算。这桁架上面的荷重都集中在下方的各节点,每节点 69 吨。各杆的应力,尺寸,各节点的竖向偏移和联结点 11 的横向偏移的计算见表 1-1。表内各行多半是不解自明。 E 是每平方公厘 20400 公斤。

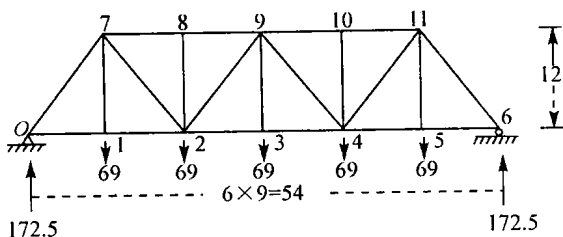


图 1-2

偏移的计算

杆	l (公尺)	A (平方公厘)	S (吨)	$\frac{S}{AE}$ (公厘)	u_{1y} (6)	$\frac{S}{AE}u_{1y}$ (7)	u_{2y} (8)	$\frac{S}{AE}u_{2y}$ (9)	u_{3y} (10)	$\frac{S}{AE}u_{3y}$ (11)	u_{11x} (12)	$\frac{S}{AE}u_{11x}$ (公厘)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
0—1	9	14800	129.38	3.857	0.6250	2.411	0.5000	1.929	0.3750	1.446	0.8333	3.214
1—2	9	14800	129.38	3.857	0.6250	2.411	0.5000	1.929	0.3750	1.446	0.8333	3.214
2—3	9	26500	232.88	3.877	0.3750	1.454	0.7500	2.908	1.1250	4.362	0.5000	1.939
3—4	9	26500	232.88	3.877	0.3750	1.454	0.7500	2.908	1.1250	4.362	0.5000	1.939
4—5	9	14800	129.38	3.857	0.1250	0.482	0.2500	0.964	0.3750	1.446	0.1667	0.643
5—6	9	14800	129.38	3.857	0.1250	0.482	0.2500	0.964	0.3750	1.446	0.1667	0.643
7—8	9	23500	-207.00	-3.886	-0.5000	1.943	-1.0000	3.886	-0.7500	2.915	0.3333	-1.295
8—9	9	23500	-207.00	-3.886	-0.5000	1.943	-1.0000	3.886	-0.7500	2.915	0.3333	-1.295
9—10	9	23500	-207.00	-3.886	-0.2500	0.972	-0.5000	1.943	-0.7500	2.915	0.6667	-2.591
10—11	9	23500	-207.00	-3.886	-0.2500	0.972	-0.5000	1.943	-0.7500	2.915	0.6667	-2.591
0—7	15	24800	-215.63	-6.393	-1.0417	6.659	-0.8333	5.328	-0.6250	3.996	0.2778	-1.776
1—7	12	11100	69.00	3.657	1.0000	3.657	0	0	0	0	0	0

续表

杆	l (公尺)	A (平方公厘)	S (吨)	$\frac{S}{AE}$ (公厘)	u_{1y}	$\frac{S}{AE}u_{1y}$	u_{2y}	$\frac{S}{AE}u_{2y}$ (公厘)	u_{3y}	$\frac{S}{AE}u_{3y}$ (公厘)	u_{11x}	$\frac{S}{AE}u_{11x}$ (公厘)
7—2	15	19700	129.38	4.829	-0.2083	-1.006	0.8333	4.024	0.6250	3.018	-0.2778	-1.341
2—8	12	11100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2—9	15	9500	-43.13	-3.338	0.2083	-0.695	0.4167	-1.391	-0.6250	2.086	0.2778	-0.927
3—9	12	11100	69.00	3.657	0	0	0	0	1.0000	3.657	0	0
9—4	15	9500	-43.13	-3.338	-0.2083	0.695	-0.4167	1.391	-0.6250	2.086	-0.2778	0.927
4—10	12	11100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4—11	15	19700	129.38	4.829	0.2083	1.006	0.4167	2.012	0.6250	3.018	0.2778	1.341
5—11	12	11100	69.00	3.657	0	0	0	0	0	0	0	0
11—6	15	24800	-215.63	-6.393	-0.2083	1.332	-0.4167	2.664	-0.6250	3.996	-0.2778	1.776
$\Delta_{1y} = 26.172 \quad \Delta_{2y} = 37.288 \quad \Delta_{3y} = 48.025 \quad \Delta_{11x} = 3.820$												

桁架的任一杆的角度偏移 假定 AB 杆的长度是 l_1 , 他的长度的增加和角度偏移是 dl_1 和 Δ_z 。假定 AB 的最后地位是 $A'B'$ (图 1-3), 那么 $A'B'$ 的长度是 $l_1 + dl_1$ 。从 A', B' 两点画两根和 AB 杆垂直的线, 和 AB 杆相交于 A'' 和 B'' 两点, 那么

$$A'A'' + B''B' = A'B' \sin \Delta_z = (l_1 + dl_1) \sin \Delta_z.$$

Δ_z 和 dl_1 都很小, $\sin \Delta_z$ 简直等于 Δ_z , 同时乘积 $dl_1 \Delta_z$ 和乘积 $l_1 \Delta_z$ 比起来也很小, 可以弃掉, 因此

$$A'A'' + B''B' = l_1 \Delta_z.$$

移项后, 再用 l_1 除:

$$\Delta_z = \frac{A'A'' + B''B'}{l_1}.$$

但是 $A'A''$ 和 $B''B'$ 是点 A 和 B 在和杆 AB 垂直的方向里面的偏移, 依照方程式 (1-1):

$$A'A'' = \sum \frac{Sl}{AE} u_A, \quad B''B' = \sum \frac{Sl}{AE} u_B,$$

这里 u_A 是一个放在点 A 方向从 A'' 到 A' 的单位荷重在各杆上面发生的应力; u_B 是一个放在点 B 方向从 B'' 到 B' 的单位荷重在各杆上面发生的应力。

因此

$$\begin{aligned} \Delta_z &= \frac{1}{l_1} \left(\sum \frac{Sl}{AE} u_A + \sum \frac{Sl}{AE} u_B \right) = \sum \frac{Sl}{AE} \left(\frac{u_A + u_B}{l_1} \right) \\ &= \sum \frac{Sl}{AE} u_z, \end{aligned}$$

这里 u_z 是一个等于 $\frac{1}{l_1}$ 的荷重放在 A 点方向从 A'' 到 A' 和另一个等于

$\frac{1}{l_1}$ 的荷重放在 B 点方向从 B'' 到 B' 在各杆上面发生的应力。因为 AB 的长度是 l_1 , 这两个荷重就构成一个力矩等于 1 的力偶。表 1-2 是计算图 1-2 的桁架的 1—7 杆的角度偏移的结果。为节省地位起见, 所有 S 值或 u_{1-7z} 值是零的杆都没有放在表内。角度偏移的单位是弧度。

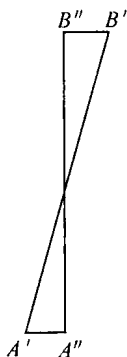


图 1-3