

# 有限元分析 基础与应用教程

石伟 编著

 机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS



# 有限元分析基础与应用教程

石 伟 编著



机械工业出版社

有限单元法已经成为研究物理问题、进行工程问题设计和分析的一种重要手段。本书以弹性力学问题和传热问题为工程应用背景,介绍了有限单元法的原理与实现方法、ANSYS 的建模与分析方法、弹性力学平面问题的有限单元法、弹性力学平面问题的分析、等参单元、弹性力学轴对称问题的有限单元法和传热问题的有限单元法。

本书可供机械工程、材料加工工程的技术人员使用,也可供相关专业高年级本科生和研究生参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

有限元分析基础与应用教程/石伟编著. —北京:  
机械工业出版社, 2010. 4  
ISBN 978-7-111-29784-0

I. ①有… II. ①石… III. ①有限元分析—教材  
IV. ①O241. 82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 027896 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)  
策划编辑:孔劲 责任编辑:舒雯 版式设计:霍永明  
责任校对:张晓蓉 封面设计:姚毅 责任印制:乔宇  
三河市宏达印刷有限公司印刷

2010 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm·10 印张·242 千字

0001—3000 册

标准书号: ISBN 978-7-111-29784-0

定价: 23.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010)88361066

门户网:<http://www.cmpbook.com>

销售一部:(010)68326294

教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售二部:(010)88379649

读者服务部:(010)68993821

封面无防伪标均为盗版

# 前 言

从 Clough 第一次提出“有限单元”(Finite Element)概念至今,有限单元法(Finite Element Method)在很多的学科和工程领域得到了成功的应用。我们可以使用有限单元法分析结构的强度、刚度、振动、稳定性和瞬态响应等问题,还可以分析传热、电磁场、声场、生物力学、材料加工和流体力学等学科领域中的问题。在目前,有限单元法已经成为研究科学问题、进行工程设计和分析的一种重要辅助分析方法。为高等学校工科类专业的本科生开设有限元分析方面的基础课程,对于培养工科学生掌握数值模拟方法具有重要意义。许多工程技术人员也有学习使用有限元分析软件的需要。

目前出版的有限单元法书籍有很多,包括有限单元法建模与算法方面的专著和商用有限元分析软件使用的教材等。由于专业知识、工程应用背景和篇幅等方面的原因,在这些书籍中适合用作有限元分析基础课程教材的并不多。结合作者多年的教学实践,在多次修改讲义的基础上形成了本书。本书在介绍有限元法基本原理、有限单元列式构造方法、基本算法的同时,结合工程应用背景介绍了使用商用有限元分析软件 ANSYS 解决实际工程问题的建模、求解与结果分析过程。在比较短的时间内,使读者了解有限单元法基本原理,掌握使用有限单元法分析工程问题的正确步骤和方法。

在有限单元法发展的早期,使用有限元软件不仅需要数值计算的专门知识,还需要具有一定的编写程序的能力,软件使用起来也很不方便。在这一阶段,能够应用有限单元法的人员主要是具有计算力学、结构力学背景的专业人员。现在,由于有限单元法和计算机图形技术的发展,商用有限元软件功能不断增强,软件的用户界面越来越友好,工程技术人员不需要掌握很多的数值计算专门知识,就可以应用商用有限元软件来解决具体的工程问题。本书把重点在有限单元法基本原理、工程问题的建模、有限元软件使用与结果分析这些方面,适当介绍了商用有限元分析软件的近期发展和应用,不侧重于具体计算公式的推导。

在本书第1章中,通过回顾有限单元法的形成与发展过程,来介绍有限单元法的核心思想,即把空间上连续分布的问题转换成一个等效的“有限自由度”问题。对典型算例进行详细推导,介绍构造和求解有限单元列式的基本方法。用尽量短的篇幅介绍了有限单元法的一些典型应用案例。在第2章中,介绍了 ANSYS 软件的功能和用户界面,结合简支梁的变形分析讲解 ANSYS 软件的基本使用。

在第3章中,以弹性力学平面问题为工程背景,介绍了采用直接刚度法构造有限单元列式,包括弹性力学问题基础、单元位移函数、单元分析、载荷移置和整体分析等内容。在第4章中,介绍了如何用 ANSYS 软件分析典型的弹性力学平面问题,讨论如何

用 h 方法和 p 方法提高计算结果的精度，并介绍了 ANSYS 软件提供的 p 方法。在第 5 章中，介绍了有限单元法常用的等参单元，包括等参单元的基本概念、位移函数构造方法与数值积分。在第 6 章中，介绍了用虚构原理建立弹性力学轴对称问题的有限单元列式，并介绍了如何用 ANSYS 软件分析弹性力学轴对称问题。

在第 7 章中，以传热分析为工程背景，介绍了用加权余量法建立有限单元列式，包括加权余量法简介、二维稳态温度场分析的有限元列式、单元的温度刚度矩阵，还介绍了用 ANSYS 软件分析稳态和瞬态传热问题的方法。

本书的写作目的是为机械工程、材料加工工程专业的高年级本科生开设有限元分析课程提供教材，同时为工程技术人员了解有限单元法和学习使用 ANSYS 软件提供快速入门的参考书。选择弹性力学平面问题作为工程应用背景，一是因为在实际工程问题中，除了杆、梁结构之外，经常要分析复杂几何形状零件的强度与变形；二是因为介绍弹性力学平面问题有限单元法，能使读者了解有限单元法形成的基本思路。传热过程是工程问题中最基本的物理过程之一，因此也把传热问题作为工程应用背景。介绍传热问题有限单元法，能使读者了解有限单元法具有严密的数学基础，而不仅仅是一种工程近似方法。

作者希望通过本书与读者分享学习和使用有限单元法的心得，并引起读者进一步学习有限单元法的兴趣。受限于作者的知识范围和写作能力，书中难免存在错误之处，敬请批评指正。

编 者

# 目 录

## 前言

## 第 1 章 有限单元法简介 ..... 1

- 1.1 数值模拟方法简介 ..... 1
- 1.2 有限单元法的起源 ..... 2
- 1.3 有限单元法的一般原理 ..... 4
- 1.4 有限单元法的数学基础 ..... 10
- 1.5 有限元分析的基本步骤 ..... 10
- 1.6 有限元分析的工程应用 ..... 11

## 第 2 章 ANSYS 的建模与分析方法 ..... 18

- 2.1 应用有限元软件建模与分析的步骤 ..... 18
- 2.2 ANSYS 软件简介 ..... 19
  - 2.2.1 ANSYS 软件的基本功能 ..... 19
  - 2.2.2 ANSYS 软件的图形用户界面 ..... 20
  - 2.2.3 ANSYS 主菜单面板 ..... 20
  - 2.2.4 ANSYS 软件的数据文件 ..... 22
  - 2.2.5 ANSYS ED 简介 ..... 22
- 2.3 ANSYS 结构分析的操作流程 ..... 22
- 2.4 保存与读取数据文件 ..... 38
- 2.5 ANSYS 软件的宏命令与参数化建模 ..... 39
  - 2.5.1 日志文件 ..... 39
  - 2.5.2 APDL 语言与参数化建模 ..... 39
- 2.6 ANSYS 的几何建模 ..... 40
- 习题 ..... 49

## 第 3 章 弹性力学平面问题的有限单元法 ..... 51

- 3.1 弹性力学平面问题简介 ..... 51
  - 3.1.1 基本变量 ..... 51
  - 3.1.2 平面应力和平面应变问题 ..... 54
  - 3.1.3 平衡方程 ..... 55
  - 3.1.4 几何方程 ..... 56
  - 3.1.5 物理方程 ..... 57
- 3.2 单元位移函数 ..... 58
- 3.3 单元载荷移置 ..... 63
- 3.4 单元刚度矩阵 ..... 65
- 3.5 单元刚度矩阵的性质与物理意义 ..... 69
- 3.6 整体分析 ..... 70

- 3.6.1 刚度集成法的物理意义 ..... 70

- 3.6.2 刚度矩阵集成的规则 ..... 71

- 3.7 约束条件的处理 ..... 73

- 3.8 整体刚度矩阵的特点与存储方法 ..... 74

- 3.9 线性方程组解法 ..... 76

- 习题 ..... 77

## 第 4 章 弹性力学平面问题的分析 ..... 80

- 4.1 带中心圆孔方板的应力分析 ..... 80

- 4.1.1 问题描述 ..... 80

- 4.1.2 建模与分析 ..... 80

- 4.2 坝体的应力分析 ..... 84

- 4.2.1 问题描述 ..... 84

- 4.2.2 建模与分析 ..... 84

- 4.3 h 方法结构分析 ..... 87

- 4.4 p 方法结构分析 ..... 89

- 4.5 ANSYS 的 p 方法结构分析 ..... 90

- 4.6 用动画方式显示计算结果 ..... 95

- 习题 ..... 96

## 第 5 章 等参单元 ..... 98

- 5.1 四结点矩形单元 ..... 98

- 5.2 等参单元的基本概念 ..... 100

- 5.3 四边形八结点等参单元 ..... 101

- 5.4 等参单元的单元分析 ..... 104

- 5.4.1 计算形函数对整体坐标  $x, y$  的偏导数 ..... 105

- 5.4.2 将整体坐标系中的面积积分转换为在局部坐标系中的面积积分 ..... 106

- 5.4.3 用数值积分计算出单元刚度矩阵中的元素 ..... 106

- 5.4.4 等参单元的载荷移置 ..... 106

- 5.5 高斯积分 ..... 107

- 5.6 六面体等参单元 ..... 108

- 习题 ..... 112

## 第 6 章 弹性力学轴对称问题的有限元法 ..... 114

- 6.1 用虚功方程建立有限元方程 ..... 114

---

6.2	三结点三角形单元位移函数	116	7.2	加权余量法简介	131
6.3	三结点三角形单元刚度矩阵	117	7.3	二维稳态温度场分析的 有限元列式	134
6.4	载荷移置	120	7.4	三结点三角形单元的有限元列式	136
6.5	ANSYS 弹性力学轴对称 问题的分析	121	7.5	等参单元的温度刚度矩阵	138
6.6	空心圆球的受力分析	123	7.6	稳态传热问题温度场分析	139
6.7	ANSYS 软件的坐标系	125	7.7	瞬态传热问题温度场分析	143
	习题	126		习题	150
<b>第 7 章</b>	<b>传热问题的有限单元法</b>	<b>129</b>	<b>参考文献</b>		<b>151</b>
7.1	热传导方程与换热边界	129			

# 第 1 章 有限单元法简介

## 1.1 数值模拟方法简介

科学研究与解决工程问题的基础在于物理实验与实物观测，例如对金属材料的凝固过程进行物理实验、对天体运行进行观测。现代科学研究方法的核心是通过实验或观测建立研究对象的数学模型，基于数学模型进行研究与分析。这种研究方法可以追溯到伽利略的工作，成熟于牛顿的三大定律与微积分。采用实物模型进行物理实验的研究周期长、投入大，有时甚至无法在实物上进行，如天体物理的研究。在数学模型上进行的数值模拟研究具有研究周期短、安全、投入少等优点，已经成为科学研究、解决工程问题不可或缺的工具。

数值模拟方法的应用对象分为三个层次

- 1) 宏观层次：常见的工程建筑、机械设备、零件等。
- 2) 介观层次：材料的微观组织与性能，如金属材料的晶粒度影响其屈服强度。
- 3) 微观层次：基本物理现象与机理，如金属材料凝固时的结晶与晶粒生长过程。

宏观与介观层次的数值模拟方法包括：

- 1) 有限差分方法(Finite Difference Method, FDM)：微分方程的直接离散方法。
- 2) 有限元法(Finite Element Method, FEM)：用有限尺度的单元的集合来代替连续体，分为 Lagrange 方法，Euler 方法，ALE 方法。
- 3) 边界单元方法(Boundary Element Method, BEM)：一种半解析方法。
- 4) 有限体积方法(Finite Volume Method, FVM)：把空间划分成有限尺度的体积单元，变形体流过这些在空间上固定的体积单元，但单元的空间位置不变。
- 5) 无网格方法(Meshless Method)：只布置结点，不需要划分单元网格，有核函数。

微观层次的数值模拟方法包括：

- 1) 第一原理法(First Principle Simulation)：量子力学方法，直接计算原子的电子结构。
- 2) 元胞自动机方法(Cellular Automata)：把空间划分成网格即元胞，通过元胞的局部相互作用来描述复杂的、全局的系统。
- 3) 蒙特卡罗方法(Monte Carlo Method)：把颗粒运动定义为随机过程，用势能的变化来判断颗粒运动能否被接受。
- 4) 分子动力学方法(Molecular Dynamics)，分为经典方法、嵌入原子模型(Embedded Atom Model)、从头计算(ab initio)的方法。经典方法的原理是把分子作为颗粒，用牛顿方程计算颗粒运动，只考虑颗粒之间存在的势能。嵌入原子模型的原理是：原子的势能取决于两个原子间势能的距离和电子密度的嵌入能。从头计算方法的原理是：根据原子的电子结构计算原子之间的作用力。



## 1.2 有限单元法的起源

在科学研究或解决工程技术问题的时候，通常会根据观测、实验的结果来研究基本元素的性质、规律，建立基本元素的数学模型。再把基本元素组合成实际研究对象，建立实际研究对象的数学模型，最后求解这个数学模型。在科学研究和工程技术领域内，经常会遇到两类典型的问题。第一类问题可以归结为有限个已知基本元素的组合。例如，材料力学中的连续梁、建筑结构框架和桁架结构。这类问题称为离散问题。

如图 1-1 所示平面桁架结构，是由 5 根只承受轴向力的直杆组成，其中每根直杆的受力状况相同，桁架结构的基本元素自然是直杆。图 1-2 是北京故宫太和殿，建筑主体是木质梁架结构，其中每根梁、立柱可以作为一个基本元素。图 1-3 是法国巴黎的埃菲尔铁塔，塔身全是钢架镂空结构，用 1.8 万余个金属部件安装而成，高 300.65m，重达 7000t，于 1889 年竣工。图 1-4 是国家体育场的外观。尽管像埃菲尔铁塔、国家体育场这类现代建筑的结构非常复杂，还是由一些基本构件组成。国家体育场外壳就是由图 1-5 所示的支架组成。

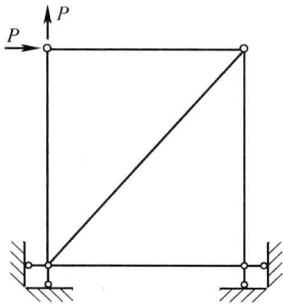


图 1-1 平面桁架系统

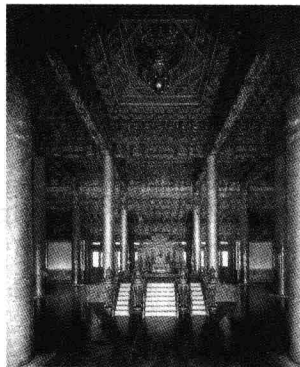


图 1-2 北京故宫太和殿

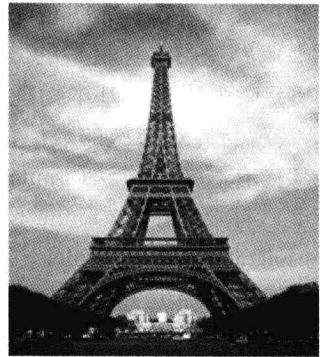


图 1-3 巴黎埃菲尔铁塔



图 1-4 国家体育场外观

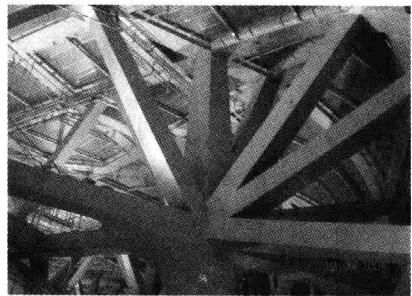


图 1-5 国家体育场外壳的支架

这类离散问题的特点是：①可以把整个对象分解为有限个相同或相似的基本元素；②用相同的方法分析每个组成元素；③不管规模有多大，离散问题是可解的。特别是随着计算机技术的发展，已经能够求解图 1-3、图 1-4 这样结构复杂、规模巨大的离散问题。

第二类问题是针对连续介质，通常可以建立这些问题应遵循的基本方程，即微分方程和相应的边界条件。与离散问题不同，在建立基本方程时所研究的对象通常是无限小的单元，所以这类问题称为连续体问题，例如热传导问题，弹性力学问题，电磁场问题等。

以三维空间均匀连续介质中的热传导问题为例，这个问题可以归结为由控制方程、初始条件与换热边界条件所组成的方程组：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \bar{Q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1-1)$$

式中， $T$ 为温度； $x$ 、 $y$ 、 $z$ 是空间坐标； $t$ 是时间； $\lambda$ 是导热系数； $\rho$ 是材料密度； $c$ 是比热容； $\bar{Q}$ 是内部热源。

初始温度场可以是不均匀的，但各点温度值都是已知的，其函数表达为：

$$T|_{t=0} = T_0(x, y, z) \quad (1-2)$$

有三种换热边界，其中第三类换热边界条件为：

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_f) \quad (1-3)$$

有关热传导问题的偏微分方程组是封闭的，因此可以用解析方法求解。但是对于许多复杂的热传导问题，无法得到解析解。

尽管已经建立了连续介质问题的基本方程，由于边界条件的限制，通常只能得到少数简单问题的解析解，对于许多实际的工程问题还无法给出解析解。为解决这个困难，工程师们和数学家们提出了许多近似方法。

在寻找复杂连续介质问题求解方法的过程中，工程师和数学家从两个不同的路线得到了相同的结果，即有限单元法(Finite Element Method)。有限单元法的形成可以追溯到20世纪50年代甚至更早些时间，基本思路来源于固体力学中矩阵位移法的发展和工程师对结构相似性的直觉判断。对不同结构的杆系、不同的载荷，用矩阵位移法求解都可以得到统一的矩阵公式。如图1-6所示，从固体力学的角度来看，在一定的受力和约束条件下桁架结构的变形方式与连续的方板的变形方式之间存在一定的相似性，复杂形状的板可以等价为通过结点连接的多个矩形板或三角形板。这就产生了一个来自结构类比的想象，即可以把矩阵结构法的求解原理推广到非杆系结构问题的求解。

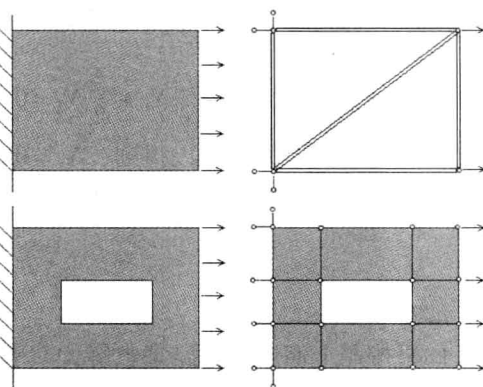


图 1-6 连续体与离散结构的比拟

在1952~1953年期间，R·W·Clough和M·J·Turner在分析飞机三角翼(Delta Wing)振动问题时，提出了把平面应力三角形板或矩形板组合起来表达机翼刚度的方法，当时被称为直接刚度法。1956年M·J·Turner，R·W·Clough，H·C·Martin，L·J·Topp在纽约举行的航空学会年会上发表论文《复杂结构的刚度和变形分析》(“Stiffness and deflection analysis of complex structures”)介绍了这种新的计算方法，从而将矩阵位移法推广到求解弹性力学平面应力问题。他们把平面板壳结构划分成一个个三角形和矩形的“单元”，利用单元中

近似位移函数,求得单元结点力与结点位移关系的单元刚度矩阵。1960年, R·W·Clough 在论文《平面应力分析的有限元单元》(“The finite element in plane stress analysis”)中首次提出了有限单元(Finite Element)这一术语,他也因此被称为“有限单元之父”。Clough 在2001年发表的回顾文章《关于有限单元法起源的思考》(“Thoughts about the origin of the finite element method”)中详细介绍了他当年提出有限单元法的过程。Clough 和 E·L·Wilson 在他们发表的回顾文章《伯克利早期有限单元研究》(“Early finite element research at Berkeley”)中详细地介绍了有限单元法的早期研究工作。

### 1.3 有限单元法的一般原理

在这里引用 O·C·Zienkiewicz 的一段话来说明有限单元法的一般原理,“人类思维的限制在于不能通过一步运算就掌握复杂环境和事物的行为。因此,先把所有系统分解为它们的元件或单元,这些元件的行为已经被充分地了解,再把元件重新组装成原来的系统来研究系统的行为。这种研究方法是一种很自然的方法,工程师、科学家,甚至经济学家都在使用。”

**例 1-1:** 平面桁架 123 如图 1-7 所示。已知各杆件的弹性模量  $E = 2.0 \times 10^5 \text{MPa}$ , 各杆的截面积均为  $A = 0.5 \text{cm}^2$ , 杆 13 的长度为 100cm, 载荷  $P = 2 \text{kN}$ 。求平面桁架各杆的内力与位移。

假设杆 12、杆 23 和杆 13 的内力分别为  $N_1$ 、 $N_2$  和  $N_3$ 。

结点 2 在 X 方向和 Y 方向的平衡方程分别为

$$P - \frac{\sqrt{2}}{2}N_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 = 0$$

$$P + \frac{\sqrt{2}}{2}N_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 = 0$$

由上面的两个方程可以得到,  $N_1 = 0 \text{kN}$ ,  $N_2 = -2.828 \text{kN}$ 。

结点 3 在 X 方向的平衡方程为

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}N_2 - N_3 = 0$$

解得

$$N_3 = 2 \text{kN}$$

如果按照上面所述思路来求解大型平面桁架,计算的工作量很大,而且不同的解题者可能采用不同的解算思路。通过分析单个杆件的受力变形特征,可以建立规则的解算方法来计算平面桁架的受力,并用计算机实现这种解算方法。平面桁架属于离散结构系统,各杆件自然就是单元。杆 12 为单元 1,杆 23 为单元 2,杆 13 为单元 3。单元编号、结点编号与单元长度如表 1-1 所示。

表 1-1 单元编号、结点编号与单元长度

单元编号	首结点编号	尾结点编号	单元长度/cm
1	1	2	70.71
2	2	3	70.71
3	1	3	100

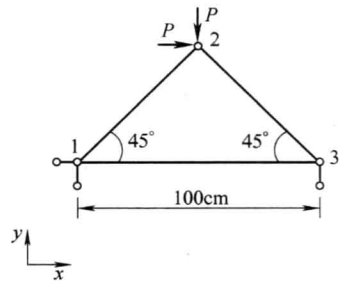


图 1-7 平面桁架

### 1. 平面桁架的单元分析

1) 在局部坐标系中建立结点力分量与结点位移分量的关系矩阵。局部坐标系  $x$  轴的正方向由首结点  $i$  指向尾结点  $j$ , 结点位移与结点力如图 1-8 所示。

根据胡克定律

$$f_{jx} = \frac{EA}{l_{ij}}(u_{jx} - u_{ix}) \quad (1-4)$$

由单元平衡, 得  $f_{ix} = -f_{jx}$

设  $k = \frac{EA}{l_{ij}}$ , 得到局部坐标系中结点力分量

与结点位移分量之间的关系,

$$\begin{pmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{jx} \\ f_{jy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \end{pmatrix} \quad (1-5)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u}$$

2) 如图 1-9 所示, 根据局部坐标系中结点位移、结点力分量与整体坐标系中结点位移、结点力分量之间的关系, 建立转换矩阵  $\mathbf{T}$ 。得到整体坐标系下的结点力与结点位移分量。

局部坐标系相对整体坐标系的夹角为  $\theta$ , 夹角的正负号遵守右手法则(从  $X$  轴正向转向  $Y$  轴正向为正)。在整体坐标系中的结点位移分量与局部坐标系中的结点位移分量存在以下关系:

$$U_{ix} = u_{ix} \cos\theta - u_{iy} \sin\theta$$

$$U_{iy} = u_{ix} \sin\theta + u_{iy} \cos\theta$$

写成矩阵形式,

$$\begin{pmatrix} U_{ix} \\ U_{iy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \end{pmatrix}$$

将局部坐标系中单元结点变量转换到整体坐标系中单元结点变量的转换矩阵  $\mathbf{T}$  定义如下:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (1-6)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{T}\mathbf{u}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{T}\mathbf{f}$$

3) 在整体坐标系中建立单元结点力分量与位移分量的关系矩阵。

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{k}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U}$$

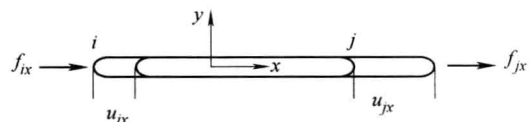


图 1-8 直杆的结点位移与结点力

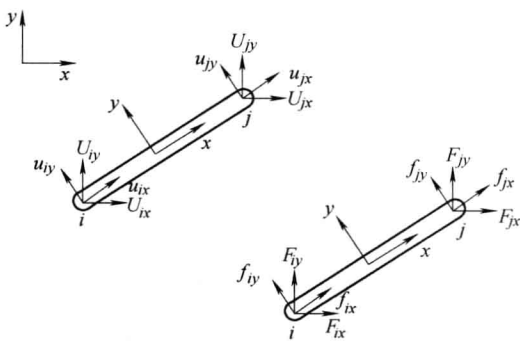


图 1-9 整体坐标系与局部坐标系中的结点力与位移分量

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$F = T k T^{-1} U \tag{1-7}$$

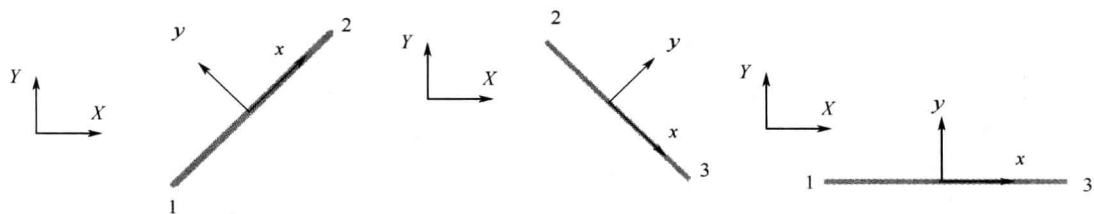
在整体坐标系中，单元结点力分量与位移分量的关系矩阵(单元刚度矩阵)为：

$$K^{(e)} = k \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta & -\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{1-8}$$

直杆的刚度  $EA = 10000kN$ 。

单元 1 局部坐标与整体坐标的关系如图 1-10a 所示， $\theta = 45^\circ$ 。

$$K^{(1)} = 70.71 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



a) 单元 1 局部坐标与整体坐标的关系    b) 单元 2 局部坐标与整体坐标的关系    c) 单元 3 局部坐标与整体坐标的关系

图 1-10 单元局部坐标与整体坐标的关系

单元 2 局部坐标与整体坐标的关系如图 1-10b 所示， $\theta = -45^\circ$ 。单元 3 局部坐标与整体坐标的关系如图 1-10c 所示， $\theta = 0^\circ$ 。

$$K^{(2)} = 70.71 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad K^{(3)} = 100 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2. 平面桁架的整体分析

平面桁架结点的总体自由度编号与单元结点的局部自由度编号如表 1-2 所示。

表 1-2 平面桁架结点的总体自由度编号与单元结点的局部自由度编号

结 点	1		2		3	
总体自由度编号	1	2	3	4	5	6
单元 1 局部自由度编号	1	2	3	4		
单元 2 局部自由度编号			1	2	3	4
单元 3 局部自由度编号	1	2			3	4

根据单元结点的局部编号与结点的总体自由度编号的关系，把单元刚度矩阵直接叠加得到总体刚度矩阵，即整个结构所受的外部载荷由全部单元来分担。例如，单元1的局部自由度1、2，单元3的局部自由度1、2，都对应为整体自由度1、2，那么把两个单元刚度矩阵对应的系数相叠加。

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 70.71 + 100 & 70.71 & -70.71 & -70.71 & -100 & 0 \\ 70.71 & 70.71 & -70.71 & -70.71 & 0 & 0 \\ -70.71 & -70.71 & 70.71 + 70.71 & 70.71 - 70.71 & -70.71 & 70.71 \\ -70.71 & -70.71 & 70.71 - 70.71 & 70.71 + 70.71 & 70.71 & -70.71 \\ -100 & 0 & -70.71 & 70.71 & 70.71 + 100 & -70.71 \\ 0 & 0 & 70.71 & -70.71 & -70.71 & 70.71 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 170.71 & 70.71 & -70.71 & -70.71 & -100 & 0 \\ 70.71 & 70.71 & -70.71 & -70.71 & 0 & 0 \\ -70.71 & -70.71 & 141.42 & 0 & -70.71 & 70.71 \\ -70.71 & -70.71 & 0 & 141.42 & 70.71 & -70.71 \\ -100 & 0 & -70.71 & 70.71 & 170.71 & -70.71 \\ 0 & 0 & 70.71 & -70.71 & -70.71 & 70.71 \end{pmatrix} \quad (1-9)$$

根据位移边界条件， $U_1 = V_1 = V_3 = 0$ 。在总体刚度矩阵中去掉与零位移对应的行与列，得到式(1-10)：

$$\begin{pmatrix} 141.42 & 0 & -70.71 \\ 0 & 141.42 & 70.71 \\ -70.71 & 70.71 & 170.71 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1-10)$$

则

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0241 \\ -0.0241 \\ 0.02 \end{pmatrix}$$

单元的内力按以下公式计算：

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{k}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U} = k \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & -\cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}$$

$$\text{单元1的内力为 } N_1 = f_{jx}^1 = 141.42 \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0241 \\ -0.0241 \end{pmatrix} = 0$$

单元2的内力为

$$N_2 = f_{jx}^2 = 141.42 \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0241 \\ -0.0241 \\ 0.02 \\ 0 \end{pmatrix} = -2.82\text{kN}$$

$$\text{单元 3 的内力为 } N_3 = f_{jx}^3 = 100 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.02 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\text{kN}$$

下面用在自重作用下的等截面直杆来说明求解连续问题的有限单元法的原理。受自重作用的等截面直杆如图 1-11 所示，杆的长度为  $L$ ，截面积为  $A$ ，弹性模量为  $E$ ，单位长度的重量为  $q$ ，杆的内力为  $N$ 。试求：杆的位移分布，杆沿轴向的应变和横截面上的正应力。

(1) 等截面直杆在自重作用下的材料力学解答

$$N(x) = q(L-x), \quad du(x) = \frac{N(x) dx}{EA} = \frac{q(L-x) dx}{EA}$$

$$u(x) = \int \frac{q(L-x) dx}{EA} = \frac{q(2L-x)x}{2EA} + C \quad (1-11)$$

当  $x=0$  时， $u(0) = 0$

$$\text{所以, } u(x) = \frac{q(2L-x)x}{2EA}, \quad \varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{q}{EA}(L-x), \quad \sigma_x = E\varepsilon_x = \frac{q}{A}(L-x)$$

(2) 等截面直杆在自重作用下的有限单元法解答

1) 离散化。如图 1-12 所示，将直杆划分成  $n$  个有限分段，有限分段之间通过一个铰接点连接。称两分段之间的铰接点为结点，称每个有限分段为单元。其中，第  $i$  个单元的长度为  $L_i$ 。包含第  $i, i+1$  个结点。

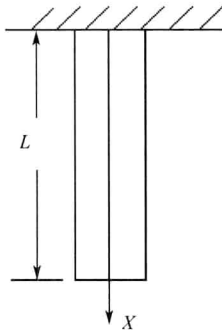


图 1-11 受自重作用的等截面直杆

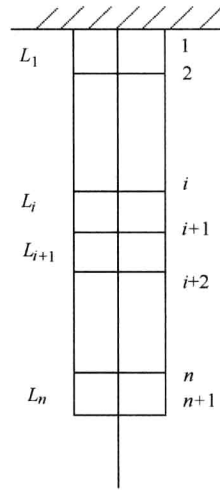


图 1-12 离散后的直杆

2) 用单元结点位移表示单元内部位移。第  $i$  个单元中的位移分布用所包含的结点位移来表示，

$$u(x) = u_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{L_i}(x - x_i) \quad (1-12)$$

式中， $u_i$  是第  $i$  结点的位移； $x_i$  是第  $i$  结点的坐标。

第  $i$  个单元的应变为  $\varepsilon_i$ ，应力为  $\sigma_i$ ，内力为  $N_i$

$$\varepsilon_i = \frac{du}{dx} = \frac{u_{i+1} - u_i}{L_i} \quad (1-13)$$

$$\sigma_i = E\varepsilon_i = \frac{E(u_{i+1} - u_i)}{L_i} \quad (1-14)$$

$$N_i = A\sigma_i = \frac{EA(u_{i+1} - u_i)}{L_i} \quad (1-15)$$

由于单元内部的位移分布被假设成为结点位移的线性插值，单元内的应变、应力和内力都是常数。

3) 把外载荷集中到结点上。如图 1-13 所示，把第  $i$  单元和第  $i+1$  单元重量的一半  $\frac{q(L_i + L_{i+1})}{2}$ ，集中到第  $i+1$  结点上。这样处理的原因是，集中在结点上的外载荷与单元上的分布载荷要满足静力等效。

4) 建立结点的力平衡方程。对于第  $i+1$  结点，由力的平衡方程可得：

$$N_i - N_{i+1} = \frac{q(L_i + L_{i+1})}{2} \quad (1-16)$$

令  $\lambda_i = \frac{L_i}{L_{i+1}}$ ，并将式(1-15)代入得：

$$-u_i + (1 + \lambda_i)u_{i+1} - \lambda_i u_{i+2} = \frac{q}{2EA} \left(1 + \frac{1}{\lambda_i}\right) L_i^2 \quad (1-17)$$

对于第  $n+1$  个结点，平衡方程为： $N_n = \frac{qL_n}{2}$

$$-u_n + u_{n+1} = \frac{qL_n^2}{2EA} \quad (1-18)$$

根据约束条件， $u_1 = 0$ 。建立所有结点的力平衡方程，可以得到由  $n+1$  个方程构成的方程组，可解出  $n+1$  个未知的结点位移。

**例 1-2:** 将受自重作用的等截面直杆划分成如图 1-14 所示的 3 个等长的单元，试求杆的位移。

定义单元的长度为  $a = \frac{L}{3}$ 。

对于结点 1， $u_1 = 0$

对于结点 2，由式(1-17)可得， $-u_1 + 2u_2 - u_3 = \frac{qa^2}{EA}$

同样，对于结点 3 有， $-u_2 + 2u_3 - u_4 = \frac{qa^2}{EA}$

对于结点 4，可以有两种处理方法。

1) 直接用第 3 个单元的内力与结点 4 上的载荷建立平衡方程

$$N_3 = \frac{qa}{2}, N_3 = \frac{EA(u_4 - u_3)}{a}, -u_3 + u_4 = \frac{qa^2}{2EA}$$

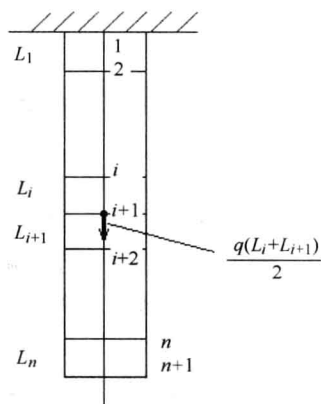


图 1-13 单元外载荷的移置

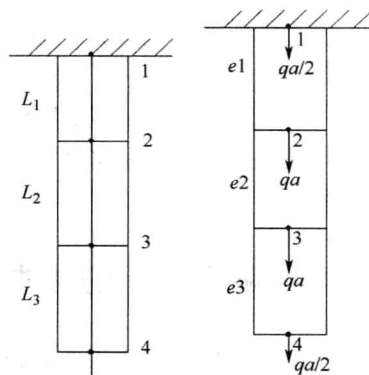


图 1-14 离散为 3 个单元后的直杆



2) 假定存在一个虚拟结点 5, 与结点 4 构成了虚拟单元 4

$$L_4 = 0, \quad u_5 = u_4, \quad \lambda_3 = \frac{L_3}{L_4} \rightarrow \infty$$

在结点 4 上应用式(1-17),

$$-u_3 + (1 + \lambda_3)u_4 - \lambda_3 u_5 = \frac{q}{2EA} \left( 1 + \frac{1}{\lambda_3} \right) a^2, \quad -u_3 + u_4 = \frac{qa^2}{2EA}$$

整理后得到线性方程组,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{qa^2}{EA} \\ \frac{qa^2}{EA} \\ \frac{qa^2}{2EA} \end{pmatrix}, \quad \text{解得} \begin{cases} u_2 = \frac{5qa^2}{2EA} \\ u_3 = \frac{4qa^2}{EA} \\ u_4 = \frac{9qa^2}{2EA} \end{cases}$$

## 1.4 有限单元法的数学基础

当有限单元法成功地应用于求解弹性力学平面问题之后, 下一步要解决的问题就是: 这能否把这种方法应用于求解其他连续介质问题。在寻找连续介质问题近似算法的时候, 数学家们发展了微分方程的近似解法, 包括有限差分方法, 变分原理和加权余量法。这些方法与有限单元法之间有何关联?

1954 到 1955 年之间, J·H·Argyris 在航空工程杂志上发表了一组能量原理和结构分析论文, 证明所有结构分析方法可以归结为位移法(以结点位移为基本未知量)或力法(以结点力为基本未知量)。在 1963 年前后, 经过 J·F·Besseling、R·J·Melosh、R·E·Jones、R·H·Gallaher、T·H·H·Pian 等许多人的工作, 逐步认识到有限单元法就是变分原理中 Ritz 近似法的一种变形, 推导出了由各种不同变分原理导出的有限元计算公式。1965 年 O·C·Zienkiewicz(英国斯西大学土木系教授)和 Y·K·Cheung(张佑启)发现能写成变分形式的所有场问题, 都可以用与固体力学有限单元法的相同步骤求解。1969 年, B·A·Szabo 和 G·C·Lee 指出可以用加权余量法特别是 Galerkin 法, 导出标准的有限元方程式来求解非结构分析问题。

我国的力学工作者为有限元方法的初期发展做出了许多贡献, 其中比较著名的学者有: 陈伯屏(矩阵位移方法), 钱令希(余能原理), 钱伟长(广义变分原理), 胡海昌(广义变分原理), 冯康(有限单元法理论)。其中冯康的工作更接近 Clough 的工作。“20 世纪 60 年代初期, 冯康等人在大型水坝应力计算的基础上, 独立于西方创造了有限元方法并最早奠定其理论基础”(《数学辞海》第四卷)。

## 1.5 有限元分析的基本步骤

数值模拟的主要工作内容包括: ①建立研究对象的数学模型; ②选择可靠的数值算法; ③分析计算结果。有限元分析的基本步骤如下。