

高等工程數學

*Advanced
Engineering
Mathematics*

(第二版)

(下冊)

原著者：Peter V. O'Neil

譯述者：徐澧貽 劉柏宏

科技圖書股份有限公司

高等工程數學

(下 冊)

Advanced Engineering
Mathematics

原著者：Peter V. O'Neil

譯述者：徐澧豐 劉伯宏

第 二 版

科技圖書股份有限公司

行政院新聞局登記證 局版台業字第 1123 號

版權所有 • 翻印必究

高等工程數學

(下 冊)

原著者：Peter V. O'Neil

譯述者：徐 澄 豐 劉 伯 宏

發行人：趙 國 華

發行者：科技圖書股份有限公司

台北市重慶南路一段 49 號四樓之 1

電 話：3118308 • 3118794

郵政劃撥帳號 0015697-3

80年 10 月 3 版 特價新台幣 180 元

ISBN:957-655-081-5(套)

ISBN:957-655-082-3(下冊)

原 序

本書包括數學中修畢微積分後，採用的有關現代工程或物理學頗有用處或必需的論題。按其基本性質分為六大篇

- 第壹篇 微分方程式
- 第貳篇 向量與矩陣
- 第叁篇 向量分析
- 第肆篇 Fourier 分析與邊界值問題
- 第伍篇 複數分析
- 第陸篇 數值解法

某些論題（諸如概率與統計，或變分學等）亦可包括在其中。但，此六篇是構成工程數學課程的核心。筆者盡了最大努力，將教師們認為重要而必需的論題，均包括在內。

撰寫本書時，曾經試圖保持兩種讀者——學生與教師能充分獲益。第一，本書擬供學生應用。學生採用本書作為教本，或是參考書，很有希望能精通並活用其中的材料。同時，本書必能供作教師的需要。按照正確的順序，選取正確的論題，用適當的例證與例題加以講解，必會感到方便，同時，尚備有充足而具活用的習題。

認識到此等對象，筆者採取下列諸方針着手

- (1) 記錄現有工程數學課程內容，並聽取審核人士的建議，訂定本書中的各論題與順序。
- (2) 每種新觀念與技術，均舉例說明，在例題中常包含足夠的細節，使學生很容易遵循進修。
- (3) 大多數章節末均附列大量常規習題，並緊跟着一些更具挑戰性問題。有些例題與習題需要採用計算機。此等題目很易予以刪除。

但，著者認為，既然以實用為目的而介紹此類題材，便需計及其中的計算。大多數參與實際工作的工程師與科學者，必然少不了用到計算。

- (4) 書中包含大量的應用題材，開始對所考慮的現象建立其數學模式，隨即介紹求解所需的數學。

本書的六篇，大部分均可互相獨立；故教師可講授與某部分有關的工程數學順序，不必牽及其它部門，亦不必閱讀本書中許多其它無關的章節。為能作此種利用，茲介紹各篇中，有關次序及先修課程的若干提要。

第壹篇 微分方程式

第零章到第七章，構成通常在一年級修畢微積分後的第一堂課程，常微分方程式。第零章，要否講授可以不拘的一章；第一、第二兩章為本篇的基礎，但，諸如 Bernoulli 與 Reccati 方程式等某些部分可以刪除，或分開來指定作為自行研讀教材。第三章對往後的教材並無關係，但在 3.6 節中所發展的微分運算子符號，在 7.1 節系統求解中需要用到。但可延後到第七章時再行講授。第四、第五兩章相互獨立，故講授次序可以隨意。因在現代工程中（尤其是電機工程），變換法甚為重要。故 Laplace 變換中的教材，較平常的每一堂課程內容為多。此等教材只在第七章求解式組中的短短一節內需要。第六章 Bessel 函數教材，與第五章級數解法發生關係，在 6.4 與 6.5 節中包含的 Sturm-Liouville 理論與振盪理論，除若干例題外，不需第二章以外的任何教材。最後，在第七章中，授畢 7.1 節後，便可逕行考慮相位平面、臨界點與穩定性。

第壹篇係假設讀者對隱函數與鏈鎖法則的微分，以及積分技術均甚熟悉。此等內容通常均包含在一年級微積分課程中。但亦鼓勵學生利用積分表藉增效率。部分尚需作廣義積分（用於 Laplace 變換，並扼要的用在 6.2 節中與 Bessel 函數相關連的 gamma 函數）；冪級數

(用於第五章的級數解，與第六章的特殊函數，5.1節對冪級數作扼要複習)；以及偏導數(主要用於1.4與1.5節中的恰當微分方程式與積分因子相關連的情形。)

第貳篇 向量與矩陣

本書將向量與矩陣劃分成兩章。第九章專講向量代數與幾何。首先的論題作為點與箭頭的3維向量，隨後為代數運算的點積、與叉積、以及純量的重積。其方法係屬幾何性質的，其中對採用向量求線與平面方程式，亦提出若干注意事項。作此等考慮之後，緊接着為 n 維向量，向量空間 R^n ， R^n 的子空間，線性獨立、基、維，最後扼要介紹抽象向量空間。對處理第十章中的矩陣，後者可以刪除。第十章各節次與內容如下

矩陣代數：10.1~10.6、10.9節

線性方程式組的解：10.7、10.8節

行列式：10.10、10.11節

行列式的應用：10.12~10.14節

特徵值與其應用：10.15~10.22節

若干特殊矩陣：10.23節

對許多結果均予審慎證明。但諸習題多用計算求解，給予學生們在求線性方程式組、求矩陣的反演、或求特徵值等諸如此類的逐步法則。教師可選取此種運算的一、二種，加以強調說明。

研修第貳篇的學生們，均已讀完一年級微積分課程。但在邏輯上，也許無此必要。學生們若對微積分具有若干背景，似乎較佳。學生必需具有直線與平面觀念，且需學過初等三角學(至少知道正弦與餘弦)，用來瞭解點積與叉積。研讀特徵值時，尚需知道些複數計算。

第參篇 向量分析

4 高等工程數學 (下冊)

本篇僅有一章，計包括向量的微分與積分。各節次與內容分列如下

向量微分，計包括斜率、散度、旋度、速度、與加速度：11.1 ~ 11.5 節

向量積分，計包括 Gauss, Green 與 Stoke 諸定理：11.6 ~ 11.10、11.14 節

應用：11.11、11.12 節

曲線座標，計包括散度、旋度、斜率、以及用正交曲線座標寫成的 Laplacian 運算子：11.13 節

對於此等材料，學生們需知道包括鏈鎖法則在內的偏微分，並對觀察與繪製諸如球面、錐面與柱面等簡單三維曲面，必需具有若干經驗。向量積分定理需採用二重與三重積分。學生必需能用極座標計算二重積分，採用柱面座標與球面座標計算三重積分。最後，尚需得自 9.1 節與 9.3 節中的基本向量代數。

第肆篇 Fourier 分析與邊界值問題

本篇共分兩章，一章專論 Fourier 級數、積分、與變換，另一章為在求邊界值問題中的應用。各節次與內容分列如下

Fourier 級數 (包含多重級數) 與強制振盪：12.1 ~ 12.4、12.8 節

Fourier 積分：12.5、12.6 節

Fourier 變換：12.9、12.10 節

用 Fourier 級數與積分、分離變數法、求解邊界值問題：13.1 ~ 13.8 節

邊界值問題的 Fourier 與 Laplace 變換解：13.9、13.10 節

第十三章的大部分節次，均相互獨立，故可用任何順序講解，或分別予以刪減。

對第十二章而言，學生們對函數的無窮級數與廣義積分，需具有若干經驗。大多數學生均未學過多重級數，但若能持有一種直覺方法，仍可處理多重 Fourier 級數。

第十三章的大部分先修項目，計包括所考慮的特定問題中，需用到第十二章中的某些部分。

第五篇 複數分析

第五篇為本書中分量第二重要的部分，共分六章。其內容係按標準進度進行。大致為：複數算術、複數值函數、微分與分析性、複數積分、Cauchy 定理與其若干結果、Taylor 與 Laurent 級數、殘數與殘數定理、實數值積分與級數總和計算、保形映像、以及某些應用。

學生們要熟悉的，包含兩個實變數的實數值微積分，以及線積分與平面中的 Green 定理。學生們亦需讀過常數值的實數級數，以及一個實變數函數的實數值冪級數。

第六篇 數值解法

本篇僅有一章，與某些常遇問題的概值解摘要。各節均相互獨立，講授次序不拘。

20.1 至 20.6 節，僅需初等微積分，20.7 至 20.9 節僅需一些常微分方程式知識，20.10 節為處理 Dirichlet 問題，20.11 節需要熟悉矩陣運算、特徵向量、與特徵值。

為對讀者作更進一步的服務，在第二十章之後附有補充讀物用的參考書目，蒐集經常需要的公式與資料，定理索引，藉供查考。另附許多單號習題解答。本書尚包含諸如 Fourier 級數與常微分方程式等論題的發展歷史的節次。此等資料有助於瞭解項論題的發展概貌，但一般參考圖書中對此均多疏漏。

謝詞從略

P. V. O'Neil 歐尼爾

高等工程數學 (下冊)

目 錄

原 序

第肆篇 Fourier分析與邊界值問題 (續)

第十三章 偏微分方程式

13.0	導 言	1
13.1	波與熱方程式的導出	4
13.2	波方程式的 Fourier 級數解	17
13.3	熱方程式的 Fourier 級數解	31
13.4	半無窮長與無窮長弦的波方程式	45
13.5	半無窮大與無窮大區域中的熱方程式	51
13.6	邊界值問題的多重 Fourier 級數解	58
13.7	邊界值問題的 Fourier-Bessel 解	67
13.8	邊界值問題的 Fourier-Legendre 解	73
13.9	邊界值問題的 Laplace 變換解	76
13.10	邊界值問題 Fourier 的變換解	82
13.11	存在性、唯一性、類型與適定問題簡釋	97
13.12	偏微分方程式簡史	105
13.13	補充習題	106

第伍篇 複數分析

第十四章 複數與複數值函數

2 高等工程數學 (下冊)

14.1	複 數	111
14.2	複數的極座標形式	120
14.3	複數平面中的集合與函數	127
14.4	複數值函數的極限與導數	133
14.5	Cauchy-Riemann 方程式	137
14.6	有理數乘方與方根	145
14.7	複指數函數	152
14.8	複對數函數	156
14.9	一般乘方	160
14.10	複數值三角函數與雙曲線函數	162
14.11	補充習題	165

第十五章 複數平面中的積分

15.0	導 言	168
15.1	複數平面中的線積分	168
15.2	Cauchy 積分定理	182
15.3	Cauchy 積分定理的某些結果	192
15.4	補充習題	206

第十六章 複數值數列與級數、與Taylor 及Laurent展開式

16.0	導 言	209
16.1	複數值數列	209
16.2	複數值數列的Cauchy收斂性準則	213
16.3	複項級數	217
16.4	複項冪級數	223
16.5	複項Taylor級數	234
16.6	Laurent級數	245
16.7	附錄：實數值數列與級數	251
16.8	補充習題	256

第十七章 奇點、殘數與對實數值積分 及級數的應用

17.1 奇 點	259
17.2 殘數與殘數定理	263
17.3 殘數定理對計算實數值積分的應用	274
17.4 殘數定理對級數總和的應用	281
17.5 輻角原理	285
17.6 補充習題	288

第十八章 保形映像

18.0 導 言	291
18.1 映像中的某些熟知函數	291
18.2 保形映像與線性分式變換	303
18.3 繪製兩個已知整環間的保形映像	317
18.4 補充習題	329

第十九章 複數分析的應用

19.1 單位盤用的調和函數與 Dirichlet 問題	331
19.2 Dirichlet問題的保形映像解	337
19.3 流體流動分析中的複數值函數	342
19.4 複數值函數與靜電位勢	350
19.5 Laplace 變換的反演	351
19.6 複數值 Fourier 級數	353
19.7 複數分析簡史	356

第陸篇 數值解法

第二十章 數值解法

20.0 導 言	359
----------	-----

4 高等工程數學 (下冊)

20.1	方程式的概值解	359
20.2	數值積分	364
20.3	多項式內插法	370
20.4	數值微分	372
20.5	三次仿樣函數	376
20.6	初值問題的數值解法	381
20.7	二階初值問題的數值解	390
20.8	二階邊界值問題的數值解	395
20.9	Dirichlet問題的有限差法	399
20.10	特徵值與特徵向量的概值	404
20.11	最小二乘方法	410
20.12	補充習題	415

附 錄

A.1	參考圖書	418
A.2	常用公式	419
A.3	定理索引	422
A.4	單號習題解答	424

第肆篇 Fourier分析與邊界值問題 (續)

第十三章 偏微分方程式

13.0 導 言

偏微分方程式 (partial differential equation) 爲含一個或多個偏導數的方程式。此類方程式發生於含三個或更多變數的相互作用的許多自然現象中。下節將會討論此等情形。

偏微分方程式的解，是指適合其方程式的函數。例如：作直接代入，很易核對式

$$u(x, t) = \cos(2x)e^{-4e^{2t}}$$

爲下式的解

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

在偶然機會中，用觀察便可得解偏微分方程式，但這種情形很少。舉例而言，考慮下式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4 \frac{\partial u}{\partial y}$$

此式具有許多解，且很易猜出其中簡單的一個。若 $\partial u / \partial x$ 與 $\partial u / \partial y$ 兩者均爲常數，便可很易的獲得一解。因之，先試探 $u(x, y) = Ax + By$ ，求得 $\partial u / \partial x = A$ ，與 $\partial u / \partial y = B$ 。若 $A = -4B$ ，便可得一解。設先選取 $B = 1$ 與 $A = -4$ ，於是 $u = -4x + y$ 爲其一解。很不幸，通常多不是如此簡單。

若一偏微方程式含 n 階偏導數，且無更高階的偏導數時，稱其爲

n 階 (order)。因此, 例如 Laplace 方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

爲二階。下列熱方程式也是二階

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

以上求解的簡單方程式則爲一階。

恰好與常微分方程式相同, 開始研究偏微分方程式時, 通常均集中於線性情形。非線性情形對初學者而言, 過於困難。

三個變數 (一個相關, 兩個獨立) 的一般線性一階偏微分方程式爲

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + f(x, y)u + g(x, y) = 0$$

三個變數 (一個相關, 兩個獨立) 的一般線性二階偏微分方程式的形式爲

$$\begin{aligned} a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \\ + e(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + f(x, y)u + g(x, y) = 0 \end{aligned}$$

所遭遇的大多數方程式均屬上列形式。在此兩種情況中, 若對考慮到的所有 (x, y) 而言, 其 $g(x, y) = 0$, 則方程式爲齊次 (homogeneous)。同時, 若對某些 (x, y) 而言, 其 $g(x, y) \neq 0$, 則爲非齊次 (nonhomogeneous)。在齊次情形中, 總要尋出一個非平庸解 (nontrivial solution), 亦即一個不恒等於零的解。

將注意力集中在線性一階與二階方程式的原因, 是因其發生頗爲頻仍, 尤其二階更是如此。縱使是處理非一般性的情形, 此等方程式亦需廣泛的理論, 故將花費大部分時間來研究在工程與科學中最易遭遇的, 如控制振盪與熱傳導現象等的特殊方程式。所用的主要工具爲 Fourier 級數與積分, 同時在本章末, 亦會討論到 Fourier 與 Laplace 變換法。

下節將談到某些基本偏微分方程式的導數，作為開始。

13.0 節習題

用觀察與積分法求習題 1. 到 10. 中，各已知偏微分方程式的非平庸解。此處， u 為 x 與 y 兩變數的函數。

1. $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
2. $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y^2$
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$
5. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
6. $x \frac{\partial u}{\partial x} = 3$
7. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = y$
8. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$
9. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - x = 0$
10. $\frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

對習題 11. 到 16.，求適合已知偏微分方程式與另加條件的解。

11. $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$; $u(0, 1) = 2$
12. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$; $u(0, 0) = 0$
13. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$; $u(1, 1) = 1$
14. $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$; $u(0, 2) = -3$
15. $2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$; $u(1, 4) = 7$
16. $y \frac{\partial u}{\partial y} = 2$; $u(1, 2) = 4$

對習題 17. 到 25.，決定已知方程式形式是否為線性偏微分方程式，如若不是，試說明其理由。

17. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
18. $x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 3x^2$
19. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2xy^2$
20. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2e^{xy} = 0$
21. $\frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 4x \cos(xy)$
22. $8x \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = 4y^2$
23. $2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$
24. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$
25. $\frac{\partial u}{\partial y} - 8 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos^2(x)$

對習題 26. 到 31.，試證實已知函數為其已知偏微分方程式的一解。

26. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; $u = e^{-y} \cos(x)$
27. $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$; $y = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right)$ 其中 $n = 1, 2, 3, \dots$
28. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; $u = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ 其中 $x > 0, y > 0$

$$29. \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \quad y = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)]$$

其為任一變數可作二次微分之函數

$$30. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \quad u(x, y, t) = \sin(nx) \sin(my) \cos(\sqrt{m^2 + n^2} at)$$

其中 n 與 m 為任何正整數

$$31. x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad u = f\left(\frac{y}{x}\right), x \neq 0$$

其為任一變數可予微分之函數

32 假設 $u_1(x, y)$ 與 $u_2(x, y)$ 為一般二階齊次線性偏微分方程式的兩解。

(a) 證明 $u_1(x, y) + u_2(x, y)$ 亦為其一解。

(b) 證明 $\alpha u_1(x, y)$ 為其一解，其中 α 為任何常數。

33 證明：對非線性偏微分方程式而言，解的和，並不一定是一個解。

13.1 波與熱方程式的導出

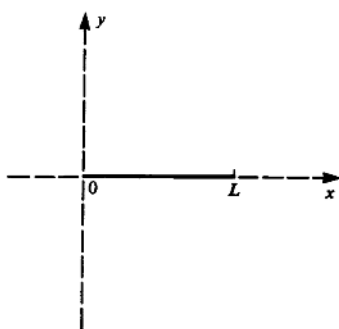
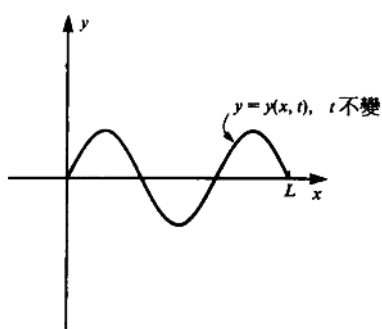
本節將導出控制波動與熱傳導的若干偏微分方程式，亦可認為此等方程式為當然情形，並直接讀下一節，但此等導數，卻傳授了重要的一課，且為邊界條件與初值條件的一個角色。通常，偏微分方程式係用時間與一個或多個空間變數的函數來表示。大多數發生在物理問題中，會具有在某時間的資料，譬如說在 $t = 0$ 時，此等數值構成初值條件 (initial condition)。也常會具位在空間變數不同極端部位的規定條件，得出邊界條件 (boundary condition)。

邊界值問題 (boundary value problem)，計包括一偏微分方程式，及其邊界條件，亦常具初值條件。本節的下一部分將指出如何會發生此種問題，並舉出若干較重要的方程式。

[1] 波方程式

想像一條柔性而具彈力的弦線，置於同一水平的兩栓間並予拉緊，如圖 241 所示。若用某種方式將弦線拉升，然後放鬆，使其發生在垂直平面上的振動，所導致的運動其性質為何？

作成此情況的模式時，將 x 軸置於沿弦的長度方向，在靜止時的部位，並將 y 軸置於垂直部位，同時，將原點置在左側栓部位，如圖 241 所示。在任何時間，與位在任何水平座標值 x 處。設 $y(x, t)$


 圖 241 自 0 到 L 拉緊的弦

 圖 242 在固定時間 t 時，
作為 $y = y(x, t)$
曲線的弦的圖形

為弦的垂直位移。如此，在任何已知時間 t 的 $y = y(x, t)$ 圖形，可顯示該時間弦的形狀，如圖 242 所示。現需知道，當 $0 \leq x \leq L$ (L 為兩栓間的距離)，與時間 $t > 0$ 時的 $y(x, t)$ 。

導出簡單情形 y 的微分方程式時，係略去諸如空氣阻力與弦的重量等不計，並假設弦中的張力 $T(x, t)$ 的作用，永遠是切線方向。設 ρ 為單位弦長的質量，並假設 ρ 為常數。

現就 x 與 $x + \Delta x$ 間一段弦，應用 Newton 定律，如圖 243 所示，必須為

由張力而起的淨力 = (該段質量) $\times$ (該段的加速度)

對微小的 Δx ，考慮其垂直分量，得其概值為

$$T(x + \Delta x, t) \sin(\theta + \Delta\theta) - T(x, t) \sin(\theta) = \rho \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(\bar{x}, t)$$

其中， $\bar{x}$ 為微小段的質量中心，於是得

$$\frac{T(x + \Delta x, t) \sin(\theta + \Delta\theta) - T(x, t) \sin(\theta)}{\Delta x} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(\bar{x}, t)$$

為求方便，將張力的垂直分量寫成 $v(x, t)$ ，於是上式為