

课标本

教材完全解读

王后雄学案

总策划：熊辉



高中数学 必修1

配人教B版

丛书主编：王后雄

本册主编：曾祥红



中国青年出版社

课标本 教材完全解读

王后雄学案

高中数学 必修1
配人教B版

丛书主编：王后雄
本册主编：曾祥红
副主编：杜苏
编委：王强芳 黄河清
丁仁贵 周建国
王志明 王涛锐
杜苏林 陈锐平
程志平 胡建平
徐志平 邵爱先
朱少华 周晶



中国青年出版社

(京)新登字083号

图书在版编目(CIP)数据

教材完全解读:人教B版·高中数学.1:必修/王后雄主编.

—3版.—北京:中国青年出版社,2009

ISBN 978-7-5006-7492-4

I.教... II.王... III.数学课—高中—教学参考资料 IV.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第076296号

策 划:熊 辉

责任编辑:李 扬

封面设计:木头羊

教材完全解读

高中数学

必修1

中国青年出版社 出版发行

社址:北京东四12条21号 邮政编码:100708

网址:www.cyp.com.cn

编辑部电话:(010)64034328

读者服务热线:(027)61883306

武汉市精彩印务有限公司印制 新华书店经销

889×1194 1/16 13印张 347千字

2009年6月北京第3版 2009年6月湖北第4次印刷

印数:13001—23000册

定价:22.30元

本书如有任何印装质量问题,请与承印厂联系调换

联系电话:(027)61883355

教材完全解读

本书特点

基础教育新课标改革已如火如荼地展开，新课程教材助学助考的开发问题已成为人们关注的焦点。应广大读者的要求，我们特邀来自国家新课程改革试验区和国家级培训班的专家编写课标版《教材完全解读》丛书。该系列丛书能帮助学生掌握新的课程标准，让学生能够按照课程理念和教材学习目标要求科学、高效地学习。该书以“透析全解、双栏对照、服务学生”为宗旨，助您走向成功。

这套丛书在整体设计上有两个突出的特点：一是双栏对照，对教材全解全析，在学科层次上力求讲深、讲透、讲出特色；另一个就是注重典型案例学习，突出鲜活、典型和示范的特点。

为了让您更充分地理解本书的特点，挑战学习的极限，请您在选购和使用本书时，先阅读本书的使用方法图示。

明确每课学习要求

以课标为依据，三维目标全解教材学习要求，提供总体的学习策略，提出具体的学习要诀，体现目标控制学习规则。

3层完全解读

从知识、方法、思维三个方面诠释教材知识点和方法点，帮您形成答题要点、解题思维，理清解题思路、揭示考点实质和内涵。

整体训练方法

针对本节重点、难点、考点及考试能力达标所设计的题目。题目难度适中，是形成能力、考试取得高分的必经阶梯。

解题错因导引

“点击考例”栏目导引每一道试题的“测试要点”。当您解题出错时，建议您通过“测试要点”的指向，弄清致错原因，找到正确答案。

教材课后习题解答

帮助您弥补课堂上听课的疏漏。答案准确，讲解繁简适度、到位、透彻。

教材完全解读 高中物理 必修1 配人教版

第一章 运动的描述

第1节 质点 参考系和坐标系

课标三维目标

知道参考系的概念及其与运动的关系。
理解质点的概念及物体简化为质点的条件。
能正确分析和建立坐标系。

知识·能力聚焦

1. 物体和质点
(1) 提出问题
“嫦娥一号”卫星为立方体，两侧太阳能电池板最大跨度达18.1m，重2350kg，近观相当庞大，但相对茫茫宇宙空间又是如此渺小，出现在指挥荧光屏上也只是一个光点。科学工作者在研究其运行位置、飞行速度和轨道等问题时，有没有必要考虑其大小和形状？

2. 方法·技巧平台

4. 判定一个物体能否当作质点的方法
中学物理中可视为质点的运动物体有以下两种情况：
(1) 运动物体的大小跟所研究的问题有关的距离相比可忽略不计时，可将该物体当作质点。

3. 思维拓展

5. 相对运动与参考系
判断有关参考系和相对运动的问题，应注意跳出日常生活中以地面为参考系的思维习惯。乘火车时以自己乘坐火车为参考系。

4. 能力·题型设计

速效答题模板

1. 下列说法正确的是()。
A. 自转中的地球不能看做质点，而原子核可以看做质点
B. 研究火车通过路旁一根电线杆的时间时，火车可看做质点

点击考例

测试要点1.4
[例3]
测试要点2.4

【例1】关于质点的说法，下列正确的是()。
A. 质点就是一个体积很小的球
B. 只有很小的物体才能视为质点
C. 质点不是实际存在的物体，只是一种“理想模型”
D. 大的物体有时可以视为质点

【例9】在研究物体的运动时，下列物体中能够当作质点处理的是()。
A. 研究一端固定可绕该端转动的木杆的运动时，此杆可当作质点来处理
B. 在大海中航行的船要确定它在大海中的位置，可以把它当作质点来处理
C. 研究杂技演员在走钢丝的表演时，杂技演员可以当作质点来处理
D. 研究地球绕太阳公转时，地球可以当作质点来处理

【例10】第一次世界大战期间，一名法国飞行员在2000m高空飞行时，发现脸旁有一个小东西，他以为是只小昆虫，便敏捷地把它一把抓了起来，令他吃惊的是，抓到的竟是一颗子弹。飞行员能抓到子弹，是因为()。
A. 飞行员的反应快
B. 子弹相对于飞行员是静止的
C. 子弹已经飞得没有劲了，快要落在地上了
C. 研究奥运会乒乓球女单冠军张怡宁打出的乒乓球时，不能把乒乓球看做质点
D. 研究在平直的高速公路上飞驰的汽车的速度时，可将汽车看做质点

2. 指出以下所描述的各运动的参考系是什么？
A. “小小竹排江中游”()
B. “巍巍青山两岸走”()

教材课后习题解答

问题与练习 1.1

参考系的：“太阳东升西落”是以地平线为参考系的。
2. 这首诗的前两句是写景，从第二句可看出当时有风，“卧看满天云不动”的原因是作者与云的运动速度相同。

教辅大师、特级教师王后雄教授科学超前的体例设置，帮您赢在学习起点，成就人生夙愿。

—— 题记

最新5年高考名题诠释

【考题1】 天空有近似等高的浓云层。为了测量云层的高度，在水平地面上与观测者的距离为 $d = 3.0\text{km}$ 处进行一次爆炸，观测者听到由空气直接传来的爆炸声和由云层反射来的爆炸声时间上相差 $\Delta t = 0.0\text{s}$ ，试估算云层下表面的高度。

已知空气中的声速 $v = \frac{1}{3}\text{km/s}$

【解析】 如图 1-3-18 所示，A 表示爆炸处。

● 2006 · 全国高考

单元知识梳理与能力整合

【高考命题趋向】

本章主要研究了有关运动的几个概念，以及运动图象，是学习第二章及以后力学知识的基础。高中单独考查本章知识的题很少，较多的是与其他章节结合出题。如单独就本章知识出题，主要以选择题、填空题的形式出现，着重考查学生的理解能力和推理能力。

归纳·总结·专题

一、物理思维方法的总结

1. 物理学的基本思想和研究方法

(1) 理想模型的思想

这是物理学中常用的一种方法。在研究具体问题，为了研究的方便，抓住主要因素，忽略次要因素，从而从实际问题中抽象出理想化模型，把实际复杂的问题简化处理。如质点模型、匀速直线运动模型、匀变速直线运动模型等，以后还会学到更多。

知识与能力同步测控卷

(测试时间:90分钟 测试满分:120分)

第1卷(选择题 共40分)

一、选择题(本大题共10小题，每小题4分，共40分。有的小题只有一个选项正确，有的小题有多个选项正确)

1. 下列说法，符合实际的是()。

A. 火车售票厅悬挂的是列车时刻表

B. 打点计时器是一种测量长度的仪器

C. 出租车按位移的大小收费

D. “万米”赛跑，指的是路程一万米

2. 甲、乙两人同时观察同一个物体的运动，甲说：“它是静止的。”乙说：“它做匀速运动。”下列说法中正确的是()。

()。

A. 研究小木块的翻倒过程

B. 讨论地球的公转

C. 比赛时，运动员分析乒乓球的运动

期中测试卷

(测试时间:90分钟 测试满分:120分)

第1卷(选择题 共40分)

一、选择题(本大题共10小题，每小题4分，共40分。有的小题只有一个选项正确，有的小题有多个选项正确)

1. 下列各种情况，可以把研究对象(加点的)看做质点的是()。

A. 只有直接接触的物体之间才会有力的作用

B. 力的大小可以用天平来测量

C. 力的作用效果是使物体发生形变或使物体的运动状态发生改变

D. 力是不能离开施力物体和受力物体单独存在的

教材学业水平考试试卷

(测试时间:90分钟 测试满分:120分)

第1卷(选择题 共40分)

一、选择题

1. 下面关于力的说法中正确的是()。

2. 关于原子核结构的问题时，就不能把原子核看成质点，A错；B中研究火车通过路旁的一根电线杆的时间时，因电线杆的粗细比火车的长度小得多。

答案与提示

第一章 运动的描述

第1节 质点 参考系和坐标系

能力题型设计

* 速效基础演练

1. C, D 【解析】 A 中当研究地球绕太阳公转时，可将地球当作质点，若研究有

最新5年高考名题诠释

汇集高考名题，讲解细致入微，教纲、考纲，双向例释；练习、考试，讲解透彻；多学、精练，效果显著。

单元知识整合

单元知识与方法网络化，帮助您将本单元所学教材内容系统化，形成对考点知识的二次提炼与升华，全面提高学习效率。

考试高分保障

精心选编涵盖本章节或阶段性知识和能力要求的检测试题，梯度合理、层次分明，与同步考试接轨，利于您同步自我测评，查缺补漏。

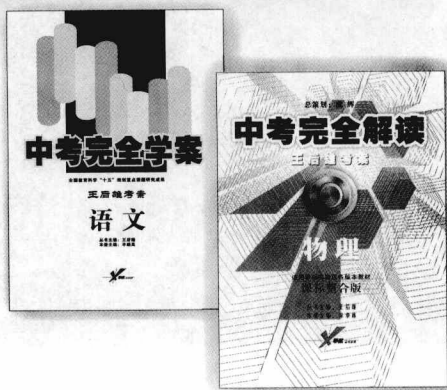
点拨解题思路

试题皆提供详细的解题步骤和思路点拨，鼓励一题多解。不但知其然，且知其所以然，帮助您养成良好规范的答题习惯。

小熊图书 最新教辅

讲 《中考完全解读》 复习讲解—紧扼中考的脉搏

练 《中考完全学案》 难点突破—挑战思维的极限



讲 《高考完全解读》 精湛解析—把握高考的方向

练 《高考完全学案》 阶段测试—进入实战的演练

讲 《教材完全解读》 细致讲解—汲取教材的精髓

例 《课标导航·基础知识手册》 透析题型—掌握知识的法宝

练 《教材完全学案》 夯实基础—奠定能力的基石



伴随着新的课程标准问世及新版教材的推广，经过多年的锤炼与优化，数次的修订与改版，如今的“小熊图书”以精益求精的质量、独具匠心的创意，已成为备受广大读者青睐的品牌图书。今天，我们已形成了高效、实用的同步练习与应试复习丛书体系，如果您能结合自身的实际情况配套使用，一定能取得立竿见影的效果。

全书知识结构图解·名师学法指津	1
第一章 集合	3
1.1 集合与集合的表示方法	3
1.1.1 集合的概念	3
1.1.2 集合的表示方法	8
1.2 集合之间的关系与运算	12
1.2.1 集合之间的关系	12
1.2.2 集合的运算	17
◆单元知识梳理与能力整合	27
◆知识与能力同步测控题	31
第二章 函数	32
2.1 函数	32
2.1.1 函数	32
2.1.2 函数的表示方法	40
2.1.3 函数的单调性	50
2.1.4 函数的奇偶性	57
2.1.5 用计算机作函数的图象(选学) 略	64
2.2 一次函数和二次函数	65
2.2.1 一次函数的性质与图象	65
2.2.2 二次函数的性质与图象	70
2.2.3 待定系数法	76
2.3 函数的应用(I)	81
2.4 函数与方程	88
2.4.1 函数的零点	88
2.4.2 求函数零点近似解的一种计算方法——二分法	93
◆单元知识梳理与能力整合	101
◆知识与能力同步测控题	110
第三章 基本初等函数(I)	112
3.1 指数与指数函数	112
3.1.1 实数指数幂及其运算	112
3.1.2 指数函数	116
3.2 对数与对数函数	125
3.2.1 对数及其运算	125
3.2.2 对数函数	132
3.2.3 指数函数与对数函数的关系	141
3.3 幂函数	148
3.4 函数的应用(II)	154
◆单元知识梳理与能力整合	163
◆知识与能力同步测控题	171
教材学业水平考试试题	172
答案与提示	174



知识与方法

阅读索引

第一章 集合

1.1 集合与集合的表示方法

1.1.1 集合的概念

- 1. 集合的概念 3
- 2. 元素与集合的关系 3
- 3. 集合中元素的特性 4
- 4. 集合的分类 4
- 5. 特定集合的表示 4
- 6. 元素分析法 4
- 7. 利用集合中元素的特性解决与方程有关的问题 5

1.1.2 集合的表示方法

- 1. 集合的表示方法 8
- 2. 如何使用列举法表示集合 9
- 3. 如何使用描述法表示集合 9
- 4. 如何使用图示法表示集合 10
- 5. 集合语言的理解与转换 10

1.2 集合之间的关系与运算

1.2.1 集合之间的关系

- 1. 子集 12
- 2. 真子集 12
- 3. 集合相等 13
- 4. 集合关系与其特征性质之间的关系 13
- 5. 子集的概念与性质在解题中的应用 13
- 6. 正确判断元素与集合、集合与集合之间的关系 13
- 7. 有限集合的子集问题 14
- 8. 有关子集的综合问题 14
- 9. 数形结合在子集中的应用 14

1.2.2 集合的运算

- 1. 交集的定义 17
- 2. 并集的定义 17
- 3. 全集与补集 18
- 4. 交集与并集的运算性质 18
- 5. 交集、并集、补集的关系 19
- 6. 补集思想的应用 19
- 7. 集合中元素个数的计算 19
- 8. 交集、并集、补集的综合运算 20
- 9. 与集合有关的探索性问题 20
- 10. 有关集合的信息迁移题 21

第二章 函数

2.1 函数

2.1.1 函数

- 1. 函数的定义 32

- 2. 函数概念的理解 33
 - 3. 函数的定义域 33
 - 4. 函数的对应法则 33
 - 5. 函数的值域 33
 - 6. 区间 34
 - 7. 映射 34
 - 8. 同一函数的判定 35
 - 9. 由函数的解析式求定义域 35
 - 10. 如何确定象与原象 35
 - 11. 复合函数 36
 - 12. 映射个数的确定 37
- ##### 2.1.2 函数的表示方法
- 1. 函数的表示方法 40
 - 2. 分段函数 41
 - 3. 求函数解析式的方法 42
 - 4. 函数图象的作法 43
 - 5. 图形信息问题 43
 - 6. 函数图象的应用 44
- ##### 2.1.3 函数的单调性
- 1. 增函数和减函数 50
 - 2. 单调性与单调区间 50
 - 3. 函数单调性的判断 51
 - 4. 函数单调性的证明 52
 - 5. 复合函数单调性的判断 52
 - 6. 抽象函数单调性的判断 53
 - 7. 函数单调性的一般应用 53
 - 8. 函数单调性的创新应用 54
- ##### 2.1.4 函数的奇偶性
- 1. 函数的奇偶性 57
 - 2. 奇偶性函数的性质 57
 - 3. 奇、偶函数的图象的性质 58
 - 4. 函数的奇偶性与单调性间的关系 58
 - 5. 函数奇偶性的判断 59
 - 6. 分段函数的奇偶性的判断 59
 - 7. 抽象函数的奇偶性的判断 60
 - 8. 利用奇偶函数的性质求函数解析式 60
 - 9. 函数单调性与奇偶性的综合运用 60
- ##### 2.1.5 用计算机作函数的图象(选学) 略
- #### 2.2 一次函数和二次函数
- ##### 2.2.1 一次函数的性质与图象
- 1. 一次函数的概念 65
 - 2. 一次函数的图象与性质 66
 - 3. 利用图象求一元一次不等式的解集或一元一次方程的解 66
 - 4. 一次函数的运用 67
- ##### 2.2.2 二次函数的性质与图象
- 1. 二次函数的定义 70
 - 2. 二次函数的图象与性质 70

3. 二次函数的解析式	72
4. 二次函数的单调性	72
5. 二次函数中的恒成立问题	73
2.2.3 待定系数法	
1. 待定系数法	76
2. 运用待定系数法求已学过的解析式的常见设法	77
3. 待定系数法的综合应用	77
2.3 函数的应用(I)	
1. 函数模型	81
2. 解答应用问题的基本思想和程序	82
3. 解答应用题的关键	82
4. 函数模型的综合应用	83
2.4 函数与方程	
2.4.1 函数的零点	
1. 函数零点的概念	88
2. 函数零点具有的性质	88
3. 函数零点与方程的根的关系	88
4. 函数零点的判断(零点分析法)	89
5. 零点性质、零点分析法的运用	89
2.4.2 求函数零点近似解的一种计算方法——二分法	
1. 变号零点与不变号零点	93
2. 二分法	93
3. 用二分法求函数的零点的近似值的探究	94
4. 利用二分法求方程的近似解或无理数的近似值	95
5. 二分法在实际生活中的应用	95

第三章 基本初等函数(I)

3.1 指数与指数函数

3.1.1 实数指数幂及其运算

1. 整数指数	112
2. 分数指数幂	112
3. 利用分数指数进行根式与幂的计算	114
4. 带有附加条件的求值问题	114
5. 幂的综合问题	114

3.1.2 指数函数

1. 指数函数的定义	116
2. 指数函数的图象和性质	116
3. 指数函数的定义域与值域	117
4. 指数函数图象的变换规律	118
5. 指数型复合函数的性质	118
6. 幂的大小比较的方法	119
7. 利用指数函数的图象解题	120
8. 指数函数性质的综合运用	121

3.2 对数与对数函数

3.2.1 对数及其运算

1. 对数的概念	125
2. 对数恒等式与对数的性质	125
3. 常用对数与自然对数	126
4. 对数的运算	126
5. 对数式与指数式的关系及相互转换	127
6. 对数的化简求值	127
7. 解带有附加条件的对数式或指数式求值问题	128
8. 对数的综合应用	128
9. 对数运算的实际应用	129

3.2.2 对数函数

1. 对数函数的定义	132
2. 对数函数的图象和性质	132
3. 对数型函数的定义域求解方法	133
4. 定义域或值域为全体实数的问题	134
5. 对数型函数单调性的讨论	134
6. 对数值大小的比较	135
7. 利用函数的图象解题	135
8. 对数函数的综合问题	136
9. 对数函数的实际应用	137

3.2.3 指数函数与对数函数的关系

1. 反函数	141
2. 指数函数与对数函数性质的比较	142
3. 利用互为反函数的两个函数的定义域和值域间的关系解题	142
4. 利用互为反函数的两个函数的图象间的关系解题	143
5. 与指数函数、对数函数有关的综合题	143

3.3 幂函数

1. 幂函数的概念	148
2. 幂函数的图象与性质	148
3. 函数值的大小比较	149
4. 求幂函数的定义域、值域	150
5. 求幂函数的解析式	150
6. 幂函数的单调性与奇偶性	150
7. 幂函数的综合应用	151

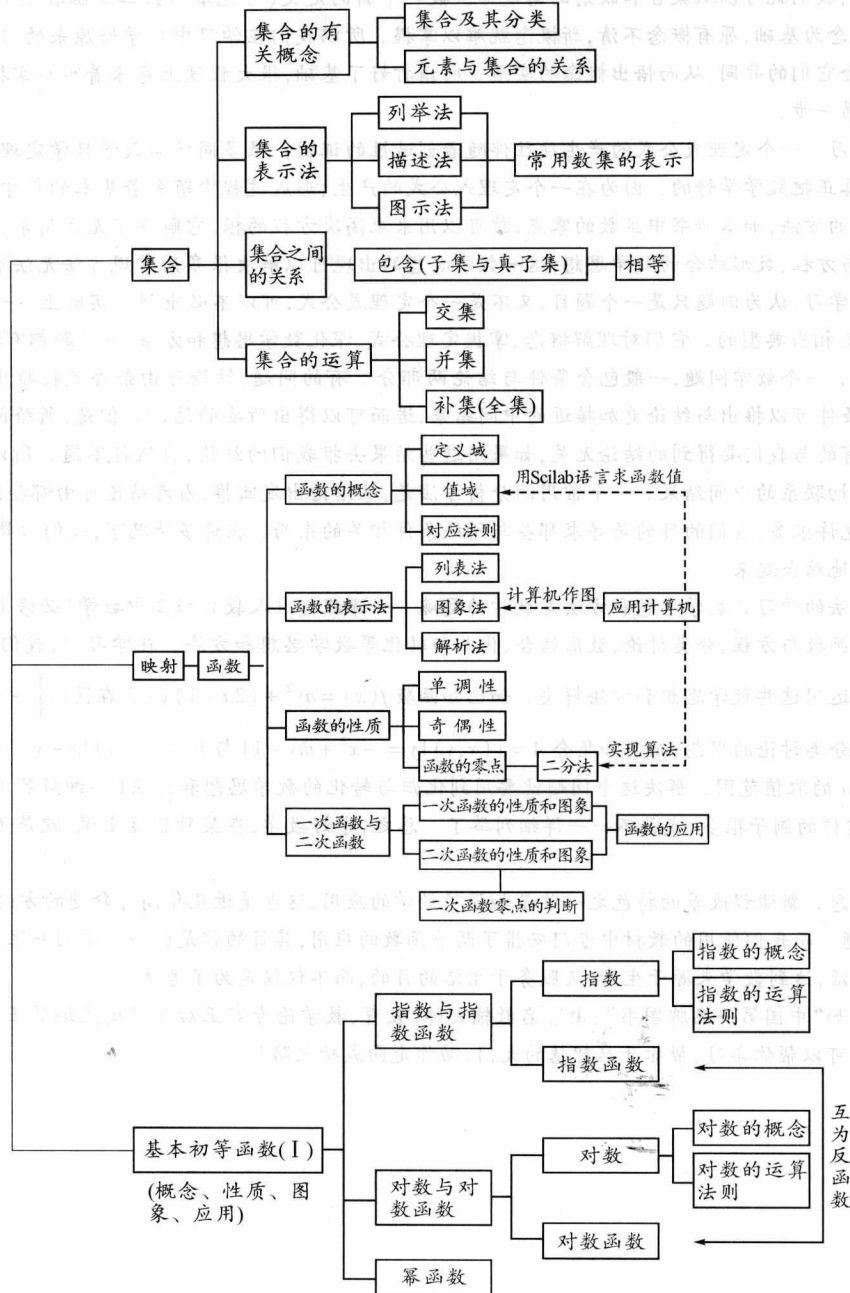
3.4 函数的应用(II)

1. 函数模型为指数函数模型	154
2. 函数模型为对数函数模型	154
3. 函数模型为幂函数模型	155
4. 已建函数模型应用题	155
5. 未建立函数模型应用题	156
6. 根据实际问题,如何建立函数模型	156
7. 几种函数模型的综合运用	157



全书知识结构图解 · 名师学法指津

一、全书知识结构图解



二、名师学法指津

同学们:

经过初中三年的努力学习,你们已顺利升入高中学习.高中阶段的学习仍然是你们学习生活中的重要组成部分,且难度比初中大.如何学好人教B版高中数学必修1,这里谈几点,供同学们参考.

准确理解数学概念.数学概念是数学知识的载体,它常以定义的形式出现,但要注意,有的概念不能定义(如集合).(见数学人教B版必修1).随着知识的深化,同一概念也会发生形式和内涵的变化.如函数的定义,在初中,是从变量的角度来定义的,而在高中学了集合和映射,我们就可以从集合和映射的角度给函数一个新的定义(详见本书第二章函数2.1.1函数的定义).数学中的新概念往往以旧概念为基础,原有概念不清,新概念就难以掌握.所以我们在学习中应学好原来的旧概念,再在此基础上学习新的概念,并从中体会它们的异同,从而悟出概念的实质.所谓打好了基础,很大程度上意味着牢牢掌握了所学过的概念.学好概念,是学好数学的第一步.

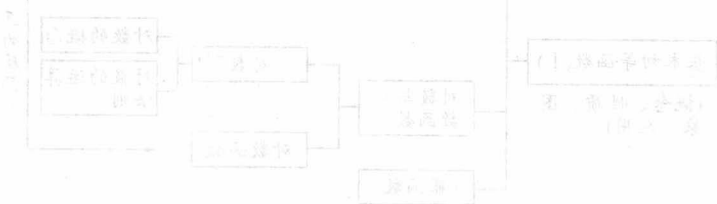
重视定理例题的学习.一个定理或公式的产生往往伴随着创造性的证明.很多同学学数学只学定理或公式的结论,不知其证明过程,这是不可能真正把数学学好的.因为在一个定理或公式的产生、形成过程中蕴含着基本的数学思想和方法,同时也展示了数学家们解决问题的方法,如本册书中函数的零点,就可以用来求高次方程的根,它解决了无法用求根公式求高次方程的根的问题,它展示了函数与方程、数形结合的数学思想,这一数学思想的出现可以解决很多用常规方法无法解决的数学问题.还有的同学不重视对例题的学习,认为例题只是一个题目,又不是一个定理或公式,可以不必重视.实际上,一本好的教辅(如教材完全解读)上的例题常常是相当典型的.它们对理解概念、掌握定理公式、深化数学思想和方法、做习题都有特别重要的帮助.

学会解题前的分析.一个数学问题,一般包含条件与结论两部分.有的问题,结论可由条件直接推出.大部分问题不是选择,而是由这些问题的条件可以推出与结论更加接近的中间结果,进而可以得出所要的结论.但是,所给问题的条件往往可以推出若干结果,这些结果有的与我们要得到的结论无关,如果用这些结果去推我们的结论,自然行不通.所以,必须进行分析比较,寻求与条件和结论都密切联系的中间结果.一个常用的分析方法是:从结论出发回推,看看结论可由哪些东西得到.值得注意的是,能推得结论的东西也许很多,我们的目的是寻求那些与所给条件相关的东西.在许多情况下,我们需要引用一些已知的结果,才能将条件和结论很好地结合起来.

重视数学思想和方法的学习.数学思想和方法是数学的灵魂.新课程标准人教B版高中数学(必修1)中蕴含高中数学的基本数学思想和方法.如函数与方程、分类讨论、数形结合、化归与转化等数学思想和方法.在学习中,我们应好好领会,并学会运用,很多问题,需要我们运用这些数学思想和方法解决.如已知函数 $f(x) = ax^2 + (2a-1)x - 3$ 在区间 $[-\frac{3}{2}, 2]$ 上的最大值为1,求实数 a 的值就要用到分类讨论的思想,而已知集合 $A = \{(x, y) | y = -x^2 + mx - 1\}$ 与 $B = \{(x, y) | x + y - 3 = 0, 0 \leq x \leq 3\}$,若 $A \cap B$ 为单元素集合,求实数 m 的取值范围.解决这个问题就要用到化归与转化的数学思想和方法(详细解答见本书第二章单元知识梳理与能力整合).像这样的例子很多,我就不一一详细列举了.总之,学好数学,在某种程度上说,就是不断积累和探索数学思想和方法.

加强学以致用观念.新课程改革的特色之一就是加强了数学的应用,这也是近几年高考命题的方向,每年高考都有数学应用,数学建模方面的问题.而我们使用的教材中专门安排了两节函数的应用,其目的就是引导同学们关注生活、关注社会,用数学的眼光来观察社会和生活,达到数学来源于生活、又服务于生活的目的,而不仅仅是为了考试.

另外,好的教辅书[如“中国第一品牌图书”,由著名教辅大师、教育、教学论专家王后雄领衔主编的王后雄学案《教材完全解读》(高中数学必修1)]可以帮你学习,帮你开启智慧的大门,助你走向成功之路!



第一章 集合

1.1 集合与集合的表示方法

1.1.1 集合的概念

课标三维目标

1. 知识与技能:通过实例了解集合的含义,体会元素与集合的属于关系,熟悉常用数集的标记符号.
2. 过程与方法:通过本节的学习,学生能够体验集合概念的产生过程,能够学会观察、比较、抽象、概括的思维方法,领悟分类讨论思想.
3. 情感、态度与价值观:通过本节学习,可以增强学生的理性思维能力,增强学生理论联系实际的能力.

解题依据

名题诠释

1 知识·能力聚焦

1. 集合的概念

集合是数学中最原始的不定义的概念,只能给出描述性说明:某些指定的且不同的对象集在一起就成为一个集合.组成集合的对象叫元素.集合常用大写字母 A, B, C, \dots 来表示.元素常用小写字母 a, b, c, \dots 来表示.

集合是一个确定的整体,因此对集合也可以这样描述:具有某种属性的对象的全体组成一个集合.

注意 (1)对于集合我们一定要从整体的角度来看待它.例如由“我们班的同学”组成的一个集合 A ,则它是一个整体,也就是一个班集体,也可以用我们班的序号来代替它.

(2)构成集合的对象必须是“确定”的且“不同”的.其中“确定”是指构成集合的对象具有非常明确的特征,这个特征不是模棱两可的;“不同”是指构成集合的各个对象互不相同.

2. 元素与集合的关系

元素与集合的关系有属于与不属于两种:元素 a 属于集合 A ,记做 $a \in A$;元素 a 不属于集合 A ,记做 $a \notin A$ 或 $a \notin A$.

注意 (1) $a \in A$ 与 $a \notin A$ 取决于 a 是不是集合 A 中的元素.根据集合中元素的确定性,可知对任何 a 与 A ,在 $a \in A$ 与 $a \notin A$ 这两种情况中必有一种且只有一种成立.

(2)符号“ \in ”“ \notin ”仅表示元素与集合之间的关系,不能用来表示集合与集合之间的关系,这一点要牢记.

例题 1 下列各组对象能否构成一个集合:

- (1)著名的数学家;
- (2)某校2009年在校的所有高个子学生;
- (3)不超过10的非负数;
- (4)方程 $x^2 - 4 = 0$ 在实数范围内的解;
- (5) $\sqrt{2}$ 的近似值的全体.

解析 (1)描述的对象是著名的数学家,没有统一的标准,描述的对象不确定,对于某个人是否“著名”无法客观地判断,因此“著名的数学家”不能构成一个集合.类似地,(2)也不能构成集合.(3)任给一个实数 x ,可以明确地判断是不是“不超过10的非负数”,即“ $0 \leq x \leq 10$ ”与“ $x > 10$ 或 $x < 0$ ”两者必居其一,且仅居其一,故“不超过10的非负数”能构成集合.类似地,(4)也能构成集合.(5)“ $\sqrt{2}$ 的近似值”不明确精确到什么程度,因此很难判定一个数(比如2)是不是它的近似值,所以(5)不是一个集合.

点评 一些元素构成的集合必须具备以下两个特点:一是整体性,二是确定性,其中“整体”一语,说明集合是指某些对象的整体而不是指其中的个别对象,这就是集合的整体性.一个对象要么是集合的元素,要么不是集合的元素,二者必居其一,这是集合的确定性.

例题 2 用符号 \in 和 \notin 填空.

- (1)设集合 A 是正整数的集合,则 0 A , $\sqrt{2}$ A , $(-1)^0$ A ;
- (2)设集合 B 是小于 $\sqrt{11}$ 的所有实数的集合,则 $2\sqrt{3}$ B , $1 + \sqrt{2}$ B ;
- (3)设集合 C 是满足方程 $x = n^2 + 1$ (其中 n 为正整数)的实数 x 的集合,则 3 C , 5 C ;
- (4)设集合 D 是满足方程 $y = x^2$ 的有序实数对 (x, y) 的集合,则 -1 D , $(-1, 1)$ D .

解析 (1)依次应填 \notin , \notin , \in ;

(2) $\because 2\sqrt{3} = \sqrt{12} > \sqrt{11}$, $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2} < 11$, $\therefore 1 + \sqrt{2} < \sqrt{11}$.

\therefore 依次应填 \notin , \in ;

(3)由于 n 是正整数, $\therefore n^2 + 1 \neq 3$.而 $n = 2$ 时, $n^2 + 1 = 5$, \therefore 依次应填 \notin , \in ;

3. 集合中元素的特性

(1) 确定性: 设 A 是一个给定的集合, x 是某一具体对象, 则 x 或者是 A 的元素, 或者不是 A 的元素, 两种情况必有一种且只有一种成立. 例如 $A = \{0, 1, 3, 4\}$, 可知 $0 \in A, 6 \notin A$.

(2) 互异性: “集合中的元素, 必须是互异的”, 就是说“对于一个给定的集合, 它的任何两个元素都是不同的”. 如方程 $(x-4)^2 = 0$ 的解集记为 $\{4\}$, 而不能记为 $\{4, 4\}$.

(3) 无序性: 集合与其中元素的排列次序无关, 如集合 $\{a, b, c\}$ 与 $\{c, b, a\}$ 是同一个集合.

4. 集合的分类

集合可根据它含有的元素个数的多少分为两类:

有限集: 含有有限个元素的集合. 如“方程 $3x+1=0$ 的解组成的集合”, 由“2, 4, 6, 8 组成的集合”, 它们的元素个数是可数的, 因此这两个集合是有限集.

无限集: 含有无限个元素的集合. 如“到平面上两个定点的距离相等的所有点”, “所有的三角形”, 组成上述集合的元素是不可数的, 因此它们是无限集.

特别地, 我们把不含有任何元素的集合叫做空集, 记做 \emptyset . 如 $\{x \in \mathbf{R} | x^2 + 1 = 0\}$.

注意 (1) 空集就像一个无处不在的幽灵, 要处处设防, 时刻提高警惕, 才不至于掉进空集这一陷阱之中.

(2) 警惕 $0 = \{0\}, \{0\} = \emptyset, \{\emptyset\} = \emptyset$ 的错误.

① 0 是集合 $\{0\}$ 的一个元素可记为 $0 \in \{0\}$. ② \emptyset 表示空集, $\{0\}$ 表示含一个元素 0 的集合. ③ $\{\emptyset\}$ 表示含有一个元素 \emptyset 的集合.

5. 特定集合的表示

为了书写方便, 我们规定常见的数集用特定的字母表示, 下面是几种常见的数集表示方法, 请牢记.

(1) 全体非负整数的集合通常简称非负整数集(或自然数集), 记做 \mathbf{N} .

(2) 非负整数集内排除 0 的集合, 也称正整数集, 记做 \mathbf{N}^* 或 \mathbf{N}^+ .

(3) 全体整数的集合通常简称为整数集, 记做 \mathbf{Z} .

(4) 全体有理数的集合通常简称为有理数集, 记做 \mathbf{Q} .

(5) 全体实数的集合通常简称为实数集, 记做 \mathbf{R} .

2 方法·技巧平台

6. 元素分析法

解决集合问题, 应对集合的概念有深刻理解, 解题时能不能把集合转化为相关的数学知识是解题的关键, 而集合离不开元素, 所以分析元素是解决集合问题的核心. 元素分析法就是抓住元素进行分析, 即元素是什么? 具备哪些性质? 是否满足元素的三个特性?(即确定性、互异性、无序性)

(4) 由于集合 D 中的元素是有序实数对 (x, y) , 而 -1 是数, 所以 $-1 \notin D$, 又 $(-1)^2 = 1$, 所以依次应填 \notin, \in .

答案 (1) $\notin \notin \in$ (2) $\notin \in$ (3) $\notin \in$ (4) $\notin \in$

方法技巧 (1) 确定元素是否在集合中, 要根据元素是否满足代表元素所适合的条件来确定; (2) 在比较 $1 + \sqrt{2}$ 与 $\sqrt{11}$ 的大小时, 用到了平方法.

例题 3 给出命题: ① $\{e, f, g, h\}$ 与 $\{g, f, h, e\}$ 是两个不同的集合; ② 方程 $(x-2)^2(x-3) = 0$ 的解集为 $\{2, 2, 3\}$; ③ 全体高个子中国人构成一个集合; ④ 0 与 1 之间的全体无理数构成一个集合. 其中正确的个数是().

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

解析 ① 根据集合中元素的无序性可知, 它们是同一集合, 故①是错误的. ② 由集合中元素的互异性知②是错的. ③ 面对一位身高 1.75 米和一位身高 1.80 米的两个中国人, 你可能会说身高 1.75 米者不是“全体高个子中国人”中的一员; 但面对身高分别是 1.75 米和 1.60 米的两位中国人, 你却有可能认为身高 1.75 米者是“全体高个子中国人”中的一员. 由此可知“全体高个子中国人”中的元素不具有确定性, 或者说其中的个体不具备指定性, 故③是错误的. 命题④正确. 故选 A.

答案 A

例题 4 下列各组对象能否构成集合, 若能构成集合则指出它们是有限集、无限集, 还是空集.

- (1) 中国的所有人口组成的集合;
- (2) 广东省 2009 年应届高中毕业生;
- (3) 数轴上到原点的距离小于 1 的点;
- (4) 方程 $x^2 = 0$ 的解构成的集合;
- (5) 你们班中成绩较好的同学;
- (6) 小于 1 的正整数构成的集合.

● 2009 年湖北黄冈测试题 ●

解析 (1) 中国的所有人口能构成一个集合, 它是有限集; (2) 广东省 2009 年的应届高中毕业生能构成一个集合, 它是有限集; (3) 数轴上到原点的距离小于 1 的点能构成一个集合, 它是无限集; (4) 方程 $x^2 = 0$ 的解是 $x = 0$, 它能构成一个集合, 它是有限集; (5) 成绩较好的同学标准不明确, 不能构成一个集合; (6) 小于 1 的正整数是不存在的, 它能构成一个集合, 它是空集.

方法点拨 判断一个集合是有限集、空集还是无限集的关键是看集合中元素的个数.

例题 5 给出下列关系: ① $\frac{1}{2} \in \mathbf{R}$; ② $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$; ③ $|-3| \notin \mathbf{N}^*$;

④ $|- \sqrt{3}| \in \mathbf{Q}$; ⑤ $0 \in \emptyset$, 其中正确的个数为().

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

解析 由 $\mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{N}^*, \emptyset$ 的含义可知, ①②正确, ③④⑤不正确, \therefore 选 B.

答案 B

点评 对几个常见数集的符号表示应熟练掌握.

例题 6 设 A 是实数集, 且满足条件: 若 $a \in A, a \neq 1$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$.

- (1) 若 $2 \in A$, 则 A 中必还有另外两个元素;
- (2) 集合 A 不可能是单元素集;
- (3) 集合 A 中至少有三个不同的元素.

● 2009 年北京海淀练习题 ●

解析 解此题关键在于由已知 $a \in A, a \neq 1$, 得到 $\frac{1}{1-a} \in A, \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} \in A$, 然后逐步探索, 再根据集合中元素的互异性, 从而将问题加以解决.

若 $a \in A, a \neq 1$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$.



[例1] 若 $-3 \in \{a-3, 2a-1, a^2+4\}$, 求实数 a 的值, 并求此时的实数集.

[解析] 由于 -3 在集合中, 因此应分不同情况讨论.

$$\therefore -3 \in \{a-3, 2a-1, a^2+4\},$$

若 $a-3 = -3$, 则 $a=0$, 此时集合为 $\{-3, -1, 4\}$;

若 $2a-1 = -3$, 则 $a = -1$, 此时集合为 $\{-4, -3, 5\}$;

而 $a^2+4 \neq -3$, \therefore 所求集合为 $\{-3, -1, 4\}$ 或 $\{-4, -3, 5\}$.

[例2] (1) 设集合 $A = \{k^2 - k, 2k\}$, 求实数 k 的取值范围.

(2) 已知 $x^2 \in \{0, 1, x\}$, 求实数 x 的值.

[解析] (1) 由元素的互异性得 $k^2 - k \neq 2k$. $\therefore k \neq 0$ 且 $k \neq 3$.

\therefore 实数 k 的取值范围是 $\{k | k \neq 0 \text{ 且 } k \neq 3\}$.

(2) 当 $x^2 = 0$ 时, 得 $x = 0$, 此时集合中有两个相同的元素, 舍去.

当 $x^2 = 1$ 时, 得 $x = \pm 1$.

若 $x = 1$, 此时集合中有两个相同的元素, 舍去.

若 $x = -1$, 此时集合为 $\{0, 1, -1\}$, 符合题意.

当 $x^2 = x$ 时, 得 $x = 0$ 或 $x = 1$, 由上可知都不符合题意.

综上所述, 符合题意的 x 的值为 -1 .

[点评] 对集合元素的性质的考查, 要考虑到元素的确定性, 如 [例2] (1) 中 $k^2 - k$ 和 $2k$ 是确定的, 它们也是互异的; 对于无序性的考查, [例2] (2) 题得到了很好的体现. 既然 x^2 是集合中的元素, 则它既可能是 1, 也可能是 0 或其他元素, 对此, 需对其进行分类讨论. 元素的性质既可以被应用于解题, 又可以利用它们检验解正确与否, 特别是互异性, 最易被忽视, 必须在学习中引起足够的重视.

3 创新·思维拓展

7. 利用集合中元素的特性解决与方程有关的问题

集合与方程有密切联系, 利用集合中元素的特性, 即元素的互异性、无序性、确定性, 再结合方程的解法, 可以求出集合中参数的值.

[例] 已知 $M = \{2, a, b\}$, $N = \{2a, 2, b^2\}$, 且 $M = N$. 求 a, b 的值.

[解析] 两个集合相等是集合中所含元素相同但顺序可以不同.

$$\text{解: 由题意得 } \begin{cases} a=2a, \\ b=b^2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=b^2, \\ b=2a, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a=0, \\ b=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=0, \\ b=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=0, \\ b=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=\frac{1}{4}, \\ b=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{由集合元素的互异性知 } \begin{cases} a=0, \\ b=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=\frac{1}{4}, \\ b=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

[点评] 当方程组得出多组解时要注意检验集合元素的互异性.

[例] (1) 若 $2 \in A$, 则 $\frac{1}{1-2} = -1 \in A$, 于是 $\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \in A$, 故集合 A 中还含有 $-1, \frac{1}{2}$ 两个元素.

(2) 若 A 为单元素集, 则 $a = \frac{1}{1-a}$, 即 $a^2 - a + 1 = 0$, 此方程无实数解, $\therefore a \neq \frac{1}{1-a}$, $\therefore a$ 与 $\frac{1}{1-a}$ 都为集合 A 的元素, 则 A 不可能是单元素集.

(3) 由已知 $a \in A \Rightarrow \frac{1}{1-a} \in A \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} = \frac{1-a}{1-a} \in A$. 现只需证明 $a, \frac{1}{1-a}, \frac{1-a}{-a}$ 三个数互不相等.

① 若 $a = \frac{1}{1-a} \Rightarrow a^2 - a + 1 = 0$, 方程无解, $\therefore a \neq \frac{1}{1-a}$;

② 若 $a = \frac{1-a}{-a} \Rightarrow a^2 - a + 1 = 0$, 方程无解, $\therefore a \neq \frac{1-a}{-a}$;

③ 若 $\frac{1}{1-a} = \frac{1-a}{-a} \Rightarrow a^2 - a + 1 = 0$, 方程无解, $\therefore \frac{1}{1-a} \neq \frac{1-a}{-a}$, 故集合 A 中至少有三个不同的元素.

[点评] 集合离不开元素, 元素是集合的核心, 所以解决有关集合中的探索性问题, 可以先从元素入手, 作为解题的切入点.

(2) 中用到反证法的解题思想, (3) 中需要证明 $a, \frac{1}{1-a}, \frac{1-a}{-a}$ 三个数互不相等.

[例7] 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | ax^2 - 3x + 2 = 0, a \in \mathbf{R}\}$.

(1) 若 A 是空集, 求 a 的取值范围;

(2) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值, 并把这个元素写出来;

(3) 若 A 中至多只有一个元素, 求 a 的取值范围.

[解析] 集合 A 中的元素即是方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 的解, A 中元素的个数即是方程解的个数.

(1) $\because A = \emptyset, \therefore$ 方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 的判别式 $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot a \cdot 2 < 0$, 解得: $a > \frac{9}{8}$.

(2) $\because A$ 中只有一个元素,

\therefore 方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 仅有一个根.

当 $a = 0$ 时, $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 的根为 $\frac{2}{3}, A = \{\frac{2}{3}\}$.

当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot a \cdot 2 = 0, a = \frac{9}{8}$. 这时方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 有两个相等实根为 $\frac{4}{3}, \therefore A = \{\frac{4}{3}\}$.

(3) 若 A 中至多只有一个元素, 则方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 的判别式 $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot a \cdot 2 \leq 0$ 或 $a = 0$,

解得: $a \geq \frac{9}{8}$ 或 $a = 0$.

[点评] 理解集合中元素个数即是方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 的解的个数, 是解此题的关键.

[规律总结] 方程 $ax^2 + bx + c = 0$.

(1) $a = 0$ 且 $b \neq 0$, 方程有一解.

(2) $a \neq 0$. ① $\Delta > 0$ 时方程有两个不同解;

② $\Delta = 0$ 时方程有唯一解;

③ $\Delta < 0$ 时方程无解.

4 能力·题型设计

速效基础演练

- 下列所给对象不能构成集合的是().
 - 平面内的所有点
 - 直角坐标系中 I、III 象限的角平分线上的所有点
 - 清华大学附中高一年级全体女生
 - 所有高大的树
- 给出以下关系式:① $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$, ② $2.5 \in \mathbf{Q}$, ③ $0 \in \emptyset$, ④ $-\sqrt{3} \notin \mathbf{N}$. 其中正确的个数是().
 - 1 个
 - 2 个
 - 3 个
 - 4 个
- 已知 $A = \{x\}$, 下列各式一定正确的是().
 - $x \notin A$
 - $0 \in A$
 - $x \in A$
 - $x \neq 0$
- 已知集合 $M = \{(2, -2), 2, -2\}$, 则集合 M 中元素的个数是().
 - 2
 - 3
 - 4
 - 6
- 若 a 是 \mathbf{R} 中的元素, 但不是 \mathbf{Q} 中的元素, 则 a 可以是().
 - 3.14
 - 5
 - $\frac{3}{7}$
 - $\sqrt{7}$
- 下列命题中, 正确的个数是().

①集合 \mathbf{N} 中最小的正数是 1; ②若 $-a \in \mathbf{N}$, 则 $a \in \mathbf{N}$; ③ $x^2 - 6x + 9 = 0$ 的解集是 $\{3, 3\}$; ④ $\{4, 3, 2\}$ 与 $\{3, 2, 4\}$ 是同一集合.

 - 0
 - 1
 - 2
 - 3
- a, a, b, b, a^2, b^2 构成集合 M , 则 M 中元素的个数最多是().
 - 6
 - 5
 - 4
 - 3
- 设 $L(A, B)$ 表示直线 AB 上全体点组成的集合, “ P 是直线 AB 上的一个点”这句话就可以简单写成 P _____ $L(A, B)$.

点击考例

测试要点 6

测试要点 7

 测试要点 1
2009 年湖北黄冈调考题

测试要点 6

2009 年湖北黄冈重点中学模拟题

 测试要点 2
[例题 2]

测试要点 2

2008 年山东烟台高考题

测试要点 2

测试要点 4

2009 年天津试题

测试要点 3

作者自拟题

测试要点 5

测试要点 2, 6

2009 年北京东城练习题

测试要点 2, 3

测试要点 2, 6

[例题 6]

测试要点 6

测试要点 3

测试要点 7

2008 年湖北部分重点中学联考考题

测试要点 6

2009 年江苏部分重点中学测试题

测试要点 2

2009 年湖北黄冈调考题

9. 对于集合 $A = \{2, 4, 6\}$, 若 $a \in A$, 则 $6 - a \in A$, 那么 a 的值是_____.

10. 已知方程 $x^2 + mx + n = 0 (m, n \in \mathbf{R})$ 的解集为 $\{-2, -1\}$, 求 m, n 的值.

知能提升突破

1. 含有三个实数的集合可表示为 $\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\}$, 也可表示为 $\{a^2, a+b, 0\}$, 则 $a^{2009} + b^{2009}$ 的值为().

- 0
- 1
- 1
- ± 1

2. 集合 $A = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$, 若 $m \in A, n \in A$, 则 $m \oplus n \in A$, “ \oplus ”是一种运算, 则“ \oplus ”可以是().

- 加法
- 减法
- 除法
- 乘法

3. 由实数 $x, -x, |x|, \sqrt{x^2}$ 及 $-\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合中, 含有元素的个数最多为().

- 2
- 3
- 4
- 5

4. 已知 x, y, z 是非零实数, 代数式 $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{|xyz|}{xyz}$ 的值所组成的集合为 M , 则下列判断正确的是().

- $0 \notin M$
- $2 \in M$
- $-4 \notin M$
- $4 \in M$

5. 数集 M 满足条件: 若 $a \in M$, 则 $\frac{1+a}{1-a} \in M (a \neq \pm 1 \text{ 且 } a \neq 0)$. 已知 $3 \in M$, 试求出 M 中的所有元素.

6. 已知集合 $A = \{a+2, (a+1)^2, a^2+3a+3\}$, 若 $1 \in A$, 求实数 a 的值.

7. 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0 \text{ 且 } a, b, c \in \mathbf{R})$, 当 a, b, c 满足什么条件时, 以实数解构成的集合分别为空集、含一个元素、含两个元素?

8. n 是正整数, 若不超过 n 的正整数中质数的个数与合数的个数相等, 这样的 n 称为“怪异数”, 求“怪异数”的集合 A 的元素.



教材课后习题解答

练习A

1. (1)能. (2)能. (3)不能. (4)能. (5)能. (6)不能. (7)能. (8)能.
 2. 自然数集,记做 \mathbf{N} ,是无限集;整数集,记做 \mathbf{Z} ,是无限集;有理数集,记做 \mathbf{Q} ,是无限集;实数集,记做 \mathbf{R} ,是无限集.
 3. (1)不正确. (2)正确. (3)不正确. (4)不正确. (5)正

确. (6)正确. (7)正确. (8)正确.

练习B

1. (1) \notin (2) \in (3) \notin (4) \notin (5) \notin (6) \in
 (7) \in (8) \in
 2. (1)不正确. (2)不正确. (3)不正确. (4)正确. (5)不正确.



最新5年高考名题诠释

[考题1] 定义集合运算: $A * B = \{z | z = xy, x \in A, y \in B\}$, 设 $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 2\}$, 则集合 $A * B$ 的所有元素之和为().

- A. 0
 B. 2
 C. 3
 D. 6

●2008年江西高考题

[解析] 因为 $A * B = \{z | z = xy, x \in A, y \in B\}$, 从而分析可知 $A * B = B * A$, 故从 B 中选0与 A 中各元素相乘都为0, 同理从 B 中选2与 A 中各元素相乘为2, 4.

所以 $A * B$ 中元素为0, 2, 4. 故 $A * B$ 的所有元素之和为6.

由此判断A, B, C选项错误, D选项正确.

[答案] D

[考题2] 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 集合 $\{1, a+b, a\} = \{0, \frac{b}{a}, b\}$, 则

$b-a =$ ().

- A. 1
 B. -1
 C. 2
 D. -2

●2007年全国高考题

[解析] 由 $\{1, a+b, a\} = \{0, \frac{b}{a}, b\}$ 可知 $a \neq 0$, 则只能 $a+b=0$.

则有以下对应关系:

$$\textcircled{1} \begin{cases} a+b=0, \\ \frac{b}{a}=a, \\ b=1; \end{cases} \text{或} \begin{cases} a+b=0, \\ b=a, \\ \frac{b}{a}=1. \end{cases}$$

解 $\textcircled{1}$ 得 $\begin{cases} a=-1, \\ b=1, \end{cases}$ 符合题意; $\textcircled{2}$ 无解.

所以 $b-a=2$.

[答案] C

[考题3] 设“ \oplus ”是 \mathbf{R} 上的一个运算, A 是 \mathbf{R} 的非空子集. 若对任意 $a, b \in A$, 有 $a \oplus b \in A$, 则称 A 对运算 \oplus 封闭, 下列数集对加法、减法、乘法和除法(除数不等于零)四则运算都封闭的是().

- A. 自然数集
 B. 整数集
 C. 有理数集
 D. 无理数集

●2006年辽宁高考题

[解析] 令 $a=1, b=2, \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$, 可排除A, B.

令 $a=\sqrt{2}, b=3\sqrt{2}, \frac{a}{b} = \frac{1}{3}$, 可排除D.

[答案] C

[考题4] 定义集合运算: $A \odot B = \{z | z = xy(x+y), x \in A, y \in B\}$. 设集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{2, 3\}$, 则集合 $A \odot B$ 的所有元素之和为().

- A. 0
 B. 6
 C. 12
 D. 18

●2006年山东高考题

[解析] $\because A = \{0, 1\}, B = \{2, 3\}$,

$\therefore A \odot B = \{0, 6, 12\}$.

故所有元素之和为 $0+6+12=18$.

[答案] D

[考题5] 设 P, Q 为两个非空实数集, 定义集合 $P+Q = \{a+b | a \in P, b \in Q\}$. 若 $P = \{0, 2, 5\}$, $Q = \{1, 2, 6\}$, 则 $P+Q$ 中元素的个数是().

- A. 9
 B. 8
 C. 7
 D. 6

●2005年湖北高考题

[解析] 穷举法, $P+Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11\}$.

[答案] B

1.1.2 集合的表示方法

课标三维目标

1. 知识与技能:能选择自然语言、图形语言、集合语言(列举法和特征性质描述法)描述不同的具体问题、感受集合语言的意义和作用;理解集合的特征性质,会用集合的特征性质描述一些集合,如常用数集、解集和一些基本图形的集合等.

2. 过程与方法:通过实例分析,从集合中的元素入手,正确的表示集合,学会观察、比较、抽象、概括的思维方法,领悟分类讨论的数学思想.

3. 情感、态度与价值观:在运用集合语言的过程中,逐步养成实事求是、扎实严谨的科学态度,学习用数学的思维方式解决问题,认识世界.

解题依据

名题诠释

1 知识·能力聚焦

1. 集合的表示方法

(1) 列举法.就是把集合中的元素一一列举出来的方法,置于大括号内.例如,由方程 $x^2=4$ 的所有解组成的集合,可以表示为 $\{-2,2\}$.

① [注意] ①用列举法表示集合时,集合中元素的列举与元素顺序无关,即符合集合中元素的无序性.如用列举法表示甲、乙两个足球队比赛时所有甲方队员组成的集合等.

②在集合的书写上,要注意规范性,如关于 x 的方程 $x-a=0$ 的解集应写成 $\{a\}$,而不是 a .

(2) 描述法.就是用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合的方法.描述法有两种不同的表示形式.

形式一:将说明元素性质的一句话写在大括号内,即文字描述法.

[例] 高一(1)班全体同学所有的集合,可表示为 $\{\text{高一(1)班的同学}\}$;整数集可表示为 $\{\text{整数}\}$.

① [注意] 以下表示高一(1)班所有同学所组成的集合是错误的.

① $\{\text{高一(1)班的同学组成的集合}\}$,

② $\{\text{高一(1)班的所有同学}\}$.

在表示集合时,我们用大括号“ $\{ \}$ ”,它本身便带有“所有的……”或“……的全体(全部)”之意.所以①中“集合”二字含全部之意,应删去;②中“所有”二字应去掉.

形式二:在大括号内,首先写出集合元素的表现形式(称之为代表元素)和它的范围,再画一条竖线(或一个冒号,或一个分号),然后写上元素所满足的条件(性质),即符号描述法.其基本形式如下:

$\{x \in A \mid x \text{ 具有性质 } p\}$, 或 $\{x \in A: x \text{ 具有性质 } p\}$, 或 $\{x \in A; x \text{ 具有性质 } p\}$.

[例1] 方程 $x^2-3x-10=0$ 的所有实数解所组成的集合(称为方程的解集),可表示为 $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2-3x-10=0\}$.

◆ [例题1] 用列举法把下列集合表示出来.

$$(1) A = \left\{ x \in \mathbf{N} \mid \frac{6}{6-x} \in \mathbf{N} \right\};$$

$$(2) B = \left\{ \frac{6}{6-x} \in \mathbf{N} \mid x \in \mathbf{N} \right\};$$

$$(3) C = \{y \mid y = -x^2 + 4, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\};$$

$$(4) D = \{(x, y) \mid y = -x^2 + 4, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\};$$

$$(5) E = \left\{ x \mid \frac{p}{q} = x, p+q=5, p \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

[解析] (1) $\because \frac{6}{6-x} \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{N}, \therefore \begin{cases} \frac{6}{6-x} \geq 0, \\ x \geq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 6-x > 0, \\ x \geq 0, \end{cases}$

$\therefore 0 \leq x < 6, \therefore x = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

当 $x = 0, 3, 4, 5$ 这4个自然数时,

$\frac{6}{6-x} = 1, 2, 3, 6$ 也是自然数,

$\therefore A = \{0, 3, 4, 5\}$.

(2) 由(1)知 $B = \{1, 2, 3, 6\}$.

(3) 由 $y = -x^2 + 4, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}$ 知 $0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq 2$.

$\therefore x = 0, 1, 2$ 时, $y = 4, 3, 0$ 符合题意,

$\therefore C = \{0, 3, 4\}$.

(4) 点 (x, y) 满足条件 $y = -x^2 + 4, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}$,

则有 $\begin{cases} x=0, \\ y=4, \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ y=3, \end{cases} \begin{cases} x=2, \\ y=0. \end{cases}$

$\therefore D = \{(0, 4), (1, 3), (2, 0)\}$.

(5) 依题意知 $p+q=5, p \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{N}^*$, 则

$\begin{cases} p=0, \\ q=5, \end{cases} \begin{cases} p=1, \\ q=4, \end{cases} \begin{cases} p=2, \\ q=3, \end{cases} \begin{cases} p=3, \\ q=2, \end{cases} \begin{cases} p=4, \\ q=1. \end{cases}$

x 要满足条件 $x = \frac{p}{q}, \therefore E = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4 \right\}$.

① [点评] 列举法表示集合就是将集合中的元素不重复、不计次序、不遗漏地列出,元素之间用逗号隔开.解决此类问题的关键是找出集合中所有的具体元素.

◆ [例题2] 用特征性质描述法表示下列集合.

(1) 正偶数集;

(2) 被3除余2的正整数集合;

(3) 直角坐标平面内坐标轴上的点集;