微分方程式

季培特原著
馬君武譯述

商務印書館發行

微分方程式

季培特原著
馬君武譯述

商務印書館發行

民國二十一年一月二十九日敝公司突遭國難總務處印刷所編譯所書棧房均被炸燬附設之涵芬樓東方圖書館尚公小學亦遭殃及盡付焚如三十五載之經營隳於一旦迭蒙各界慰問督望速圖恢復詞意懇摯銜感何窮敝館雖處境艱困不敢不勉為其難因將需要較切各書先行覆印其他各書亦將次第出版惟是圖版裝製不能盡如原式事勢所限想荷鑒原謹布下忱統祈垂鑒

上海商務印書館謹啓

中華民國二十年二月初版
民國二十二年六月印行 國難後第一版

(一三三九)

微分方程式

Diffential-Glei Chungen

每册定價大洋貳元
外埠酌加運費匯費

原著者 Kiepert
譯述者 馬君武
發行人 王雲五 上海河南路
印刷者 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

四七四五

序　　言

吾國自輸進歐學以來。惟算學頗有可稱。算學書籍之繙譯事業。可分爲三期。第一期爲明季徐光啓利瑪竇之幾何天文。第二期爲李善蘭華蘅芳之微積代數。第三期爲近時留學生之諸等數學教科書。然於微分方程式一種。尙缺如焉。此書爲德國 Hannover 工藝大學教授季培特 Kiepert 所著。原以微分積分及微分方程式三種合刻。玆以前二種卷帙浩繁。姑置之。而譯其第三種。即今書也。此書專論常微分方程式。而偏微分方程式不具焉。是在各國皆另有專書。罕兼論者。時論之一派。謂救國在拓植學術。鄙人亦贊和斯論者之一分子。故孜孜然以輸入新學術爲務。淺學寡聞。幸當世大雅。有以教之。

千九百十一年七月三十日

馬君武序

於德京伯林

目　錄

第　一　章

常微分一次方程式之理論

第二章

常微分之高次方程式

第三章

m 次線微分方程式

第四章

聯立微分方程式

第五章

用漸近法求常微分方程式之積分

附錄

微分方程式

第一章

常微分一次方程式之理論

第一節

微分方程式之觀念及分類

凡方程式之具諸變數及任何高次之微係數者。名微分方程式。

此等方程式。分爲**常微分方程式**及**偏微分方程式**。依其所具函數與一自變數。或與多自變數相關而異。今此書祇論常微分方程式。

諸變數 $x, y, z,$ 爲有盡數。但其微係數爲同次的無盡小數。其對於有盡數。殆可棄去。故一微分方程式之兩邊。必須具微係數之同次函數。即當 $dx,\ dy,\ dz\ldots\ldots$ 以 t 乘之。

$d^2x,\ d^2y,\ d^2z\ldots\ldots$ 以 t^2 乘之

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$d^n x,\ d^n y,\ d^n z\ldots\ldots$以$t^n$乘之。

且方程式之兩邊。以合宜選得t之某指數除之。其式不變。

雖於微分方程式內。具偏微係數。此事亦合於理。

微分方程式。可分爲諸異次者。依其式內所具最高次之微係數以名之。命爲第一次，第二次，以至第n次之微分方程式。今設其方程式內只具二變數。及其微係數。有如

(1) $$(3y^2+7x^2)dy+(12xy-8x^2)dx=0$$

或

(1a) $$(3y^2+7x^2)\frac{dy}{dx}+12xy-8x^2=0.$$

(2) $$y^2-ax\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$$

(3) $$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=a.$$

(4) $$\frac{dy}{dx}+y.f(x)=\varphi(x).$$

爲一次微分方程式。

(5) $$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{x}{a^2}$$

(6) $$F(x, y)\frac{d^2y}{dx^2}=G(x, y)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

(7) $$\frac{\left[\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]^3}{\frac{d^2y}{dx^2}}=cy\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

爲二次微分方程式。

(8) $$F_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+F_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots\cdot$$
$$+F_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+F_n(x).y=\Phi(x)$$

爲 n 次微分方程式。但爲 n 次第一羃的微分方程式。或 n 次線的微分方程式。因其所具

$$y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \cdots\cdots\frac{d^ny}{dx^n}$$

諸數。皆爲第一羃的故也。

第 二 節

具二變數的一次微分方程式解法。

積分常數。

(參觀公式第 1)

常微分方程式之具二變數 x 及 y 者。最單簡之形。爲

(1) $$\frac{dy}{dx}=f'(x).$$

而其求得積分之式。爲

(2) $$y=f(x)+b.$$

以此式求微分。必得 (1) 式。而下式

(2a) $$y=\int f'(x)dx=f(x)+c$$

爲前列微分方程式之普通積分。其積分常數 b。設 x 等於 a 之時 y 等於 b 以定之。即

$$c=b-f(a)$$

由是得

(2b) $$y=b+f(x)-f(a)=\mathrm{F}(x, a, b)$$

本此法以求任一微分一次方程式。

(3) $$\mathrm{G}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0.$$

之函數。得

(4) $$y=\mathrm{F}(x, a, b).$$

設 $x=a$. 而 y 值爲 b. 爲前列微分方程式之普通積分。以此 y 值代入 (3) 式。必合於理。即

(5) $$\mathrm{G}[x, \mathrm{F}(x, a, b), \mathrm{F}'(x, a, b)[=0.$$

其 x, a, b 無論爲何。

次以圖畫法證之。y之初值b.無論如何。此數之普通積分。必合於理。

設以(3)式變爲下形。

(6) $$\frac{dy}{dx}=\phi(x, y).$$

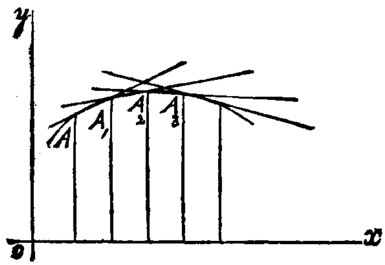
且設求得之方程式

(7) $$y=\mathrm{F}(x, a, b).$$

爲在xy面內之一曲線。則自微係數之幾何理。(見季氏著微分學公式表第17。)自方程式

(8) $$\frac{dy}{dx}=正切\,\alpha.$$

無論x值如何。可得曲線上切線之方向。因(8)式內之α爲切線及正x軸所作之角也。設P點自一初點A向外移動。於所沿曲線之任一點上。皆得(6)式所與方向。則此曲線名積分曲線。而具x及y之方程式。合於此類之積分曲線者。名前列微分方程式之積分方程式。用畧近法。可作此類積分曲線之圖。例如第一圖。A爲此曲線之初點



第 一 圖

其縱橫線爲 a 及 b。於是可作 A 點之切線。因自方程式正切 $\alpha=\varphi(a, b)$. 可算得 α 角之值也。

在此切線上尙有極相近之曲線點 A_1。其縱橫線爲 a_1, b_1。其角之方向。自下方程式得之。

(10) 正切 $\alpha_1=\varphi(a_1, b_1)$.

其次一切線 A_1A_2 A_2 點距 A_1 點極相近。而尙爲曲線上之一點。今由下方程式

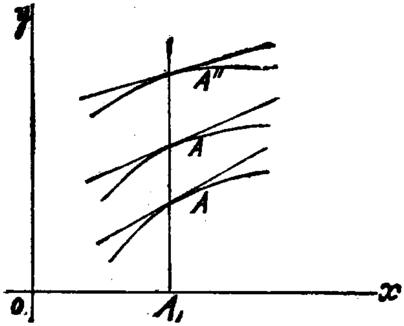
(11) 正切 $\alpha_2=\varphi(a_2, b_2)$.

得 A_2 點切線之方向。由是以得所求曲線之任多點及切線。合於前列之微分方程式者。

其實 $A, A_1, A_2, \ldots\ldots$ 諸點。不能相距極相近。而據此法不過得略相近之圖。其實前列之微分方程式。每具一積分曲線。其初點 A。可任便取之。

同時由圖畫法。可見微分方程式不惟具一積分。而具無窮多之積分。因 (6) 式於任一點 P 之具縱橫線 x 及 y 者。惟與正切之方向。故設 $x=a$. 而縱線 y 可任意設取。使等於 b。即不惟一曲線。而得無窮多之曲線。與前列之微分方

程式相合。



第二圖

此圖畫法又可用以計算 y 之彼此相從 b, b_1, b_2, ... 諸值。而自(6)式得

(12) $$\frac{b_1-b}{a_1-a}=\varphi(a,b).$$

或 $b_1=b+(a_1-a)\varphi(a,b)$.

及

(13) $$b_2=b_1+(a_2-a_1)\varphi(a_1,b_1).$$

等等。其 b_1, b_2, 不過爲畧近值。其所設 a_1-a, a_2-a_1, ...諸差愈小。則諸值之去眞值愈近。

函數 $\varphi(x,y)$. 當所研究 x 及 y 之值爲單義的及恒久的。但使 x 有隨出之諸值。則 y 亦必有相當隨出之諸值。故可預定微分方程式(6)之積分爲下形。

(14) $$y=F(x,a,b).$$

此積分函數。因短簡之故。可寫爲 $f(x)$。而據戴勞例。依 $x-a$ 之昇指數展開之。其初值 a 可爲任何數。

$$(15)\quad f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots\ldots$$

$$+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+R.$$

(見微分學公式表第88)。

當 $x=a$ 之時。命 y 值爲 b。得

$$(16)\qquad b=f(a).$$

惟 a 及 b 之值。使函數 $\varphi(x, y)$ 成爲非恒久的者。不合於用。

自(6)式即前列之微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x, y).$$

得

$$(17)\qquad f(a)=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}=\varphi(a, b).$$

即設 $x=a$ 及 $y=b$. 得 $\frac{dy}{dx}$ 之值爲 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$. 依同法。得

$$(18)\qquad f^{(n)}(a)=\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{n=a}$$

爲 $\frac{d^ny}{dx^n}$ 之值。其 $x=a,\ y=b.$ 由(6)式更可得(見微分學公式表第130)。

$$(19)\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\varphi_1+\varphi_2\cdot\frac{dy}{dx}.$$

$$(20)\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

爲單簡之故。命

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\varphi(x_1y)}{dx}\quad 爲\quad \varphi'(x,y).$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d\varphi'(x_1y)}{dx}\quad 爲\quad \varphi''(x,y).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d\varphi^{(n-2)}(x,y)}{dx}\quad 爲\quad \varphi^{(n-1)}(x,y).$$

而 (19) 及 (20) 二式。變爲

$$(19a)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)\frac{dy}{dx}=\varphi'(x,y).$$

$$(20a)\qquad \frac{d^3y}{dx^3}=\varphi'_1(x,y)+\varphi'_2(x,y)\frac{dy}{dx}=\varphi''(x,y).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由是得

$$(21)\quad f'(a)=\varphi(a,b),\ f''(a)=\varphi'(a,b),\ f'''(a)=\varphi''(a,b),\ \ldots$$

即可得求 (15) 式右邊之全係數。

當 n 極大之時。餘項 R 極小之要件。俟後更詳論之。第一因今所研究者。不致間斷。第二因此要件之說明。於初學頗難。故所論收斂之理。