

CHUZHONG SHUXUE ZHISHI JIJIN

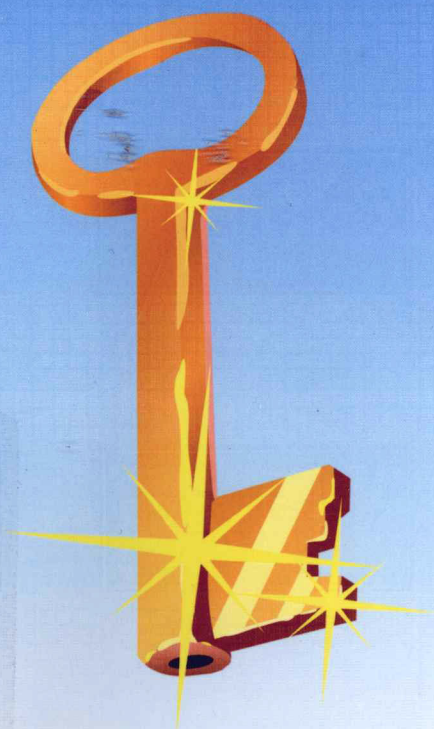
快速提高数学成绩的得力助手




初中数学

知识集锦

策划 刘根林
主编 缪选民



 南京大学出版社

CHUZHONG SHUXUE ZHISHI JIJIN

快速提高数学成绩的得力助手

初中数学 知识集锦



 南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学知识集锦 / 缪选民主编. —南京: 南京大学出版社, 2009. 7

ISBN 978-7-305-06326-8

I. 初... II. 缪... III. 数学课—初中—教学参考资料
IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第123071号

初中数学知识集锦

出版者 南京大学出版社
社址 南京市汉口路 22 号 邮编 210093
网址 <http://www.NjupCo.com>
出版人 左健

书名 初中数学知识集锦
主编 缪选民
责任编辑 张莉莉 编辑热线 025-86208581
审读编辑 胥橙庭

照排 南京新洲印刷有限公司制版中心
印刷 江苏南洋印务集团有限公司
开本 787×1092 1/16 印张13.75 字数412千
版次 2009年7月第1版 2009年7月第1次印刷
ISBN 978-7-305-06326-8
定价 26.80元

发行热线 025-83594756
电子邮箱 Press@NjupCo.com
Sales@NjupCo.com (市场部)

- * 版权所有,侵权必究
- * 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购图书销售部门联系调换

编写说明

纵观当今图书市场,初中数学类辅导用书种类繁多、形式多样,但大多用书的内容分散单一、知识面较窄,即便有少部分用书知识面较广,但也是蜻蜓点水,很难适应目前数学教学中“大数学”发展方向的要求。为此,编者结合多年数学教学经验和切身体会,通过精心收集、整理、筛选和修改,编成了《初中数学知识集锦》一书。这是一本具有较高实用价值的综合类数学学习参考用书,它具有以下几方面特点:

一、针对性非常强。

本书紧扣一个“锦”字,除涵盖了大部分数学知识的学习重点、难点外,还注重对解题方法、规律的高度总结与提炼,并按不同类型进行归纳和整理。在归纳和整理中,特别兼顾到内容的全面性,力求精炼、详略得当。它与平时的各种数学知识训练配合使用,可以解决学生在数学学习过程中无从下手、找不到方法、抓不住重点等诸多难题。

二、内容丰富多彩。

本书所涉及的知识面极广,既有学生必须掌握的知识,也有为进入高一级学校所需掌握的一部分基础知识,还有为开阔学生视野精选的、学生应该掌握的百科知识,以进一步拓宽学生的知识面。所编的内容自成体系,又互为补充,保证了内容的完整性,真正达到了“一书多能”之目的。

三、适用范围较广。

本书既是数学老师从事数学教学的参阅资料,也是学生家长辅导孩子的最佳范本,更适合不同层次学生的学习需求,是学生把握学习数学的主动权、开发潜能、启迪心智、提升极限,在较短时间内,快速提高数学成绩的最得力的助手。

鉴于以上几方面的特点,编者向您力荐《初中数学知识集锦》一书,相信它一定会让您受益匪浅。

编者

目 录

一 数与式

- (一) 实数 1
- (二) 整式 9
- (三) 分式与根式 15

二 方程与不等式

- (一) 一次方程(组)及应用 23
- (二) 二次方程及应用 36
- (三) 不等式(组)及应用 43

三 函数及其图象

- (一) 平面直角坐标系及函数 53
- (二) 正、反比例函数与一次函数 65
- (三) 二次函数 80

四 图形及其变换

- (一) 图形的初步认识 96
- (二) 视图与投影 105
- (三) 平移与旋转 115
- (四) 轴对称与中心对称 121
- (五) 尺规作图 128

五 图形与证明

- (一) 三角形 135
- (二) 四边形 153
- (三) 圆 168

六 统计与概率

- (一) 统计 187
- (二) 概率 194

参考答案 201

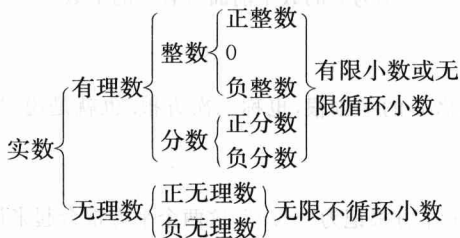
数 与 式

(一) 实 数

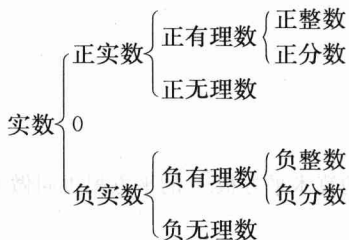
知 识 集 锦

一、实数的分类

1. 按定义分类



2. 按正负分类



二、实数的有关概念

1. 有理数

整数和分数统称为有理数.

2. 数轴

规定了原点、正方向、单位长度的直线叫数轴,实数和数轴上的点是一一对应的.

数轴三要素:原点、正方向、单位长度,三者缺一不可.

“规定”二字说明原点的选定、正方向的取向、单位长度大小的确定都是根据需要确定的.

3. 绝对值

数轴上表示一个数 a 的点与原点的距离,叫做这个数 a 的绝对值,记作 $|a|$,且有:

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

一般地,一个数 a 的绝对值是非负数,即 $|a| \geq 0$.

4. 相反数

符号不同、绝对值相同的两个数互为相反数,其中一个数是另一个数的相反数.一般地, a 的相反数是 $-a$;0 的相反数是 0.

若 a, b 互为相反数,则 $a+b=0$;反之,若 $a+b=0$,则 a, b 互为相反数.



5. 倒数

若两数的积等于 1, 则这两个数互为倒数.

注意: ① 求一个数 a 的相反数, 只改变它的符号, 不改变绝对值, 即 a 的相反数是 $-a$.

② 求一个数的倒数, 只改变它的绝对值, 不改变符号, 即非零数 a 的倒数是 $\frac{1}{a}$; 零有相反数, 但没有倒数.

6. 近似数与有效数字

一个近似数, 四舍五入到某一位, 就说这个近似数精确到那一位, 这时, 从左边第一个不为 0 的数字起, 到末位数字止, 所有的数字都叫做这个数的有效数字.

7. 科学记数法

把一个数写成 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 这种记数的方法叫科学记数法. 一般地, 将一个大于 10 的数用科学记数法表示时, 10 的指数 n 比原数的整数位数少 1; 将一个小于 1 的正数用科学记数法表示时, 10 的指数 n 的相反数是原数中第一个不为 0 的数字前面所有 0 的个数.

8. 平方根

(1) 平方根的概念

一般地, 如果一个数的平方等于 a , 那么这个数叫做 a 的平方根, 也称二次方根. 也就是说, 如果 $x^2 = a$, 那么 x 就叫做 a 的平方根.

(2) 平方根表示

一个正数 a 的正的平方根, 记为“ \sqrt{a} ”, 正数 a 的负的平方根记为“ $-\sqrt{a}$ ”, 这两个平方根合起来记为“ $\pm\sqrt{a}$ ”.

(3) 平方根的性质

一个正数有两个平方根, 它们互为相反数;

0 只有一个平方根, 就是它本身;

负数没有平方根.

(4) 算术平方根

正数 a 有两个平方根, 其中正数 a 的正的平方根, 也叫做 a 的算术平方根. 0 的平方根也叫做 0 的算术平方根, 即 $\sqrt{0} = 0$.

注意: ① 只有非负数才有算术平方根, 而且算术平方根都是非负数.

② $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$, 有时也逆用这一公式, 应注意这一点.

(5) 开平方

求一个数 a 的平方根的运算, 叫做开平方, 开平方和平方互为逆运算.

9. 立方根

(1) 立方根的概念

一般地, 如果一个数的立方等于 a , 那么这个数就叫做 a 的立方根, 也称三次方根. 也就是说, 如果 $x^3 = a$, 那么 x 就叫做 a 的立方根, 记为 $x = \sqrt[3]{a}$.

(2) 立方根的性质

正数的立方根是正数, 负数的立方根是负数, 0 的立方根是 0.

(3) 开立方

求一个数的立方根的运算叫做开立方, 开立方和立方互为逆运算.

注意: 在 $\sqrt[3]{a}$ 中被开方数 a 可为正数、零或负数, 且 $\sqrt[3]{a}$ 的正负与 a 一致.

10. 无理数

(1) 无理数的概念

无限不循环小数称为无理数.

(2) 无理数的分类

- ① 开方开不尽的数,如 $\sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt[3]{5}$ 等;
- ② 特定结构的数,如 $1.010010001\cdots, 1.121231234\cdots$;
- ③ 特定意义的数,如圆周率 π 或化简后含有 π 的数,如 $\frac{2}{3}\pi+1$ 等;
- ④ 某些三角函数,如 $\sin 45^\circ, \tan 30^\circ$ 等.

注意:不能认为凡是带根号的数就是无理数,如 $\sqrt{4}, \sqrt[3]{8}$;也不能认为凡是带有三角函数符号的数就是无理数,如 $\sin 30^\circ, \cot 45^\circ$;判断时,要重结果,轻形式.

11. 实数

(1) 实数的概念

有理数和无理数统称为实数.也就是说,实数可分为有理数和无理数.

(2) 实数与数轴上的点的关系

数的范围扩展到实数后,数轴上的点与实数成一一对应关系,即每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示;反之,数轴上的每一个点都表示一个实数,实数与数轴上的点是一一对应的.

三、实数的运算

1. 实数的加法

实数的加法法则:

- (1) 同号两数相加,取相同的符号,并把绝对值相加.
- (2) 异号两数相加,绝对值相等时,和为0;绝对值不等时,取绝对值较大的加数的符号,并用较大的绝对值减去较小的绝对值.
- (3) 一个数与0相加,仍得这个数.

加法的运算律在实数范围内仍然适用,其中包括:交换律 $a+b=b+a$;结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$.

2. 实数的减法

实数的减法法则:减去一个数,等于加上这个数的相反数.

3. 实数的乘法

实数的乘法法则:

- (1) 两数相乘,同号得正,异号得负,并把绝对值相乘.
- (2) 任何数与0相乘都得0.
- 注意:①几个不为0的数相乘,积的符号与负因数的个数有关,当负因数的个数是偶数时,积是正数;当负因数的个数是奇数时,积是负数.

②乘法的运算律在实数范围内仍然适用,其中包括:交换律 $a \times b = b \times a$;结合律 $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$;分配律 $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$.

4. 实数的除法

实数的除法法则:

- (1) 除以一个不等于0的数,等于乘这个数的倒数.
- (2) 两数相除,同号得正,异号得负,并把绝对值相除;0除以任何一个不等于0的数,都得0.

5. 实数的乘方

- (1) 求 n 个相同因数的积的运算,叫做乘方,乘方的结果叫做幂,如 a^n 也称为 a 的 n 次幂或 a 的 n 次方.
- (2) 正数的任何正整数次幂都是正数;负数的奇数次幂是负数,负数的偶数次幂是正数;0的任何正整数次幂都是0.

6. 实数的混合运算

实数的混合运算顺序:先乘方,再乘除,最后加减.如果有括号,先进行括号内的运算.

四、实数的大小比较

1. 数轴比较法

在同一数轴上,右边的数大于左边的数,若两数表示同一点,则两数相等.



2. 数值比较法

设 a, b 为任意两数, $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b; a - b = 0 \Leftrightarrow a = b; a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$.

3. 商值比较法

一般地, 商值法适用于两个同号实数的大小比较. 设 a, b 为任意两个正实数, $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b;$

$\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b; \frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b$. a, b 为负实数的情况与正实数的情况相反, 即 $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a < b; \frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b;$

$\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a > b$.

4. 绝对值比较法

① a, b 为正数时, $|a| > |b| \Leftrightarrow a > b; |a| = |b| \Leftrightarrow a = b; |a| < |b| \Leftrightarrow a < b;$ ② a, b 为负数时, $|a| > |b| \Leftrightarrow a < b, |a| = |b| \Leftrightarrow a = b, |a| < |b| \Leftrightarrow a > b$.

此外, 还可以根据同分子或同分母来比较两个分数的大小.

题型集锦

【好题亮相】

一、实数的有关概念

例 1 在实数 $-\frac{2}{5}, 0, \sqrt{3}, -3.14, \pi, \sqrt{4}$ 中, 无理数有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

精析: 实数分为有理数和无理数, 无理数是指无限不循环小数, 本题中 $\sqrt{3}$ 和 π 是无限不循环小数, 所以它们是无理数. 值得注意的是, $\sqrt{4} = 2$ 是有理数, 而不是无理数.

解答: 选 B.

举一反三

1. 实数 $\frac{22}{7}, \sin 30^\circ, \sqrt{2} + 1, 2\pi, (\sqrt{3})^0, |-3|$ 中, 有理数的个数是 ()

- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

例 2 如图 1, O 是原点, 实数 a, b, c 在数轴上对应的点分别为 A, B, C , 则下列结论错误的是 ()

- A. $a - b > 0$ B. $ab < 0$
C. $a + b < 0$ D. $b(a - c) > 0$

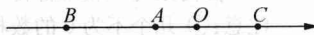


图 1

精析: 从 A, B, C 在数轴上的位置可以看出, 对应的数 $a < 0, b < 0, c > 0$, 且 $a > b$, 所以 $a - b > 0, ab > 0, a + b < 0$, 而因为 $b < 0, a - c < 0$, 所以 $b(a - c) > 0$.

解答: 选 B.

举一反三

2. 如图 2, 北京等 5 个城市的国际标准时间可以在数轴上表示如下:

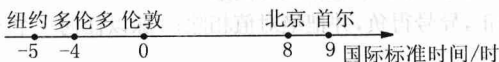


图 2

如果将两地国际标准时间的差简称为时差, 那么下列说法正确的是 ()

- A. 首尔与纽约的时差为 13 h B. 首尔与多伦多的时差为 13 h
C. 北京与纽约的时差为 14 h D. 北京与多伦多的时差为 14 h

例 3 下列各组数中互为相反数的是 ()

- A. 5 和 $\sqrt{(-5)^2}$ B. $-|-5|$ 和 $-(-5)$
C. -5 和 $\sqrt[3]{-125}$ D. -5 和 $\frac{1}{5}$

精析: $\sqrt{(-5)^2}=5, -|-5|=-5, -(-5)=5, \sqrt[3]{-125}=-5$. 根据相反数的概念可知 $-|-5|$ 和 $-(-5)$ 互为相反数.

解答: 选 B.

举一反三

3. 甲、乙两同学进行数字猜谜游戏. 甲说: 一个数 a 的相反数是它本身, 乙说: 一个数 b 的倒数也等于它本身. 请你猜一猜 $|a-b| = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、实数的大小比较和运算

例 4 比较 $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ 的大小, 结果正确的是 ()

A. $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} < \frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{2} < \frac{1}{4} < -\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4} < -\frac{1}{3} < -\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{2} < \frac{1}{4}$

精析: 正数大于负数, 两个负数比较大小, 绝对值大的反而小, 故 $-\frac{1}{2} < \frac{1}{4}, -\frac{1}{3} < \frac{1}{4}, -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$.

解答: 选 A.

举一反三

4. 已知 $x < 0, y > 0$, 且 $|y| < |x|$, 用“ $<$ ”连接 $x, -x, -|y|, y$ 可表示为 .

例 5 计算: $|\frac{1}{2}| - \sqrt{9} + (\pi-4)^0 - \sin 30^\circ$.

精析: 因为 $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}, \sqrt{9}=3, (\pi-4)^0=1, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, 所以此题结果为 -2 .

解答: 原式 $= \frac{1}{2} - 3 + 1 - \frac{1}{2} = -2$.

举一反三

5. 计算: $\sqrt{8} - 2\sin 45^\circ + (2-\pi)^0 - (\frac{1}{3})^{-1}$.

例 6 若 $|x-3| + \sqrt{y+2} = 0$, 则 xy 的值为 ()

A. 6 B. -8 C. 5 D. -6

精析: 因为 $|x-3| \geq 0, \sqrt{y+2} \geq 0$, 根据题意可知 $x-3=0, y+2=0$, 故可求出 $x=3, y=-2$, 所以 $xy=3 \times (-2) = -6$.

解答: 选 D.

举一反三

6. 已知 $(x-1)^2 + \sqrt{5x-y+4} = 0$, 则 \sqrt{xy} 的值是 ()

A. 3 B. -3 C. ± 3 D. 9

例 7 已知 $\frac{1}{1-a}$ 叫作 a 的差倒数, 如 -1 的差倒数是 $\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$. 已知 $a_1 = -\frac{1}{3}, a_2$ 是 a_1 的差倒数, a_3 是 a_2 的差倒数, a_4 是 a_3 的差倒数……以此类推, 则 $a_{2009} = \underline{\hspace{2cm}}$.

精析: 根据题意可计算得 $a_1 = -\frac{1}{3}, a_2 = \frac{3}{4}, a_3 = 4, a_4 = -\frac{1}{3}$ ……以此类推, $a_{2009} = \frac{3}{4}$.

解答: 填 $\frac{3}{4}$.

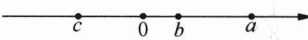
举一反三

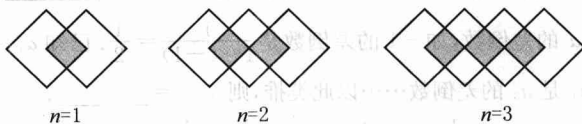
7. 将长为 1m 的绳子, 截去一半, 然后将剩下的再截去一半, 如此下去, 若余下的绳子长不足 1cm , 则至少需截 ()

A. 6 次 B. 7 次 C. 8 次 D. 9 次



【好题精选】

- 在实数范围内的数 $0, \sqrt[3]{-12}, \sqrt{8}, (-3)^2$ 中, 有平方根的有 ()
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
- 一个数的绝对值等于这个数的相反数, 这样的数是 ()
A. 非负数 B. 非正数 C. 负数 D. 正数
- 近似数 1.30 所表示的准确数 A 的范围是 ()
A. $1.25 \leq A < 1.35$ B. $1.20 < A < 1.30$
C. $1.295 \leq A < 1.305$ D. $1.300 \leq A < 1.305$
- 绝对值小于 8 的所有整数的和是 ()
A. 0 B. 28 C. -28 D. 以上都不是
- 由四舍五入法得到的近似数 4.9 万精确到 ()
A. 万位 B. 千位 C. 十分位 D. 千分位
- 实数 a, b, c 在数轴上的位置如图所示, 下列式子正确的是 ()
A. $a+b < 0$ B. $a+b < a+c$ C. $ac > bc$ D. $ab > ac$
 (第 6 题)
- 吸烟有害健康. 5 月 31 日是世界无烟日, 今年世界无烟日来临之际, 中国国家卫生部公布了我国吸烟的人数约为 3.5 亿, 占世界吸烟人数的 $\frac{1}{3}$. 用科学记数法表示全世界吸烟人数约为 ()
A. 105×10^9 B. 10.5×10^8 C. 1.05×10^9 D. 1.05×10^{10}
- 已知甲地的海拔高度为 150 m, 乙地的海拔高度为 -30 m, 那么甲地比乙地高 _____ m.
- 比较实数的大小: $-\sqrt{2}$ _____ $-\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{7}}{2}$ _____ $\frac{\pi}{3}$.
- 在实数范围内, 若 $|x+y-\sqrt{5}| + \sqrt{x-1} = 0$, 则 $xy =$ _____.
- $|3-\pi| + |4-\pi|$ 的计算结果是 _____.
- $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ 的相反数是 _____, 绝对值是 _____, 倒数是 _____.
- 数轴上有 A, B 两点, 点 A 表示数 -1, 若线段 $AB=3$, 则点 B 所表示的数为 _____.
- 计算: $\cot 60^\circ - 2^2 + 2\ 008^0 + \frac{2}{3}\sqrt{3} =$ _____.
- 有一人患了流感, 经过两轮传染后共有 100 人患了流感, 那么每轮传染中平均一个人传染的人数为 _____.
- 用同样大小的正方形按下列规律摆放, 将重叠部分涂上颜色, 下面的图案, 第 n 个图案中正方形的个数是 _____.



(第 16 题)

中考集锦

- (大连) $-a$ 的相反数是 ()
A. a B. $\frac{1}{a}$ C. $-a$ D. $-\frac{1}{a}$

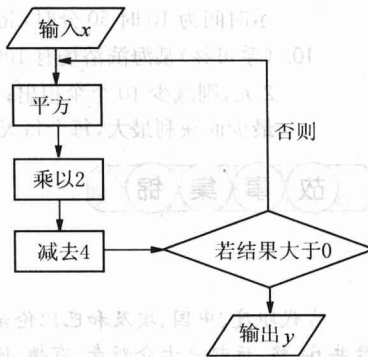
2. (南京)2的平方根是 ()
 A. 4 B. $\sqrt{2}$ C. $-\sqrt{2}$ D. $\pm\sqrt{2}$
3. (宁波)比 $\sqrt{3}$ 大的实数是 ()
 A. -5 B. 0 C. 3 D. $\sqrt{2}$
4. (芜湖)估计 $\sqrt{32} \times \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{20}$ 的运算结果应在 ()
 A. 6到7之间 B. 7到8之间 C. 8到9之间 D. 9到10之间
5. (怀化)怀化市2006年的国民生产总值约为333.9亿元,预计2007年比上年增长10%,用科学记数法表示2007年怀化市的国民生产总值应是(结果保留3个有效数字) ()
 A. 3.67×10^{10} 元 B. 3.673×10^{10} 元
 C. 3.67×10^{11} 元 D. 3.67×10^8 元
6. (郴州)实数 a, b 在数轴上的位置如图所示,则 a 与 b 的大小关系是 ()
 A. $a > b$ B. $a = b$
 C. $a < b$ D. 不能判断



(第6题)

7. (江西)某运动场的面积为 300 m^2 ,则它的万分之一的面积大约相当于 ()
 A. 课本封面的面积 B. 课桌桌面的面积
 C. 黑板表面的面积 D. 教室地面的面积
8. (常州)3的相反数是_____, -5的绝对值是_____, 9的平方根是_____.
9. (南安)某种感冒病毒的直径是 $0.000\ 000\ 12 \text{ m}$,用科学记数法表示为_____ m.
10. (北京)若 $\sqrt{m-3} + (n+1)^2 = 0$,则 $m+n$ 的值为_____.

11. (盐城)根据如图所示的程序计算,若输入 x 的值为1,则输出 y 的值为_____.



(第11题)

12. (连云港)计算: $(-4)^2 - (-\frac{2}{3}) + \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$.
13. (沈阳)计算: $(\pi-1)^0 + (-\frac{1}{2})^{-1} + |5 - \sqrt{27}| - 2\sqrt{3}$.
14. (桂林)规定运算: $(a * b) = |a - b|$,其中 a, b 是实数,则 $(\sqrt{7} * 3) + \sqrt{7} =$ _____.
15. (宜昌)数字解密:第一个数是 $3=2+1$,第二个数是 $5=3+2$,第三个数是 $9=5+4$,第四个数是 $17=9+8$ ……观察并猜想第六个数是_____.
16. (南充)有规律排列的一列数: $2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$ 它的每一项可用式子 $2n$ (n 是正整数)来表示.有规律排列的一列数: $1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, \dots$
 (1) 它的每一项你认为可用怎样的式子来表示?
 (2) 它的第100个数是多少?
 (3) 2006是不是这列数中的数?如果是,是第几个数?

赛 题 集 锦

1. (希望杯)如果 a, b 都代表有理数,并且 $a+b=0$,那么 ()
 A. a, b 都是0 B. a, b 之一是0
 C. a, b 互为相反数 D. a, b 互为倒数



2. (希望杯)下面说法中不正确的是 ()
- A. 有最小的自然数 B. 没有最小的正有理数
- C. 没有最大的负整数 D. 没有最大的非负数
3. (希望杯)如果 a, b 代表有理数, 并且 $a+b$ 的值大于 $a-b$ 的值, 那么 ()
- A. a, b 同号 B. a, b 异号 C. $a > 0$ D. $b > 0$
4. (希望杯)大于 $-\pi$ 并且不是自然数的整数有 ()
- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 无数个
5. (希望杯) a 代表有理数, 那么 a 和 $-a$ 的大小关系是 ()
- A. a 大于 $-a$ B. a 小于 $-a$
- C. a 大于 $-a$ 或 a 小于 $-a$ D. a 不一定大于 $-a$
6. (希望杯)有四种说法: 甲: 正数的平方不一定大于它本身; 乙: 正数的立方不一定大于它本身; 丙: 负数的平方不一定大于它本身; 丁: 负数的立方不一定大于它本身. 这四种说法中, 不正确的说法的个数是 ()
- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个
7. (希望杯) $0.0125 \times 3 \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \times (-87.5) \div \frac{15}{16} \times \frac{16}{15} + (-2^2) - 4 =$ _____.
8. (学用杯)实施西部大开发战略是党中央面向 21 世纪的重大决策, 西部地区占我国国土面积的 $\frac{2}{3}$, 我国国土面积为 960 万平方千米, 用科学记数法表示我国西部地区的面积为 _____ 平方千米.
9. (学用杯)一块手表每小时慢 3 min, 若在清晨 4 时 30 分与北京时间对准, 则在当天上午手表指示时间为 10 时 50 分时, 北京时间应该是 _____.
10. (学用杯)某海滨浴场有 100 个遮阳伞, 每个每天收租费 10 元时, 可全部租出; 若每个每天提高 2 元, 则减少 10 个伞租出; 若每个每天收费再提高 2 元, 则再减少 10 个伞租出……为了投资最少而获利最大, 每个每天应提高 _____.

故事集锦

棋盘上的粮食

古代印度、中国、埃及和巴比伦是世界四大文明古国. 传说, 古印度有一个人发明了一种游戏棋, 棋盘共 64 格, 玩起来十分新奇、有趣. 他把这种棋献给了国王. 国王玩得十分开心, 便下令赏赐献棋人. 丞相问献棋人想要什么, 献棋人说: “我只需要粮食, 只要大王给点粮食便心满意足了.” 问他需要多少粮食, 他说只要求在棋盘的第一个格子里放 1 粒米, 在第二个格子里放 2 粒米, 第三个格子里放 4 粒米……总之, 后一格里的米都比它前一格增大一倍, 把 64 格都放满了就行. 国王一听, 满口答应. 大臣们也都认为: 这点米, 算得了什么? 便领献棋人去领米. 岂料, 到后来把仓库里所有的存米都付出了, 还是不够. 你知道这是为什么吗?

解: 米粒数根据制棋人的要求, 可列式为:

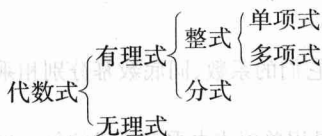
$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{63} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \text{ (粒)}$$

如果造一个仓库来存放这些米, 仓库应是多大呢? 有人算过, 若仓库高 4 m, 宽 10 m, 那么长应是地球到太阳距离的 2 倍. 这样的长方体仓库在地球上 是容不下的, 当然这只是个假设. 传说, 当时计算米粒数宫廷里就整整算了三天! 这是中学数学中“等比级数求和”问题. 在当时只是凭手工硬乘出来的. 国库中当然不可能有那么多的粮食.

知识集锦

一、代数式的有关概念

1. 代数式的分类



2. 代数式与有理式

用运算符号把数或表示数的字母连接而成的式子,叫做代数式.单独的一个数或字母也是代数式.含有加、减、乘、除、乘方运算的代数式叫做有理式.

3. 代数式的值

一般地,用数字代替代数式里的字母,按照代数式的运算关系计算,所得出的结果叫做代数式的值.

4. 单项式

(1) 由数与字母的积组成的代数式叫单项式,单独一个字母或数也是单项式.

(2) 单项式中的数字因数叫做单项式的系数.单项式中所有字母的指数的和叫做单项式的次数.

5. 多项式

(1) 几个单项式的和叫做多项式.

(2) 多项式中的每一个单项式叫做多项式的项.每一项应包括它前面的符号,在变更项的位置时,一定要带着符号走.

(3) 一般地,多项式中次数最高项的次数,叫做这个多项式的次数.

6. 整式

单项式和多项式统称整式.

7. 同类项及其合并法则

(1) 同类项:所含字母相同,并且相同字母的指数也分别相同的项叫做同类项.几个常数项也是同类项.

(2) 合并同类项:把多项式中的同类项合并成一项,叫做合并同类项.

(3) 合并同类项的法则:同类项的系数相加,所得结果作为系数,字母和字母的指数不变.

注意:① 如果两个同类项的系数互为相反数,合并同类项后,结果为0.

② 不要漏掉不能合并的项.

③ 只要不再有同类项,就是结果(可能是单项式,也可能是多项式).

8. 去括号法则

(1) 括号前面是“+”号,把括号和它前面的“+”号去掉,括号里的各项的符号都不改变.

(2) 括号前面是“-”号,把括号和它前面的“-”号去掉,括号里的各项的符号都要改变.

二、整式的运算

1. 整式的加减

几个整式相加减,通常把每一个整式括起来,再用加减号连接,然后去括号,合并同类项.

注意:① 整式的加减运算,实际上就是合并同类项.

② 整式加减的结果仍是整式.

2. 整式的乘法



(1) 幂的运算性质

① 同底数幂的乘法:同底数幂相乘,底数不变,指数相加.

公式: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (m, n 都是正整数).

② 幂的乘方:幂的乘方,底数不变,指数相乘.

公式: $(a^m)^n = a^{mn}$ (m, n 都是正整数).

③ 积的乘方:积的乘方,等于把积的每一个因式分别乘方,再把所得的幂相乘.

公式: $(ab)^n = a^n b^n$ (n 是正整数).

单项式里含有的字母,连同它的指数作为积的一个因式.

(2) 单项式的乘法

① 单项式与单项式相乘有以下法则:单项式与单项式相乘,把它们的系数、同底数幂分别相乘,其余字母连同它的指数不变,作为积的因式.

② 单项式与多项式相乘有以下法则:单项式与多项式相乘,就是用单项式去乘多项式的每一项,再把所得的积相加.

(3) 多项式的乘法

多项式与多项式相乘有如下法则:多项式与多项式相乘,先用一个多项式的每一项乘另一个多项式的每一项,再把所得的积相加.

注意:含有一个相同字母的两个一次二项式相乘,得到的积是同一个字母的二次三项式,例如:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab.$$

(4) 乘法公式

① 平方差公式:两数和与这两数差的积等于这两数的平方差.

用字母表示: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

② 完全平方公式:两数和(或差)的平方,等于它们的平方和,加上(或减去)它们的积的两倍.

用字母表示: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

3. 整式的乘除

(1) 同底数幂的除法:同底数幂相除,底数不变,指数相减.

用字母表示: $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0, m, n$ 为整数).

(2) 零指数幂和负整数指数幂

任何不等于 0 的数的 0 次幂都等于 1.

用字母表示: $a^0 = 1$ ($a \neq 0$).

任何不等于 0 的数的一 n (n 是正整数) 次幂,等于这个数的 n 次幂的倒数.

用字母表示: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0, n$ 是正整数)

(3) 单项式除以单项式

一般地,单项式相除,把系数、同底数幂分别相除,作为商的因式,对于只在被除式里含有的字母,则连同它的指数作为商的一个因式.

(4) 多项式除以单项式

一般地,多项式除以单项式,先把这个多项式的每一项除以这个单项式,再把所得的商相加.

4. 因式分解

(1) 因式分解的概念:把多项式化成几个整式乘积的形式叫做多项式的因式分解.

(2) 因式分解的方法

① 提公因式法:如果一个多项式的各项有公因式,可以把这个公因式提出来,从而将多项式化成两个因式乘积的形式,这种分解因式的方法叫做提公因式法.

② 公式法:如果把乘法公式反过来,就可以把某些多项式分解因式,这种方法叫公式法.

平方差公式: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

完全平方公式: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

(3) 因式分解的一般步骤:应先提公因式,然后再考虑能否运用公式法.

注意:因式分解的最后结果必须是每一个因式不能再分解.

题型集锦

【好题亮相】

一、代数式的有关概念

例 1 在 $-\frac{xy^2}{2}$, -3 , m , $\frac{a}{\pi}$, $\frac{x+y}{5}$, a^2+ab+b^2 , $\frac{1}{n}$ 这些代数式中,单项式有 _____,多项式有 _____,整式有 _____.

精析:整式包括单项式和多项式,由数与字母的积组成的代数式叫单项式,单独一个字母或数也是单项式;几个单项式的和叫做多项式.其中 π 属于常数,分母中含有字母的不是整式.

解答:单项式有 $-\frac{xy^2}{2}$, -3 , m , $\frac{a}{\pi}$, 多项式有 $\frac{x+y}{5}$, a^2+ab+b^2 , 整式有 $-\frac{xy^2}{2}$, -3 , m , $\frac{a}{\pi}$, $\frac{x+y}{5}$, a^2+ab+b^2 .

举一反三

1. 下列整式中,哪些是单项式?哪些是多项式?说出各单项式的系数、次数.

$$-11, -\frac{1}{2}xy^2, 3x^2-2y^2+xy, mn^2p, 4-3a^2b-ab^2-b^3$$

例 2 已知 $\frac{1}{3}x^{2n+1}y^4$ 与 $-\frac{1}{2}x^5y^{3m-2}$ 是同类项,则 $m=$ _____, $n=$ _____.

精析:因为 $\frac{1}{3}x^{2n+1}y^4$ 与 $-\frac{1}{2}x^5y^{3m-2}$ 是同类项,所以 $2n+1=5$, $3m-2=4$, 解得 $m=2$, $n=2$.

解答:填 $m=2$, $n=2$.

举一反三

2. 两个单项式 $-\frac{1}{4}a^5b^{2m}$ 与 $\frac{3}{5}a^n b^6$ 的和是一个单项式,那么 $m=$ _____, $n=$ _____.

二、整式的运算

例 3 下列运算中,结果正确的是

A. $a^3 \cdot a^4 = a^{12}$ B. $a^{10} \div a^2 = a^5$ C. $a^2 + a^3 = a^5$ D. $4a - a = 3a$

精析:根据同底数幂的运算法则,可知 $a^3 \cdot a^4 = a^{3+4} = a^7$, $a^{10} \div a^2 = a^{10-2} = a^8$, $4a - a = 3a$.

解答:选 D.

举一反三

3. 下列运算正确的是

A. $a+a=2a^2$ B. $a^2 \cdot a=2a^2$ C. $(2a)^2 \div a=4a$ D. $(-ab)^2=ab^2$

例 4 先化简,再求值.

$$(2x+3y)^2 - (2x-y)(2x+y), \text{ 其中 } x=\frac{1}{3}, y=-\frac{1}{2}.$$

精析:在进行整式的乘法时,能用乘法公式进行计算的,用乘法公式计算会比较简便. $(2x+3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$, $(2x-y)(2x+y) = 4x^2 - y^2$.

$$\begin{aligned} \text{解答:原式} &= 4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x^2 + y^2 \\ &= 12xy + 10y^2. \end{aligned}$$

当 $x=\frac{1}{3}$, $y=-\frac{1}{2}$ 时,

$$\text{原式} = 12xy + 10y^2 = 12 \times \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

举一反三

4. 化简求值: $(2a+b)(2a-b) + 3(2a-b)^2$, 其中 $a=-1$, $b=2$.



例5 分解因式： $a^3 - a =$ _____.

精析：因式分解时应先考虑能否提取公因式，然后再考虑能否运用公式法.

解答：原式 $=a(a^2 - 1) = a(a+1)(a-1)$.

举一反三

5. 分解因式： $(x^2 - 5)^2 + 8(x^2 - 5) + 16$.

例6 在日常生活中，如取款、上网等都需要密码. 有一种用“因式分解”法产生的密码，方便记忆. 原理是：如对于多项式 $x^4 - y^4$ ，因式分解的结果是 $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$. 若取 $x=9, y=9$ 时，则各个因式的值是 $x-y=0, x+y=18, x^2+y^2=162$ ，于是就可以把“018162”作为一个六位数的密码. 对于多项式 $4x^3 - xy^2$ ，取 $x=10, y=10$ 时，用上述方法产生的密码是_____ (写出一个即可).

精析：因为 $4x^3 - xy^2 = x(2x+y)(2x-y)$ ，取 $x=10, y=10$ 时， $x=10, 2x+y=30, 2x-y=10$ ，所以产生的密码可以是：103010，本题答案不唯一.

解答：填 103010.

举一反三

6. 在密码学中，称可以直接看到的内容为明码，对明码进行某种处理后得到的内容为密码. 对于26个英文字母，按顺序分别对应整数0~25. 现有4个字母构成的密码单词，记4个字母对应的数字分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 ，已知整数 $x_1 + 2x_2, 3x_2, x_3 + 2x_4, 3x_4$ 除以26的余数分别为9, 16, 23, 12，则密码的单词是什么？

【好题精选】

1. a kg 糖的售价为 b 元，则 m kg 糖的售价为 ()

- A. $\frac{bm}{a}$ 元 B. $\frac{m}{ab}$ 元 C. $\frac{am}{b}$ 元 D. $\frac{ab}{m}$ 元

2. 下列各组中的两个代数式是同类项的是 ()

- A. $3x$ 与 $3x^2$ B. $4a^2b$ 与 $2ab^2$ C. $-\frac{1}{2}xy^2$ 与 $2y^2x$ D. abc 与 ab

3. 已知 $x^2 - 2mx + 1$ 是完全平方式，则 m 的值是 ()

- A. 1 B. -1 C. ± 1 D. 0

4. 计算 $0.25^6 \times (-32)^2$ 等于 ()

- A. $-\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. 1 D. -1

5. 若 $a = -0.3^2, b = -3^{-2}, c = (-\frac{1}{3})^{-2}, d = (-\frac{1}{3})^0$ ，则 ()

- A. $a < b < c < d$ B. $b < a < d < c$ C. $a < d < c < b$ D. $c < a < d < b$

6. 若 $3^m = 5, 3^n = 4$ ，则 3^{2m-n} 等于 ()

- A. $\frac{25}{4}$ B. 6 C. 21 D. 20

7. 已知一个两位数的十位数字是 a ，个位数字比十位数字大 2，用式子表示这个两位数为_____.

8. 若 $3p^{m+2}q^4$ 与 $5q^{n+2}p$ 是同类型项，则 $m+n =$ _____.

9. 若 $x^2 + mx - 15 = (x+3)(x+n)$ ，则 $m =$ _____, $n =$ _____.

10. 分解因式： $4a^3 - 4a^2 + a =$ _____.

11. 某音像公司对外出租光盘的收费方法是：每张光盘出租后的前 2 天每天收费 0.8 元，以后每天收费 0.5 元，那么一张光盘出租后的第 n 天 ($n > 2$ 且为整数) 应收费_____元.

12. 一张纸片，第一次把它剪成 6 片，第二次把其中一片又剪成 6 片……如此下去，则第 n 次剪后共得小纸片_____片.

13. 多项式 $4x^2 - 10x + M$ 是一个完全平方式，则 M 等于_____.

14. 计算：(1) $4a^2 - (7ab - 1) + 2(3ab - 2a^2)$;