

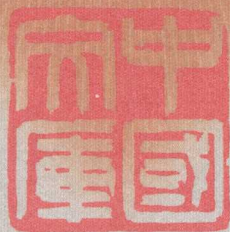
中国文库

· 科学技术类 ·

世界数学通史

(下册·二)

梁宗巨 王青建 孙宏安 著



辽宁教育出版社

中国文库
科学技术类

世界数学通史

(下册二)

梁宗巨 王青建 孙宏安 著

辽宁教育出版社

第十七章

中国明清数学

公元 1368 年，明太祖朱元璋在应天（今江苏南京）称帝，建国号“大明”。当年，明军攻入元大都（今北京），元顺帝北遁，元亡。此后经 20 余年苦战，彻底消灭了元朝残余势力，统一了全国。

公元 1616 年，清太祖努尔哈赤·爱新觉罗即大汗位，国号“大金”，后（1636）改为“大清”，1644 年，清军入北京，明亡，后经 30 余年的战争，统一了全国。

明清是中国历史上最后两个封建王朝，其数学发展经历了一个传统数学的衰落，西方数学的传入，传统数学的整理复兴和与世界数学合为一体的过程。

第一节 历史概况

在明清这两个王朝中，君主专制达到了顶峰，以加强君主专制为主要目的的政治制度和文教制度都已趋向高度完善。

由明建国到清代鸦片战争（1840）前这一时期，是中国古代史上“天崩地解”、变故迭起的时期。一方面，中国封建社会达到完全成熟，以它沉重的步伐缓缓前行；另一方面，在中国社会中已出现了资本主义的萌芽，即出现了对封建社会的否

定。同时，中国同外界有了前所未有的交往。也正是在这个时期，西方出现了文艺复兴的伟大运动，西方科学迅速勃兴，17世纪，更以“近代科学”而载入史册。与之相比较，虽然，中国古代科学在明清时期仍有若干发展，但此时，在中国没有产生近代科学——它不仅指科学成就，尤其指科学思想、科学方法和科学体系。对于这一点，英国著名科技史家李约瑟(J. Needham, 1900 - 1995)提出了一个著名的“李约瑟问题”：“从公元前1世纪到公元15世纪的漫长岁月中，中国人，在应用自然知识于满足人的需要方面，曾经胜过欧洲人，那么，为什么近代科学革命没有在中国发生呢？”〔1〕

值得注意的是，宋元科学（例如数学）的一些重要成果，尤其是属于发展到新层次的成果在此期间内出现了中断，直到清代中叶在西方科学的启迪下人们才重新了解它们。中西文化的交往，形成了在中国历史上产生深远影响的“西学东渐”的潮流，对中国科学发展产生了一系列的影响。

鸦片战争标志着中国历史进入了近代，中国被迫打开了大门。一方面，中国渐次沦为半封建半殖民地社会；另一方面，中国的仁人志士奋力图强，反对帝国主义和封建主义，在图强建国的行动中，也同时出现了传入的西方科学技术的“会通”和发展过程，最终中国科学与世界科学合流，成为世界科学的一个组成部分，这已是20世纪初的事了。

〔1〕 这一问题有许多种表述，上文中是常见的一种。另一种提法是：“既然中国在古代和中世纪如此先进，那么为何科学革命，近代科学在世界上的产生仅发生在欧洲？”见李约瑟为R·坦普尔(R. Temple)著《中国：发明与发现的国度》作的序，中译本，21世纪出版社，1995，第8页。

第二节 明代数学的特点

明代研究数学的人很多，流传至今的较为知名的数学著作就有：《九章算法比类大全》（吴敬，1450）；《新集通证古今算学宝鉴》（王文素，1524）；《勾股算术》（顾应祥，1533），《测圆海镜分类释术》（顾应祥，1550），《孤矢算术》（顾应祥，1552）；《盘珠算法》（徐心鲁，1537）；《数学通轨》（柯尚迁，1578）；《新编直指算法统宗》（程大位，1592）；《算术指南》（黄龙吟，1604）等。

（一）结构回归

明代的数学著述的结构表现出不同于宋元数学的特点。以吴敬的《九章算法比类大全》为例来考察。这部著作的主要内容见表 17.1 所述。

表 17.1

序号	章名	问题	内容
1	乘除开方起例	194	数学基础知识：数的单位制，度量衡制，乘除法及其简化，开方法，单位化法，差分，堆垛、修筑的计算方法。
2	方田	214	关于田地面积和分数计算（同《九章算术》同名之章的内容）。 分为四部分：“古问”，古代著作中的问题（基本上是《九章》中的全部原问）。“比类”，与古问同类的问题。“截田”，《杨辉算法》中的有关问题。“诗词”，以诗词形式提出的属方田的有关问题。

续表

序号	章名	问题	内容
3	粟米	212	同《九章》同名章, 粮食等贸易问题分古问、比类、诗词三部分, 说明见前。以下与《九章》同名的各章(序号2—10)都按此把内容分为三部分。
4	衰分	187	同《九章》同名章, 比例分配问题。
5	少广	106	同《九章》同名章, 求边长、开方等。
6	商功	135	同《九章》同名章, 土方工程问题。
7	均输	119	同《九章·均输》。
8	盈不足	64	同《九章·盈不足》。
9	方程	43	同《九章·方程》。
10	勾股	101	同《九章·勾股》。
11	各色开方	94	各种开方问题, 计有开三乘方、四乘方、五乘方即解四、五、六次方程的问题。

由表 17.1 所示内容可见, 在宏观结构方面, 《九章算法比类大全》与《九章算术》相似, 即保持了《九章算术》的宏观结构传统——实用性结构, 即按数学的应用领域和常用数学模型进行组织。从 2—10 各章中采用了《九章算术》的同样结构甚至还基本上收入了《九章算术》各章所有的原问, 同时增添了第 1 章“乘除开方起例”, 给出了全书要用到的数学基础知识, 更加强了全书的实用性: 可以随时找出这些基础知识, 如乘除的基本算法等。书中增加了许多商业方面的计算题目, 说明明代商业发展的社会需要已经在数学著作中得到反应。这是

其实用性的另一个表现。

与宋代著作《杨辉算法》相比较，吴敬的《九章算法比类大全》包含了《杨辉算法》中《乘除通变本末》和《田亩比类乘除捷法》的大部分内容，但形成体系的方法却不是前章所指出的《杨辉算法》的逻辑性较强的方式，而是《九章算术》的实用性体系的方式，这是它与宋元数学著作相比较，向“实用性”回归的一个重要步骤。

后来的明代数学著作如《算学宝鉴》、《数学通轨》、《算法统宗》等都在宏观结构上继承了吴敬的模式——先论述总的计算方法，即所谓“算学知识”，然后按《九章算术》分类给出具体应用的题问及算法。即宏观结构中形成实用性体系这一点上，在明代数学著作中是贯彻始终的。

从微观结构来看，《九章算法比类大全》也全面采用了《九章算术》中的一种结构方式——“术—例题”方式。在每章的开头（第2—10章）给出本章主要应用的“术”（称为“法”），然后给出题，每题有问、答、法——在本题中术的具体用法。这也是与《九章算术》一致的地方。

多数章（3—10）主要内容分为三部分，一为“古问”，一为“比类”，一为“诗词”，如表17.1中所述。

（二）珠算普及

珠算在元末明初便已相当普及。而从《九章算法比类大全》起的明代数学表现出由筹算过渡到珠算的过程。关于中国珠算的起源可见本书上册第115—116页，这里要指出的是，虽然现在还不能确定珠算起源于何时，但在元末明初已有相当广的应用则是事实。在数学著作中至今所见最先记载珠算的正是《九章算法比类大全》，其中乘除用珠算而开方用筹算，《算

学宝鉴》也如此，它们可视为由筹算演变为珠算的过渡。^{〔1〕}从《盘珠算法》一书起，明代数学进入了珠算完全取代筹算的时代，《数学通轨》和《算法统宗》是完全的珠算著作了。珠算的使用和取代筹算，是明代数学的一大发展，对后来的中国数学产生了巨大的影响。

珠算的一大特点是有极好的数学计算特征，由于汉语一字一音，运算法则编成口诀，流利顺口，配合“九九乘法歌诀”和十进位值制记数法，就能运算如飞。又简单易学，易于推广，所以很快在国内流行，成为家庭日用工具之一。并先后流传海外，如日本、朝鲜、东南亚各国，近年更传入美国、欧洲，并且日趋流行。一个发人深省的问题是：为什么在电子计算机日益普及的今天，人们仍然十分重视珠算呢？除了它具有良好的计算性能外（人们经过比较，有人认为，在作加法减法时其速度比计算器快，因而在作原始数据处理时，以算盘为第一选择），人们还普遍认为它有独特的教育功能（使数更具直观性？），这是任何别的计算工具都无法代替的。

（三）抽象课题的地位

从《九章算法比类大全》来看，尽管又回归到《九章算术》的结构方式，实用性又占了主导地位。但宋元数学的若干抽象内容也一直有所研究至少是保留。如该书最后一章“各色开方”卷就是研究“开方”这一抽象内容的。其内容为

开三乘方，开四乘方，开五乘方，开带从平方法
(17种)，开带从立方(4种)，带益从廉添积开三乘

〔1〕 华印椿：《中国珠算史稿》，中国财政经济出版社，1981，第70页，第73页。

方，开锁方（12种）。

这些都是纯数学的抽象研究，虽然多数题仍以“实用题”的形式给出。例如

今有四乘方积一十九万七千一百六十二亿四千五百三十二万三千七百七十六尺，问一方面几何？

答曰：四百五十六尺。

这显然没有现实原型。从这一点来说，可看作是继承了宋元数学的抽象研究的传统。但考其具体计算过程，其开高次方用了贾宪“开方作法本源图”，解高次方程则采用了贾宪的“增乘开方法”而不是后来更好的秦九韶的“正负开方法”，且没有引用解一般高次方程的方法。即在这一问题上已较宋元数学失去了不少东西。

《算学宝鉴》中还收有开六乘方、七乘方的问题（即开7次、8次方），其第四十一卷甚至还有一个开八乘方的问题，实际是求方程

$$x^9 + 25x^8 + 235x^7 + 1035x^6 + 2160x^5 + 1728x^4 = 27993600000$$
的正根。书中用“开方作法本源图”求出 $x = 12$ ，用此法解高次方程在现存中国古代数学著作中这是第一次。

《算法统宗》中仅见开立方问，书中也列入了“开方作法本源图”，且按这一本源的作法称可把此表推至“三十余乘方”，这也是抽象内容的研究。但对这一本源图“却不云作何作用”，即在程大位那里，连用“开方作法本源图”开高次方也不会了。宋元方程理论就失传了。

不过《算学宝鉴》和《算法统宗》中都引入了杨辉的“纵横图”问题，这也是对宋元抽象数学研究的继承，虽然仅对图

略加变化，理论上未有新的创造。

顾应祥的几部著作都可视为“纯”数学研究的著作（除《勾股算术》的若干测望问题有实用背景外）。顾氏身为云南巡抚，刑部尚书，是朝廷的一二品大员，其数学研究按他自己的说法为

自幼性好数学，然无师傅，每得诸家算书，辄中夜思索至于不寐，久之若神告之者，遂尽得其术。

即是由他对数学的兴趣决定的。这一点与吴敬、王文素、程大位诸人不同。吴敬，天启年间为浙江布政使司的幕僚，其所以入幕并受到倚重的原因是善算，能协助有关大臣进行其管理职责所需要的计算工作，所以吴敬尽管也爱好数学，但主要研究的却只能是实用性的内容；王文素与程大位都是商人出身，尤其程大位，本人就是商人，曾经商数十年，因而他的数学研究必然有商业应用的问题，而且可以说，就是为商业服务的，所以表现出更多的实用性。顾应祥却不然，虽然他的职责也需要若干数学知识，但他的著作却大多与职责无关，是一种纯数学的抽象研究。

在明代实用思想膨胀的情况下，数学中尚能保有若干抽象研究的园地，只能用数学本身具有高度抽象性来解释了：数学的抽象研究的结果将形成若干抽象课题，这些课题作为现实的数学问题流传下去，就会有人来研究，出于兴趣或别的动机，如开高次方，纵横图等，此外，出于作学问的“经解模式”，对数学经典的研究也可能构成抽象课题，如顾应祥对《测圆海镜》的研究。

顾应祥的纯数学课题研究主要有三点：勾股定理研究、弧矢计算研究和《测圆海镜》研究。从他的著作来看，他的研究

虽颇有心得，但整体水平却没有达到宋元数学的高度，最令人感兴趣的是他的《测圆海镜》研究没有达到李冶《测圆海镜》的水平。清《四库全书总目提要》对顾应祥这一研究工作的评价是

应祥得冶书于唐顺之，于立天元一语，互相推求，不得其解，遂去其细草，专演算法……殊不知立天元一之妙，能使诸法不能求者，可以得其法。若无其草，即冶已有不能得其法者，而徒沾沾于加减开方之数，可谓循枝叶而失本根者矣。

这一评价是很中肯的，说明顾氏已根本不懂“天元术”了。不仅天元术，而且宋元数学家创造的四元术、招差术、大衍求一术等也都在明代失传（元代中期就已不见继承了）。这些成果在前述各种明代数学著作中都没有出现，这就是下面要详述的、著名的中国古代数学的“中断”问题。

第三节 数学发展的“中断”

如前述，元代是中国古代数学（以及整个科学）达到高峰的时期，又是由高峰走向急剧衰落的转折点，这一转折史家一般称为中国古代数学的“中断”。

（一）“中断”释义

如前述，宋元数学取得了一系列具有世界历史意义的成果。但从朱世杰《四元玉鉴》（1303）之后，直到明代程大位的《算法统宗》（1592），三个世纪中，没有重要的创作。14世纪虽然也有《丁巨算法》（1355）、严恭《通原算法》（1372）

之类的数学著作，但是数量和质量都远不能与元代前期相比。1400—1500年间这一类著作也凤毛麟角〔现在可提的只有吴敬的《九章算法比类大全》（1450）〕。宋元时期所取得的重要的具有世界历史意义的成果，如天元术、四元术、正负开方术、大衍总数术等，在西方数学于明末传入中国之前，也一直没能得到进一步的研究和持续的发展，明代最重要的也是流传最广的数学著作，程大位的《算法统宗》（1592），除了算盘和歌诀之外，也没有新的创造。实际上，元末以及明代的数学著作中，根本就没有前述那些成就，由元末和明代数学著作来看，可以说作者连这些成就都看不懂了。总之，在西方数学传入之前，数学一直没有达到宋元数学的水平，至于宋元数学的许多重要成果则直到清代中期才作为历史研究发掘出来。对于这一史实，数学界称之为中国古代数学的“中断”。

这一“中断”无论在数学史上还是在文化史上都是一个非常奇特的事件。1303年朱世杰的《四元玉鉴》还是中国古代数学高峰的代表作之一，数十年内，所有的一流成果都失传了，数学只余下《丁巨算法》那样简单的日用计算了！为什么会出现数学的“中断”？这是一个非常重要而又尚无定论的问题。由于“中断”虽然出现在元代中期，但明代却整个继承了这一“中断”，所以有关的原因应由元明两代的情况来分析，本书在明清数学这一章来探讨这一问题。

（二）一门相关科学的停滞

如前述，中国古代数学与天文学有十分密切的联系。中国古代天文学主要表现为天象观测和历法编算两方面，而后者尤为重要，且基本上是一种数学工作，本书第十四章着重分析了历法编算对数学的促进作用。

由于编历工具（数学工具）的限制（它们相对比较粗糙），

一般历法使用一段时间后就须重新编订，在中国古代直至《授时历》颁用之前一直是这样的，至《授时历》，按《中国大百科全书·天文学》卷的记载，编订的历法多达 87 部，平均每 20 余年就要重编历法，否则，就会出现与天象不符的问题，如“交食不验”等。又如“郭守敬”一节所述，《授时历》是中国古代编订得比较好的历法，其中大量使用先进的数学工具，进行过大规模的实测，所以其精度稍高一些。但工具不完善的问题仍然存在，计算误差仍较大（如取 $\pi=3$ ），使用时间一久，仍然存在与观测情况不符的问题。因此，元代仍然存在改历、修历的要求，但终元之世（1280—1368）未尝改历，一直使用《授时历》，甚至直到明代仍沿用《授时历》，不过更名为《大统历》而已，又行用二百余年。《授时历》共使用 364 年，创一历法行用年代的记录。这么长的时间不改历，不是因为历法精确一直不出误差，从而无须改历，而是不想改以至于不会改历了。这一点在明代表现十分突出，实际上是天文学作为科学的停滞。这同时也意味着数学科学的“中断”问题：由于不改历，因而就无须研究有关的数学问题，不用教授有关的数学知识，几代人之后，人们就不会这些数学知识了（其间经历过战争、改朝换代等社会动乱），这时再想改历也无从改起了。在中国古代特定的条件下，天文学的停滞也就意味着数学的“中断”。

（三）数学“中断”的原因试析

中断的原因，是数学史上的一个重大问题，把它探讨清楚，有助于吸取历史教训。中外学者各从不同的角度去解释，但至今没有得到一致公认的结论。

“科学的发生和发展一开始就是由生产决定的”〔1〕或者说，经济因素归根结底起着决定性的作用，这是基本原理。但是历史进程是错综复杂的，除了经济因素之外，还有许多别的因素在直接起作用，在某一个历史时期里，甚至起着决定性的作用。

我们先从数学本身的特点和社会条件（主要是统治者的政策）这两个侧面去讨论这个问题。

(1) 中国传统数学的特点

中国古代书写和计算都用竹子（和西方用石子、贝壳和木板来计算很不相同），自古就形成一套以算为中心的筹算制度，筹算后来又发展成珠算。筹算、珠算支配中国数学两千多年，给中国数学带来几个明显的特点。

首先是很早就确立了10进位值制记数法。如前文所述，中国用筹记数，早就使用10进位值制。3888用筹表示是三Ⅲ 三Ⅲ 三Ⅲ，也很简单。中美洲的玛雅人虽然懂得位值的道理，但用的是20进制，巴比伦人也知道位值制，但用的是60进制。印度到6世纪末才有十进位值制记数法。使用位值制而又是十进的，以中国人为最早。

有了方便的记数法，简捷的四则运算就不难得到。再加上广泛地使用了口诀，于是能够“运筹如飞”。在这个基础上又出现了开平方、开立方的法则，这也是世界上最早的。三千多年前，埃及纸草书虽然已有分数，但所有分数都化为单分子分数，计算非常复杂。巴比伦人用60进分数，运算也很麻烦。欧几里得《几何原本》提到分数，但没有给出运算方法。欧洲直到15世纪以后才逐渐有现代分数算法，晚于中国一千多年。有了一整套简捷的运算方法，就有可能对某些具体问题建立优

〔1〕恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社，1971，第162页。

良的解法。事实上确是这样，中国在线性方程组及一元高次方程的解法方面是遥遥领先的。此外还有许多发明创造，前文已有论述。总之，筹算珠算制度使中国数学有算法化、实用化、计算化的特点，数学的发展表现为算法的建构和改进，这是前文中多次阐述过的。因此，人们认为“算学”这个名称比“数学”更贴切地反映中国古代数学的基本性质。^{〔1〕}

和西方比较，希腊数学着重推理、证明，主要的成就在几何方面。希腊人对数学作出了巨大的贡献，这是举世公认的，但希腊的体系也有局限性。他们坚持清晰的定义、严密的论证、演绎的体系，这是优点。但优点有时也会变成缺点，变成妨碍他们大胆接受新鲜事物的框框。例如，希腊人很早就发现不可通约量，但不敢承认无理数是数。又为了逻辑的严密性，给代数也披上了几何的外衣。把数看成是线段的长度，数的平方和立方看作面积和体积，而高于三次的幂无法作几何解释，于是便极力回避。另一方面，为了保持几何的“纯洁性”，不从实际问题中吸取营养。而新思想新概念的出现，往往带有逻辑上的困难，他们又拒绝接受，这就在很大程度上堵塞了发明创造的道路。公元4、5世纪，希腊几何实际上已成强弩之末。641年阿拉伯人占领亚历山大，图书馆被焚，最后迫使希腊数学衰亡。

中国传统数学本身也带有弱点，分述如下：

①筹算、珠算制度的局限性

近代数学特点之一，是大量使用符号。一套合适的符号决

〔1〕中国古代“算学”、“数学”并用，延续了几百年。1935年“中国数学会名词审查委员会”仍主张两词并存。直到1939年6月，为了划一起见，才确定用“数学”而不用“算学”。见国立编译馆编：《数学名词》，1947，第5页，“数学一名词确立之经过”。

不仅仅起到速记的作用,它能够精确、深刻地表达某种概念、方法和逻辑关系。算筹只能表示整数与分数,算盘连表示分数都有困难,更不用说无理数了。各种运算只能借助文字来叙述,用算筹是无法表示的。这妨碍了数学进一步抽象化。例如一般二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$,用算筹就无法表示。秦九韶尽管解了一个 10 次方程,但列不出一般的 n 次方程。

朱世杰用天、地、人、物来表示四个未知数,其系数分别放在“太”的下方、左方、右方和上方。上、下、左、右四个方位,只能放四个未知数。如果有五个未知数,就无法安排,推广到 n 个更不可能了。

筹算数学发展到 13 世纪,已经达到它的顶峰,再向前迈进,必须突破筹算的限制,向符号代数转化。但由于下面还要谈到的种种原因,这一步没有完成。本来用天、地、人、物表示未知数,已有引入符号的苗头。但从 14 世纪起,中国数学停滞了三百年,错过了向符号代数转化的契机。

其次,在筹算和珠算的运算过程中,参与运算的数字随着运算的进行而消失,中间出现的数字没有保留下来,最后只看到运算的结果。每一步是否有错,很难查出,也不容易发现一般的规律。

总之,筹算与珠算的特长是数值计算,中国在 13 世纪以前完全发挥了它的优越性,在计算方面取得了光辉的成就。数学进一步发展,要求更高的抽象化和符号化,筹算和珠算就显露出它的弱点。

②没有形成一个严密的演绎体系

演绎体系的形成,一方面是已有理论的总结,另一方面又是进一步发展的推动力。这时整个体系对于生产实践和社会需要具有相对的独立性,常常不是由于生产的推动而是为了解决内在的矛盾而产生新的理论。中国虽然也有类似公理的命题,

如“幂势既同则积不容异”的“祖氏公理”，但始终没有形成以公理为基础的逻辑演绎体系。数学理论多半是由于解决某些实际问题而引起。理论与理论之间缺乏紧密的联系。一旦生产实践和社会需要减弱，学术立刻就有中断或散失的危险。中国传统数学偏重于具体问题的解决，对纯理论的推导不大感兴趣。例如无理数的概念并不是经验事实的直接反映，而是理论推导的结果。希腊的毕达哥拉斯学派公元前6世纪掌握了勾股定理之后，立刻导致无理量的发现，并引起很大的震动。而中国早就知道勾股定理，但却没有出现无理量的概念。同样，素数的概念，角的概念也都没有出现。

一门数学发展到一定程度，在获得大量的具体方法之后，需要作理论上的概括，克服某些内在的矛盾，才能有所突破。中国13世纪天元术、四元术已取得重大成果，要想进一步提高，必须要有更坚实的逻辑基础，这一方面传统数学是比较薄弱的。例如朱世杰提出一个问题，构成5次方程（《四元玉鉴》的第一题） $x^5 - 9x^4 - 81x^3 + 729x^2 - 3888 = 0$ ，得到一个答案 $x = 3$ ，就已满足，不再去追问这个方程还有没有别的根（实际共有5个根，还有一个正根 $x = 6.614\cdots$ 符合题意）。这样他就很难再前进一步。加上下面还要说到的社会原因，朱世杰之后出现饱和、停滞的局面是不难理解的。

(2) 社会条件

学术的繁荣、科学的发达要有一定的条件。首先要有生产上和社会上的需要，其次要有一个以治学为业的知识阶层，他们有相当程度的言论自由。此外，统治者的文化政策和知识分子政策等等对整个科学发展也有重大的影响。下面举几个例子来说明这个问题。

中国春秋战国时代，私学盛行。从孔子的儒家学派开始，形成一个以治学为业的知识阶层，他们在讲学上有很大的自