



高等职业教育  
基础类课程规划教材

# 新编高等数学

(理工类 第三版)

新世纪高等职业教育教材编审委员会组编

主编/白景富 刘 严

GAODENG ZHIYE JIAOYU JICHULEI  
KECHENG GUIHUA JIAOCAI



高等职业教育基础类课程规划教材  
GAODENGZHIYE JIAOYU JICHULEI KECHENG GUIHUAJIAOCAI

# 新编高等数学

(理工类 第三版)

新世纪高等职业教育教材编审委员会组编

主 编/白景富 刘 严 副主编/赵文茹 丁 平 曲春平



XINBIAN GAODENG SHUXUE

大连理工大学出版社  
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

© 大连理工大学出版社 2003

**图书在版编目(CIP)数据**

新编高等数学(理工类 第三版) / 白景富,刘严主编. —3版. —大连:大连理工大学出版社,2003.7 (2003.10重印)

(高等职业教育基础类课程规划教材)

ISBN 7-5611-1947-X

I. 新… II. ①白… ②刘… III. 高等数学—高等学校:技术学校—教材  
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 047405 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市凌水河 邮政编码:116024

电话:0411-4708842 传真:0411-4701466 邮购:0411-4707961

E-mail: dulp@mail.dlptt.ln.cn URL: http://www.dulp.cn

大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

---

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:18.25 字数:422千字

印数:20 501 ~ 25 500

2001年8月第1版

2003年7月第3版

2003年10月第4次印刷

---

责任编辑:李波 郑淑芹

责任校对:廖肇源

封面设计:王福刚

---

定 价:18.00 元

# 新世纪高等职业教育教材编委会教材建设指导委员会

## 主任委员：

戴克敏 大连职业技术学院院长 教授

## 副主任委员(按姓氏笔画为序)：

王 敏 辽宁商务职业学院院长 教授

王大任 辽阳职业技术学院院长 教授

李竹林 河北建材职业技术学院院长 教授

李长禄 黑龙江工商职业技术学院副院长 副研究员

刘志国 秦皇岛职业技术学院院长 教授

刘兰明 邯郸职业技术学院副院长 教授

刘君涛 烟台大学职业技术学院院长 副教授

范利敏 丹东职业技术学院院长 教授

宛 力 沈阳电力高等专科学校副校长 教授

侯 元 呼和浩特职业技术学院院长 副教授

徐晓平 盘锦职业技术学院院长 教授

曹勇安 黑龙江东亚学团董事长 齐齐哈尔职业学院院长 教授

韩学军 辽宁公安司法管理干部学院副院长 教授

## 秘书长：

杨建才 沈阳师范大学职业技术学院院长

## 副秘书长：

周 强 齐齐哈尔大学职业技术学院副院长

## 秘书组成员(按姓氏笔画为序)：

王澄宇 大庆职业学院

张秀霞 大连职业技术学院

徐 哲 盘锦职业技术学院

鲁 捷 沈阳师范大学职业技术学院

谢振江 黑龙江司法警官职业学院

## 会员单位(排名不分先后)：

邯郸职业技术学院

邢台职业技术学院

河北工业职业技术学院

河北软件职业技术学院

河北职业技术学院

石家庄铁路工程职业技术学院

石家庄职业技术学院

河北能源职业技术学院

河北建材职业技术学院

秦皇岛职业技术学院

燕山大学职业技术学院

河北职业技术师范学院  
张家口职业技术学院  
承德石油高等专科学校  
青岛大学高等职业技术学院  
青岛职业技术学院  
烟台大学职业技术学院  
烟台职业技术学院  
山东铝业公司职业教育培训中心  
东营职业技术学院  
山东石油大学职业技术学院  
威海职业学院  
潍坊职业学院  
山东纺织职业学院  
日照职业技术学院  
山东科技大学工程学院  
山东科技大学财政金融学院  
山东劳动职业技术学院  
山东轻工学院职业技术学院  
德州学院职业技术学院  
聊城职业技术学院  
呼和浩特职业技术学院  
内蒙古财经学院高职教学部  
内蒙古大学职业技术学院  
内蒙古工业大学职业技术学院  
包头职业技术学院  
包头钢铁学院职业技术学院  
呼伦贝尔学院  
广西财政高等专科学校  
南昌水利水电高等专科学校  
哈尔滨职业技术学院  
黑龙江工商职业技术学院  
黑龙江司法警官职业学院  
黑龙江省建筑职业技术学院  
齐齐哈尔职业学院  
齐齐哈尔大学职业技术学院  
牡丹江大学  
佳木斯大学应用技术学院  
大庆职业学院  
大庆高等专科学校  
鸡西大学  
伊春职业学院  
绥化师范高等专科学校  
吉林财税高等专科学校  
吉林交通职业技术学院  
吉林粮食高等专科学校  
吉林商业高等专科学校  
吉林职业技术学院  
吉林经济管理干部学院  
吉林大学应用技术学院  
四平师范大学职业技术学院  
沈阳电力高等专科学校  
丹东职业技术学院  
大连职业技术学院  
辽宁商务职业学院  
沈阳师范大学职业技术学院  
鞍山科技大学职业技术学院  
鞍山师范学院职业技术学院  
本溪冶金高等专科学校  
渤海船舶职业学院  
朝阳师范高等专科学校  
大连大学  
大连轻工业学院职业技术学院  
大连国际商务职业学院  
大连水产学院职业技术学院  
辽宁对外经贸职业学院  
辽宁机电职业技术学院  
东北财经大学高等职业技术学院  
抚顺师范高等专科学校  
辽宁石油化工大学职业技术学院  
抚顺职业技术学院  
阜新高等专科学校  
锦州师范学院高等职业技术学院  
锦州师范高等专科学校  
辽宁财政高等专科学校  
辽宁大学高等职业技术学院  
辽宁工程技术大学技术与经济学院  
辽宁工程技术大学职业技术学院  
辽宁工学院职业技术学院  
辽宁公安司法管理干部学院  
辽宁经济职业技术学院  
辽宁农业管理干部学院  
辽宁农业职业技术学院  
辽宁省交通高等专科学校  
辽阳职业技术学院  
辽阳石油化工高等专科学校  
盘锦职业技术学院  
沈阳大学职业技术学院  
沈阳大学师范学院  
沈阳工业大学高等职业技术学院  
沈阳建工学院高等职业技术学院  
沈阳农业大学高等职业技术学院  
沈阳农业大学经贸学院  
铁岭师范高等专科学校  
营口高等职业学院  
辽宁金融职业技术学院  
沈阳建工学院职业技术学院  
辽阳信息职业技术学院  
辽宁中医学院职业技术学院  
沈阳电视大学  
沈阳医学院职业技术学院  
沈阳音乐学院职业艺术学院  
沈阳职业技术学院  
大连医学院丹东分院

# 总 序

我们已经进入了一个新的充满机遇与挑战的时代,我们已经跨入了21世纪的门槛。

20世纪与21世纪之交的中国,高等教育体制正经历着一场缓慢而深刻的革命,我们正在对传统的普通高等教育理论教学与社会发展的现实需要不相适应的现状作历史性的反思与变革的尝试。

20世纪最后的几年里,高等职业教育的迅速崛起,是影响高等教育体制变革的一件大事。在短短的几年时间里,普通中专教育、普通高专教育全面转轨,以高等职业教育为主导的各种形式的培养应用型人才培养的教育发展到与普通高等教育等量齐观的地步,其来势之迅猛,迫人深思。

无论是正在缓慢变革着的普通高等教育,还是迅速推进着的培养应用型人才培养的高等职业教育,都向我们提出了一个同样的严肃问题:中国的高等教育为谁服务,是为教育发展自身,还是为包括教育在内的大千社会?答案肯定而且惟一,那就是教育也置身其中的现实社会。

由此又引发出高等教育的目的问题。既然教育必须服务于社会,它就必须按照不同领域的社会需要来完成自己的教育过程。换言之,教育资源必须按照社会划分的各个专业(行业)领域(岗位群)的需要实施配置,这就是我们长期以来明乎其理而疏于力行的学以致用问题,这就是我们长期以来未能给予足够关注的教育的目的问题。

如所周知,整个社会由其发展所需要的不同部门构成,包括公共管理部门如国家机构、基础建设部门如教育研究机构和各种实业部门如工业部门、商业部门,等等。每一个部门又可作更为具体的划分,直至同它所需要的各种专门人才相对应。教育如果不能按照实际需要完成各种专门人才培养的目标,就不能很好地完成社会分工所赋予它的使命,而教育作为社会分工的一种独立存在就应受到质疑(在市场经济条件下尤其如此)。可以断言,按照社会的各种不同需要培养各种直接有用人才,是教育体制变革的终极目的。

随着教育体制变革的进一步深入,高等院校的设置是否会同社会对人才类型的不同需要一一对应,我们姑且不论。但高等教育走应用型人才培养的道路和走理论型(也是一种特殊应用)人才培养的道路,学生们根据自己的偏好各取所需,始终是一个理性运行的社会状态下高等教育正常发展的途径。

高等职业教育的崛起,既是高等教育体制变革的结果,也是高等教育体制变革的一个阶段性表征。它的进一步发展,必将极大地推进中国教育体制变革的进程。作为一种应用型人才培养的教育,高等职业教育从专科层次起步,进而高职本科教育、高职硕士教育、高职博士教育……当应用型人才培养的渠道贯通之时,也许就是我们迎接中国教育体制变革的成功之日。从这一意义上说,高等职业教育的崛起,正是在为必然会取得最后成功的教育体制变革奠基。

高职教育还刚刚开始自己发展道路的探索过程,它要全面达到应用型人才培养的正常理性发展状态,直至可以和现存的(同时也正处在变革分化过程中的)理论型人才培养的教育并驾齐驱,还需假以时日;还需要政府教育主管部门的大力推进,需要人才需求市场的进一步完善发育,尤其需要高职教学单位及其直接相关部门肯于做长期的坚忍不拔的努力。新世纪高等职业教育教材编审委员会就是由北方地区 100 余所高职院校和出版单位组成的旨在以推动高职教材建设来推进高等职业教育这一变革过程的联盟共同体。

在宏观层面上,这个联盟始终会以推动高职教材的特色建设为己任,始终会从高职教学单位实际教学需要出发,以其对高职教育发展的前瞻性的总体把握,以其纵览全国高职教材市场需求的广阔视野,以其创新的理念与创新的组织形式,通过不断深化的教材建设过程,总结高职教学成果,探索高职教材建设规律。

在微观层面上,我们将充分依托众多高职院校联盟的互补优势和丰裕的人才资源优势,从每一个专业领域、每一种教材入手,突破传统的片面追求理论体系严整性的意识限制,努力凸现高职教育职业能力培养的本质特征,在不断构建特色教材建设体系的过程中,逐步形成自己的品牌优势。

新世纪高等职业教育教材编审委员会在推进高职教材建设事业的过程中,始终得到了各级教育主管部门(如国家教育部、辽宁省教育厅)以及各相关院校相关部门的热忱支持和积极参与,对此我们谨致深深谢意;也希望一切关注、参与高职教育发展的同道朋友,在共同推动高职教育发展、进而推动高等教育体制变革的进程中,和我们携手并肩,共同担负起这一具有开拓性挑战意义的历史重任。

新世纪高等职业教育教材编审委员会

2001年8月18日

# 第三版前言

《新编高等数学(理工类 第三版)》是新世纪高等职业教育教材编委会组编的基础类课程规划教材之一。

教材的前两版经过我们诸位一线教师及其各用书单位的共同努力,初步实现了较好的特色与适应程度的把握,第三版教材进一步吸收了各相关高等院校的改进意见,在内容结构、适应程度及其编校质量方面作了更好的把握。

《新编高等数学(理工类 第三版)》继续以“掌握概念、强化应用、培养技能”为重点,充分体现以应用为目的、以必需够用为度的高职教学基本原则:理论描述精确简约,具体讲解明晰易懂;很好地兼顾了高职各专业后续课程教学对数学知识的范围要求,同时也充分考虑了学生可持续发展的需要。本教材内容包括一元函数微积分、空间解析几何、多元函数微积分、微分方程、无穷级数等几个部分。每节配有A、B两组习题,章末附有知识结构图,书末附有初等数学常用公式、常用的平面曲线图、积分表、习题答案等。带\*号的内容供部分专业选学。第三版教材增加了曲线积分的内容,主要是为了适应相关专业的教学需要。

本教材内容具有以下特点:(1)突出强调数学概念与实际问题的联系;(2)适度淡化逻辑论证,充分利用几何说明,帮助学生理解有关概念和理论;(3)充分考虑高职学生的数学基础,较好地处理了初等数学与高等数学的过渡与衔接;(4)优选了微积分在几何、物理、经济等多方面的应用实例,适用专业面宽;(5)每节均配有A、B两组习题,便于学生巩固基础知识,提高基本技能,加强对教材内容的理解,有利于培养学生应用数学知识解决实际问题的能力;(6)各章末附有本章知识结构图,可帮助学生掌握本章重点知识,理解知识之间的内在联系。

本教材按120学时设计,标有\*号的内容需另加学时,学时不足的教学单位可在内容上作适当删减。

本教材由白景富、刘严担任主编,赵文茹、丁平、曲春平担任副主编,参加编写工作的有大连轻工业学院职业技术学院熊丽华(第一章)、沈阳师范大学职业技术学院孙丽(第





二章)、盘锦职业技术学院宿彦莉(第三章)、辽宁工程技术大学职业技术学院赵文茹(第四章)、沈阳农业大学职业技术学院杨凤书(第五章)、白景富(第七章)、辽宁省交通职业技术学院曲春平、大连职业技术学院李冬冬(第六章)、沈阳电力高等专科学校刘严、崔国生(第八章)、辽宁石油化工大学高等职业技术学院丁平、辽宁省交通职业技术学院曲春平(第九章)、吉林交通职业技术学院刘凤敏(第十章)、沈阳电力高等专科学校刘严、本溪冶金高等专科学校徐志毅(第十一章)、沈阳农业大学职业技术学院白景富、鞍山钢铁学院职业技术学院李继怀(第十二章)、渤海船舶职业学院刘立国(附录部分)。各章知识结构图由丹东高等专科学校田兆有完成。全书结构框架及统稿由主编完成,副主编参加了审稿和定稿工作,在此表示谢意。

尽管我们在《新编高等数学(理工类 第三版)》的特色建设方面做出了许多努力,但由于我们水平有限,书中仍难免有不妥之处,希望各教学单位和读者在使用本教材的过程中继续给予关注,并将意见及时反馈给我们,以便修订时改进。

所有意见和建议请寄往:gzjckfb@163.com

联系电话:0411-4707604

编者  
2003年7月



# 录

<b>第一章 函数、极限与连续</b> ..... 1	<b>第二章 导数与微分</b> ..... 26
<b>第一节 函 数</b> ..... 1	<b>第一节 导数的概念</b> ..... 26
一、函数的概念..... 1	一、导数的定义 ..... 26
二、函数的简单性质..... 3	二、求导数举例 ..... 28
三、反函数..... 4	三、导数的意义 ..... 30
四、初等函数..... 4	四、可导与连续的关系 ..... 32
习题 1-1 ..... 7	习题 2-1 ..... 32
<b>第二节 极 限</b> ..... 8	<b>第二节 初等函数的求导法则</b> ..... 33
一、数列极限..... 8	一、函数的和、差、积、商的求导法则 ..... 33
二、函数的极限..... 9	二、复合函数的求导法则 ..... 35
习题 1-2 ..... 11	三、高阶导数 ..... 36
<b>第三节 极限的运算</b> ..... 12	习题 2-2 ..... 37
一、极限的四则运算 ..... 12	<b>第三节 隐函数及参数方程确定的</b>
二、极限运算举例 ..... 12	<b>函数的求导法则</b> ..... 38
三、两个重要极限 ..... 13	一、隐函数的求导法则 ..... 38
习题 1-3 ..... 15	二、参数方程确定的函数的求导法则 ..... 40
<b>第四节 无穷小与无穷大</b> ..... 16	三、初等函数的导数 ..... 41
一、无穷小与无穷大 ..... 16	习题 2-3 ..... 42
二、无穷小的性质 ..... 17	<b>第四节 函数的微分</b> ..... 43
三、无穷小的比较 ..... 18	一、微分的概念及几何意义 ..... 43
习题 1-4 ..... 19	二、微分基本公式及微分的运算
<b>第五节 函数的连续性</b> ..... 20	<b>法则</b> ..... 44
一、连续与间断 ..... 20	习题 2-4 ..... 45
二、连续函数的性质与初等函数的	<b>第五节 微分的应用</b> ..... 46
<b>连续性</b> ..... 22	一、微分在近似计算中的应用 ..... 46
三、闭区间上连续函数的性质 ..... 23	二、微分在误差估计中的应用 ..... 47
习题 1-5 ..... 24	习题 2-5 ..... 48
<b>本章知识结构图</b> ..... 25	<b>本章知识结构图</b> ..... 49

<b>第三章 导数的应用</b> .....	50	<b>第五章 定积分</b> .....	86
<b>第一节 罗彼塔法则</b> .....	50	<b>第一节 定积分的概念与性质</b> .....	86
一、“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式 .....	50	一、两个引例 .....	86
二、“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式 .....	51	二、定积分的定义 .....	88
三、其他类型未定式 .....	52	三、定积分的几何意义 .....	89
习题 3-1 .....	53	四、定积分的性质 .....	89
<b>第二节 函数的单调性和极值</b> .....	53	习题 5-1 .....	90
一、函数单调性的判别方法 .....	54	<b>第二节 牛顿-莱布尼兹公式</b> .....	91
二、函数极值的判别法 .....	56	一、变上限定积分 .....	91
三、函数的最大值、最小值的求法 .....	58	二、牛顿-莱布尼兹公式 .....	92
习题 3-2 .....	60	习题 5-2 .....	94
<b>第三节 函数图像的描绘</b> .....	61	<b>第三节 定积分的换元积分法与</b> <b>分部积分法</b> .....	95
一、曲线的凹凸与拐点 .....	61	一、定积分的换元积分法 .....	95
二、函数图形的描绘 .....	63	二、定积分的分部积分法 .....	96
习题 3-3 .....	65	习题 5-3 .....	97
本章知识结构图 .....	66	<b>第四节 广义积分</b> .....	98
<b>第四章 不定积分</b> .....	67	一、积分区间是无限的广义积分 .....	98
<b>第一节 不定积分的概念与性质</b> .....	67	二、有限区间上无界函数的 广义积分 .....	99
一、原函数和不定积分的概念 .....	67	习题 5-4 .....	100
二、不定积分的性质 .....	69	本章知识结构图 .....	101
三、不定积分的运算法则 .....	69	<b>第六章 定积分的应用</b> .....	102
习题 4-1 .....	70	<b>第一节 定积分的微元法</b> .....	102
<b>第二节 不定积分的基本公式和</b> <b>直接积分法</b> .....	71	<b>第二节 定积分在实际问题中的</b> <b>应用</b> .....	103
习题 4-2 .....	73	一、定积分的几何应用 .....	103
<b>第三节 换元积分法</b> .....	74	二、定积分在物理中的应用 .....	110
一、第一换元积分法(凑微分法) .....	74	习题 6-2 .....	113
二、第二换元积分法(去根号法) .....	77	本章知识结构图 .....	117
习题 4-3 .....	79	<b>第七章 空间解析几何与向量代数</b> .....	118
<b>第四节 分部积分法</b> .....	80	<b>第一节 空间直角坐标系</b> .....	118
习题 4-4 .....	83	一、空间直角坐标系 .....	118
<b>第五节 积分表的使用方法</b> .....	83	二、空间两点间的距离公式 .....	119
习题 4-5 .....	84	习题 7-1 .....	119
本章知识结构图 .....	85		

第二节 向量及其线性运算 .....	120	第二节 偏导数 .....	150
一、向量的概念 .....	120	一、偏导数的概念 .....	150
二、向量的加、减法 .....	120	二、高阶偏导数 .....	153
三、数与向量的乘法 .....	121	习题 8-2 .....	154
习题 7-2 .....	122	第三节 全微分及其应用 .....	155
第三节 向量的坐标 .....	123	一、全微分的概念 .....	155
一、向量的坐标 .....	123	二、全微分在近似计算中的	
二、向量的线性运算的坐标表示 ..	123	应用 .....	157
三、向量的模与方向余弦 .....	124	习题 8-3 .....	158
习题 7-3 .....	125	第四节 多元复合函数微分法 .....	158
第四节 向量的数量积和向量积 ..	125	一、复合函数微分法 .....	158
一、向量的数量积 .....	125	二、隐函数的微分法 .....	161
二、向量的向量积 .....	127	习题 8-4 .....	162
习题 7-4 .....	129	第五节 偏导数的应用 .....	162
第五节 平面及其方程 .....	130	一、偏导数的几何应用 .....	162
一、平面的点法式方程 .....	130	二、多元函数极值 .....	165
二、平面的一般方程 .....	131	三、条件极值 .....	168
三、两平面的夹角、平行与垂直		习题 8-5 .....	170
的条件 .....	132	本章知识结构图 .....	172
习题 7-5 .....	134	第九章 二重积分 .....	173
第六节 空间直线及其方程 .....	135	第一节 二重积分的概念 .....	173
一、直线的标准方程 .....	135	一、两个实例 .....	173
二、直线的参数方程 .....	136	二、二重积分的定义 .....	174
三、直线的一般方程 .....	136	三、二重积分的性质 .....	174
四、两直线的夹角, 平行与垂直的		习题 9-1 .....	175
条件 .....	137	第二节 二重积分的计算 .....	176
习题 7-6 .....	138	一、在直角坐标系下二重积分的	
第七节 常见曲面的方程及图形 ..	139	计算方法 .....	176
一、曲面及其方程 .....	139	二、在极坐标系下二重积分的	
二、常见的曲面方程及其图形 .....	140	计算方法 .....	178
习题 7-7 .....	144	习题 9-2 .....	180
本章知识结构图 .....	145	第三节 二重积分的应用 .....	181
第八章 多元函数微分法及其应用 ..	146	一、二重积分在几何上的应用 .....	181
第一节 多元函数 .....	146	二、平面薄片的重心 .....	184
一、多元函数的概念 .....	146	三、平面薄板的转动惯量 .....	185
二、二元函数的极限与连续 .....	149	习题 9-3 .....	186
习题 8-1 .....	149	本章知识结构图 .....	187

第十章 曲线积分 .....	188	第十二章 无穷级数 .....	220
第一节 对弧长的曲线积分 .....	188	第一节 常数项级数的概念和性质···	220
一、对弧长的曲线积分的概念		一、常数项级数的基本概念·····	220
与性质·····	188	二、常数项级数的基本性质·····	222
二、对弧长的曲线积分的计算法 ···	189	习题 12-1 .....	223
习题 10-1 .....	190	第二节 常数项级数审敛法 .....	224
第二节 对坐标的曲线积分 .....	191	一、正项级数及其审敛法·····	224
一、对坐标的曲线积分的概念		二、交错级数及其审敛法·····	226
与性质·····	191	三、绝对收敛与条件收敛·····	228
二、对坐标的曲线积分的		习题 12-2 .....	228
计算法·····	193	第三节 幂级数 .....	229
三、格林(Green)公式 .....	195	一、函数项级数的概念·····	229
四、平面上曲线积分与路径无关		二、幂级数及其收敛性·····	230
的条件·····	196	三、幂级数的运算·····	232
习题 10-2 .....	197	习题 12-3 .....	233
本章知识结构图 .....	199	第四节 函数展开成幂级数 .....	234
第十一章 常微分方程 .....	200	一、泰勒(Taylor)公式·····	234
第一节 微分方程的一般概念 .....	200	二、利用麦克劳林级数将函数展开	
一、微分方程的概念·····	200	成幂级数·····	235
二、微分方程的解·····	201	三、函数幂级数展开式的应用·····	237
习题 11-1 .....	202	习题 12-4 .....	238
第二节 一阶微分方程 .....	202	* 第五节 傅里叶级数 .....	239
一、可分离变量的微分方程·····	202	一、三角级数、三角函数系 .....	239
二、一阶线性微分方程·····	204	二、周期为 $2\pi$ 的函数展开成	
习题 11-2 .....	207	傅里叶级数·····	240
第三节 几类特殊的高阶方程 .....	208	三、函数展开成正弦级数或余弦	
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型 .....	208	级数·····	243
二、 $y''=f(x, y')$ 型 .....	208	四、以 $2l$ 为周期的函数的	
三、 $y''=f(y, y')$ 型 .....	209	傅里叶级数·····	244
习题 11-3 .....	210	* 习题 12-5 .....	245
第四节 二阶线性微分方程 .....	210	本章知识结构图 .....	246
一、线性方程解的结构定理·····	210	习题答案 .....	248
二、二阶常系数线性齐次方程的		附录 I 积分表 .....	263
通解·····	212	附录 II 初等数学常用公式 .....	270
三、二阶常系数线性非齐次微分		附录 III 初等数学常见曲线 .....	272
方程的特解·····	213	附录 IV 数学工具软件简介 .....	277
习题 11-4 .....	217	附录 V 本教材涉及部分数学家	
本章知识结构图 .....	219	简介 .....	279

# 第一章 函数、极限与连续

## (Function, limit and Continuity)

函数是客观世界中量与量之间相依关系的一种数学抽象。高等数学的主要研究对象是函数,研究问题的基本工具是极限。本章将介绍函数、极限与连续的基本概念,以及它们的一些主要性质。

### 第一节 函 数(Function)

#### 一、函数的概念

##### 1. 函数的定义

**【例 1】** 某物体以 10 m/s 的速度作匀速直线运动,则该物体走过的路程  $S$  和时间  $t$  有如下关系:

$$S=10t \quad (0 \leq t < +\infty)$$

对变量  $t$  和  $S$ ,当  $t$  在  $[0, +\infty)$  内每取一定值  $t_0$ ,  $S$  就有惟一确定的值  $S_0=10t_0$  与之对应。变量  $t$  与  $S$  之间的这种对应关系,即是函数概念的实质。

**定义 1** 设有两个变量  $x$  和  $y$ ,如果在集合  $D$  内每取定一个数值  $x$ ,按照对应规律  $f$ ,都有惟一确定的数值  $y$  与之对应,则称  $y$  为定义在  $D$  上的  $x$  的函数,记作  $y=f(x)$ 。其中  $x$  叫做自变量, $y$  叫做因变量, $D$  叫做函数的定义域。

当  $x$  取数值  $x_0 \in D$  时,与  $x_0$  对应的  $y$  的数值称为函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  处的函数值,记作  $f(x_0)$ 。当  $x$  遍取  $D$  的各个数值时,对应的函数值全体组成的数集

$$W = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域。

##### 2. 函数的两个要素

定义域  $D$  与对应规律  $f$  惟一确定函数  $y=f(x)$ ,故定义域与对应规律称为函数的两个要素。如果函数的两个要素相同,那么它们就是相同的函数,否则,就是不同的函数。

函数  $y=f(x)$  的对应规律  $f$  也可用  $\varphi, h, g, F$  等表示,相应的函数就记作  $\varphi(x), h(x), g(x), F(x)$ 。

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的。若不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用解析式表达的函数,规定函数的定义域是使解析式有意义的一切实数值。

通常求函数的定义域应注意以下几点:

- (1) 当函数是多项式时,定义域为  $(-\infty, +\infty)$ 。
- (2) 分式函数的分母不能为零。
- (3) 偶次根式的被开方式必须大于或等于零。

(4)对数函数的真数必须大于零。

(5)反正弦函数与反余弦函数的定义域为 $[-1, 1]$ 。

(6)如果函数表达式中含有上述几种函数,则应取各部分定义域的交集。

**【例 2】** 判断下列函数是否是相同的函数

(1) $y=1$  与  $y=\frac{x}{x}$

(2) $y=|x|$  与  $y=\sqrt{x^2}$

(3) $y=\ln 2x$  与  $y=\ln 2 \cdot \ln x$

解 (1)函数  $y=1$  的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ,而函数  $y=\frac{x}{x}$  的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ,故不是同一函数。

(2)两个函数的定义域与对应规律都相同,故是同一函数。

(3)函数  $y=\ln 2x$  与  $y=\ln 2 \cdot \ln x$  的定义域都是 $(0, +\infty)$ ,但对应规律不同,故不是同一函数。

**【例 3】** 求下列函数的定义域

(1) $y=x^2-2x+3$

(2) $y=\sqrt{x+3}-\frac{1}{x^2-1}$

(3) $y=\frac{1}{\ln(1-x)}$

(4) $y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin \frac{x}{2}$

解 (1)函数  $y=x^2-2x+3$  为多项式函数,当  $x$  取任何实数时, $y$  都有惟一确定的值与之对应,所求定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。

(2)若使  $\sqrt{x+3}$  有意义,需  $x+3 \geq 0$ ,即  $x \geq -3$ ,若使  $\frac{1}{x^2-1}$  有意义,需  $x^2-1 \neq 0$ ,即  $x \neq \pm 1$ ,所以函数的定义域为 $[-3, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ 。

(3)若使  $\frac{1}{\ln(1-x)}$  有意义,需  $1-x > 0$  且  $\ln(1-x) \neq 0$ ,即  $x < 1$  且  $x \neq 0$ ,所以函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ 。

(4)若使  $\sqrt{x^2-4}$  有意义,需  $x^2-4 \geq 0$ ,即  $x \geq 2$  或  $x \leq -2$ ,若使  $\arcsin \frac{x}{2}$  有意义,需  $\left| \frac{x}{2} \right| \leq 1$ ,即  $-2 \leq x \leq 2$ ,所以函数的定义域为 $\{x | x = \pm 2\}$ 。

### 3. 函数的表示法

函数的表示法有解析法、图示法以及表格法等。

**【例 4】** 设有容积为  $10 \text{ m}^3$  的无盖圆柱形桶,其底用铜制,侧壁用铁制。已知铜价为铁价的 5 倍,试建立做此桶所需费用与桶的底半径  $r$  之间的函数关系。

解 设铁价为  $k$ ,铜价为  $5k$ ,所需费用为  $y$ ,桶的容积为  $V$ ,侧壁高为  $h$ 。

由容积与底半径及高的关系,有  $V = \pi r^2 h$ ,则  $h = \frac{V}{\pi r^2}$ ,侧面积为  $2\pi r h = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = \frac{2V}{r}$ ,

又知  $V = 10 \text{ m}^3$ ,得侧面积为  $\frac{20}{r}$ ,故所需费用与桶的底半径  $r$  之间的函数关系为

$$y = \frac{20k}{r} + 5\pi r^2 k$$

**【例 5】** 火车站收取行李费的规定如下:当行李不超过 50 千克时,按基本运费计算,如从上海到某地每千克收 0.20 元。当超过 50 千克时,超重部分按每千克 0.30 元收费。试

求上海到该地的行李费  $y$  (元) 与重量  $x$  (千克) 之间的函数关系式, 并画出这函数的图形。

解 当  $x \in [0, 50]$  时,  $y = 0.2x$ ; 当  $x \in (50, +\infty)$  时,  $y = 0.2 \times 50 + 0.3(x - 50) = 0.3x - 5$ , 所求函数为

$$y = \begin{cases} 0.2x, & 0 \leq x \leq 50 \\ 0.3x - 5, & 50 < x < +\infty \end{cases} \quad (\text{图 1-1 所示}).$$

像这样在自变量的不同变化范围内, 对应规律用不同式子来表示的函数, 叫做分段函数。

**【例 6】** 设有分段函数

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & -1 < x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x \leq 1 \\ 3-x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

(1) 画出函数的图像;

(2) 求此函数的定义域;

(3) 求  $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $f\left(\frac{3}{2}\right)$  的值。

解 (1) 函数图像如图 1-2 所示。

(2) 函数的定义域为  $(-1, 2]$ 。

(3)  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ ,  $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$ 。

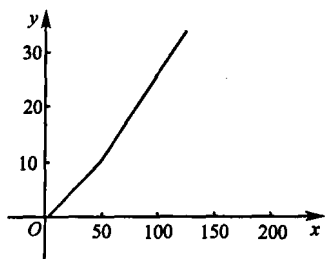


图 1-1

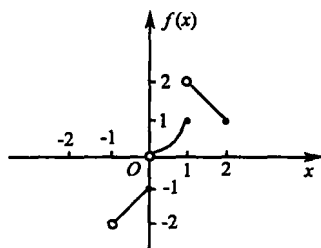


图 1-2

## 二、函数的简单性质

设函数  $f(x)$  在某区间  $I$  有定义。

### 1. 奇偶性

设  $I$  为关于原点对称的区间, 若对于任意的  $x \in I$ , 都有  $f(-x) = f(x)$ , 则  $f(x)$  叫做偶函数; 若  $f(-x) = -f(x)$ , 则  $f(x)$  叫做奇函数。奇函数的图像关于原点对称如图 1-3, 偶函数的图像关于  $y$  轴对称如图 1-4。

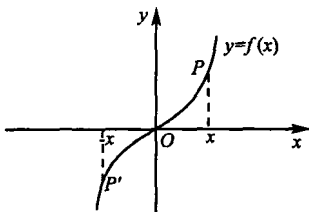


图 1-3

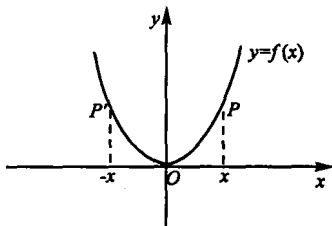


图 1-4

例如,  $y = x^3$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内是奇函数,  $y = x^4 + 1$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内是偶函数。有的函数既不是奇函数也不是偶函数, 如  $y = \sin x + \cos x$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内是非奇非偶函数。

### 2. 单调性

若对于区间  $I$  内任意两点  $x_1, x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 则称  $f(x)$  在  $I$  上单调增加, 区间  $I$  称为单调增区间; 若  $f(x_1) > f(x_2)$ , 则称  $f(x)$  在  $I$  上单调减少, 区间  $I$  称为单调减区间。单调增区间或单调减区间统称为单调区间。在单调增区间内, 函数图像随



着  $x$  的增大而上升如图 1-5, 在单调减区间内, 函数图像随着  $x$  的增大而下降如图 1-6.

例如,  $y=x^2$  在区间  $[0, +\infty)$  内是单调增加的, 在区间  $(-\infty, 0]$  内是单调减少的, 在区间  $(-\infty, +\infty)$  内函数  $y=x^2$  不是单调函数.

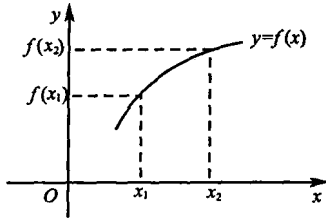


图 1-5

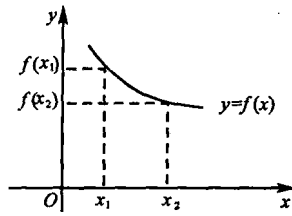


图 1-6

### 3. 周期性

若存在不为零的数  $T$ , 使得对于任意的  $x \in I$ , 都有  $x+T \in I$ , 且  $f(x+T)=f(x)$ , 则称  $f(x)$  为周期函数, 其中  $T$  叫做函数的周期, 通常周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如,  $y=\sin x, y=\cos x$  都是以  $2\pi$  为周期的周期函数;  $y=\tan x, y=\cot x$  都是以  $\pi$  为周期的周期函数.

### 4. 有界性

若存在正数  $M$ , 使得在区间  $I$  上恒有  $|f(x)| \leq M$ , 则称  $f(x)$  在  $I$  上有界, 否则称  $f(x)$  在  $I$  上无界.

例如, 函数  $y=\frac{1}{x}$  在区间  $(0, 1)$  内无界, 但在区间  $(1, 2)$  内有界.

## 三、反函数

**定义 2** 设函数  $y=f(x)$  的定义域为  $D$ , 值域为  $W$ . 对于任一数值  $y \in W$ , 在  $D$  中都有惟一确定的值  $x$ , 使  $f(x)=y$ , 则得到一个以  $y$  为自变量,  $x$  为因变量的新的函数, 这个新的函数叫做函数  $y=f(x)$  的反函数, 记作  $x=f^{-1}(y)$ , 其定义域为  $W$ , 值域为  $D$ .

由于人们习惯于用  $x$  表示自变量, 而用  $y$  表示因变量, 因此我们将函数  $y=f(x)$  的反函数  $x=f^{-1}(y)$  用  $y=f^{-1}(x)$  表示.  $y=f(x)$  与  $y=f^{-1}(x)$  的图像关于直线  $y=x$  对称, 如图 1-7.

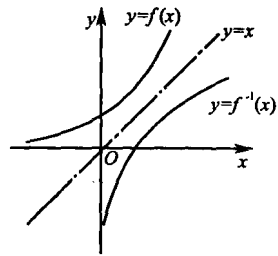


图 1-7

## 四、初等函数

### 1. 基本初等函数及其性质

幂函数  $y=x^\mu$  ( $\mu$  为常数)

指数函数  $y=a^x$  ( $a>0, a \neq 1, a$  为常数)

对数函数  $y=\log_a x$  ( $a>0, a \neq 1, a$  为常数)

三角函数  $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$

反三角函数  $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$

以上五类函数统称为基本初等函数, 常用的基本初等函数的定义域、值域、图像和性质见表 1-1.