新世纪高级应用型人才培养系列教材

A Practical Textbook Series for the New Century

工程数学

概率论与数理统计

（第2版）

主　编　孟　晗

副主编　赵军圣　庄光明

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

新世纪高级应用型人才培养系列教材

A Practical Textbook Series for the New Century

工程数学

概率论与数理统计

第2版

主　编　孟　晗

副主编　赵军圣　庄光明

同济大学出版社

TONGJI UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/孟晗主编. —2 版. —上海：
同济大学出版社，2010.1
ISBN 978-7-5608-4192-2

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①孟… Ⅲ. ①概率论—高等学校--教
材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 207518 号

概率论与数理统计 第 2 版
主编 孟 晗 副主编 赵军圣 庄光明
责任编辑 卞玉清 责任校对 徐春莲 封面设计 陈益平

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021－65985622)
经　　销 全国各地新华书店
印　　刷 同济大学印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 14.75
印　　数 1—5100
字　　数 295000
版　　次 2010 年 1 月第 2 版 2010 年 1 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5608-4192-2

定　　价 24.00 元

第 1 版前言

概率论与数理统计是研究随机现象中数量规律的数学学科.随着知识经济、信息时代的来临,研究随机现象的数学理论、方法及其应用愈来愈广泛,概率统计的思想方法已经渗透到了自然科学与社会科学的各个领域,并且还在继续拓广.

为了适应新世纪我国高等教育迅速发展的形势,满足新时期高等教育人才培养拓宽口径,增强适应性对数学教育的要求,我们按照教育部《高等教育面向 21 世纪数学内容和课程体系改革计划》和《工科类本科数学基础课程教学要求》(修订稿)的精神和要求,结合多年的教学研究与实践,博采众家之长,编写了本书.在编写过程中,我们在遵循本学科系统性与科学性的前提下,尽量做到内容少而精,充分体现素质教育,突出教学思想.贯彻由浅入深、循序渐近、融会贯通的教学原则与直观形象的教学方法.既注重概率统计的基础概念、基本理论和方法的阐述,又注重学生基本运算能力的训练和分析问题、解决问题能力的培养.

本书包括随机事件及其概率、随机变量及其分布,随机变量的数字特征、大数定理定律与中心极限定理等概率论基本内容和参数估计、假设检验,线性回归分析等数理统计的基本内容.每节后配有习题,既有基本练习题,也有部分综合练习题,以提高读者分析问题、解决问题的能力.书末附有习题答案.

本书可作为高等理工类院校“概率论与数理统计”课程的教材或教学参考书.

本书第一章由孟晗编写,第二章至第三章由王健编写,第四章至第五章由高建来编写,第六章到第七章由张玉坤编写,第八章由马军编写,第九章由王彧编写.全书由孟晗制定编写计划并负责最后统稿定稿.

由于编者水平有限,加之时间仓促,书中难免有不妥之处,错误亦在所难免,希望专家、同行和广大读者批抨指正.

编者

2005 年 1 月

第 2 版前言

本书是在 2005 年同济大学出版社出版的孟晗等编写的新世纪高级应用型人才培养系列教材《概率论与数理统计》的基础上，根据我们多年的教学改革实践，按照新形势下教材改革的精神，进行全面修订而成的. 2009 年 6 月，本书第 1 版被评为山东省优秀教材. 我们保留了原书的系统和风格，统一了变量符号，明确了原先较模糊的概念和定义，精炼了所有例题和习题，并在附录中给出了较详细的习题解答，完善和简化了对定理的证明方法和证明过程，增加了部分新内容，如概率母函数、矩母函数、特征函数、随机变量序列收敛关系、非参数假设检验、双因素方差分析、正交设计等.

全书分为两大部分：第一部分为概率论基础，包括前 5 章内容；第二部分为数理统计，包括后 4 章内容. 第一部分包括：随机事件及其概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理. 第二部分包括：数理统计的基本思想、参数估计、假设检验、线性回归、方差分析和正交设计. 本书基本上只用到微积分和线性代数的知识，凡是具备这两门高等数学知识的读者，都可以使用本书作为学习《概率论与数理统计》课程的教材. 本书内容丰富，重点突出，但是由于课时和专业原因，教师在实际授课时，可以根据专业特点，在完成基本内容的基础上，有选择地讲授.

本书由孟晗制定总体修订计划并负责统稿和定稿. 第一章由孟晗修订和编写，第二章到第五章由赵军圣修订和编写，第六章到第九章由庄光明修订和编写. 在此，我们首先要感谢聊城大学数学科学学院的领导和全体教师对我们编写本教材的关心和支持；特别要感谢陈德新教授在百忙中抽出时间审阅了书稿，提出了宝贵意见；感谢聊城大学历届学生，他们在学习中提出了大量的问题并对部分习题答案作了验证.

由于我们水平所限，虽经多次修改，书中一定还存在许多错误和不足，恳请广大读者批评指正.

编者

2009 年 8 月

目 录

第一章　随机事件及其概率

在自然界和人类社会中，人们所能观察到的现象是多种多样的．但归纳起来，它们大体上可以分为两类：一类是确定性现象，另一类是随机现象．

确定性现象是在一定条件下必然发生的．例如，在标准大气压下把水加热到 100℃ 时必然会沸腾；向上抛掷的一枚石子必然会下落；等等．随机现象在一定的条件下可能发生，也可能不发生，或者说，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果．例如，在相同条件下抛掷同一枚硬币，其结果可能是正面向上，也可能是反面向上，并且在每次抛掷之前无法肯定抛掷的结果；从含有不合格品的一批产品中任意抽取一件检验，检验结果可能是合格品，也可能是不合格品，事先无法准确地预言．通过大量试验，我们知道，大量重复抛掷同一枚硬币时，正面朝上的次数约占抛掷总数的一半．这类在个别试验中呈现出不确定的结果，而在相同条件下进行大量重复的试验，试验结果呈现出的规律性称为统计规律性．概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科，它在自然科学、工程技术和社会科学的许多领域有着重要的应用．

第一节　随机事件及其运算

一、随机试验与样本空间

为了确定随机现象的规律性，需要进行多次的试验、调查或观察，我们把这些工作统称为试验．一个试验如果满足下述条件：

1）试验可以在相同条件下重复进行；

2）试验的所有可能结果是明确可知道的，并且不止一个；

3）每次试验之前，不能判定哪一个结果将会出现．

那么，就称这样的试验是一个随机试验．为简单起见，也简称为试验．

例如，掷一粒骰子，观察出现的点数；记录某电话总机在一小时内收到的呼唤次数；观测电视机的使用寿命；等等，都是随机试验．随机试验一般用 E 表示．

随机试验 E 的每一个可能结果，称为基本事件，或称为样本点．因为随机试验的所有可能结果是明确的，从而所有基本事件也是明确的．所有的基本事件组成的集合称为试验 E 的样本空间，记为 Ω．样本点用 ω 表示．

例 1　抛掷一枚骰子，观察出现的点数，基本事件有 6 个：出现 1 点，出现 2 点，……，出现 6 点，则样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$．

例 2　掷两枚硬币，观察正面与反面出现的情况．其样本空间 $\Omega=\{$（正，正），

(正,反),(反,正),(反,反)}. 这里,比如样本点 $\omega=$ (正,反) 表示第一枚硬币抛出正面而第二枚抛出反面.

例 3 记录某电话总机在一小时内收到的呼唤次数,其样本点是非负整数. 当然,我们可以根据实际情况为电话呼唤次数确定一个上界 N. 但是今后会看到,人们宁愿不确定这个 N,而假设呼唤次数可以是任何非负整数,即认为 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$.

例 4 在一批电视机中任意抽取一台,测试其寿命,用 t 表示电视机的使用寿命,则 $\Omega=\{t \mid t \geqslant 0\}$.

我们指出,样本空间是研究随机现象的数学模型. 正确地确定不同随机试验的样本点和样本空间是极为重要的. 比如例 2 已给出抛掷两枚硬币观察其正、反面出现情况的样本空间,如果我们只关心两枚硬币出现正面的个数,则样本空间应改为 $\Omega=\{0,1,2\}$.

二、随机事件

我们时常会关心试验的某一部分可能结果是否出现,从而引出随机事件的概念. 我们称随机试验 E 的样本空间 Ω 中的子集为 E 的随机事件,简称为事件,常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 例如,在例 1 中,$A=\{$点数为偶数$\}=\{2,4,6\}$,$B=\{$点数$\geqslant 3\}=\{3,4,5,6\}$ 都是随机事件;在例 3 中,$A=\{$至多 4 次呼唤$\}=\{0,1,2,3,4\}$,$B=\{$至少两次呼唤$\}=\{2,3,\cdots\}$ 也都是随机事件. 基本事件是最简单的随机事件. 而一般的随机事件是由若干个基本事件组成的,称为复合事件.

由于样本空间 Ω 包含了全部可能结果,因此,在每次试验中,Ω 都会发生,故称 Ω 为必然事件. 相反,空集 $\varnothing$ 不含任何样本点,每次试验必定不发生,故称 $\varnothing$ 为不可能事件. 这是随机事件中的两个极端情况. 严格来说,这两种事件都不是随机事件,但为了讨论方便,我们还是把它们作为随机事件的特殊情形来统一处理.

三、事件的关系与运算

在同一随机试验中,一般含有多个随机事件. 由于它们共处于同一试验之中,因而是相互联系着的. 我们有必要弄清它们之间的关系,并引进事件间的运算,以便化复杂事件为简单事件,更好地解决相应的概率问题.

(1) 包含与相等　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A,或称事件 A 包含于事件 B 中,记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$. 如图 1-1 所示.

显然,对任何事件 A,有 $\Omega \supset A \supset \varnothing$. 如果 $A \subset B$,且 $B \subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A=B$. 例如,在例 1 中,若 $A=\{$出现 2 点$\}$,$B=\{$出现偶数点$\}$,$C=\{$出现 2 点,4 点或者 6 点$\}$,则 $A \subset B$,$B=C$.

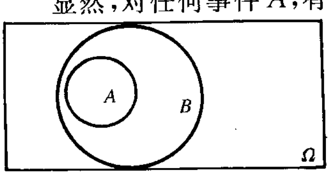

图 1-1

(2) 事件的并　事件 A 与事件 B 至少有一个发生,这样一个事件称为事件 A 与事件 B 的并事件(或和

事件)，记为 $A \cup B$，如图 1-2 所示. 例如，在例 1 中，$A = \{$出现偶数点$\}$，$B = \{$点数 $\geqslant 4\}$，则 $A \cup B = \{2,4,5,6\}$.

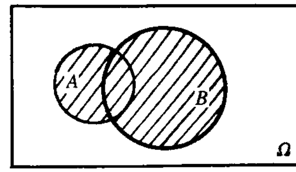

图 1-2

类似地，n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并事件 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 表示"$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生."

(3) 事件的交　事件 A 与事件 B 同时发生这一事件称为事件 A 与事件 B 的交事件(或积事件)，记为 AB(或 $A \cap B$). 如图 1-3 所示. 如在例 1 中，若 A, B 同上，则 $AB = \{4,6\}$.

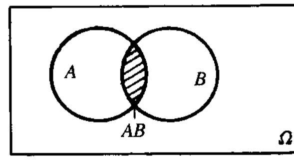

图 1-3

类似地，n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交事件 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 表示"$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生".

(4) 事件的差　事件 A 发生而事件 B 不发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A - B$. 如图 1-4 中阴影部分所示. 如在例 1 中，若 A, B 同上，则 $A - B = \{2\}$.

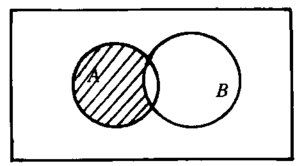

图 1-4

(5) 互不相容事件　若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与 B 为互不相容事件(或称为互斥事件). 如图 1-5 所示. 如在例 1 中，若 $A = \{$点数为偶数$\}$，$B = \{$点数为 $3\}$，则 A 与 B 为互不相容的事件.

一般地，对于 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，若它们之间两两互不相容，则称这 n 个事件是互不相容的. 这时，$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 通常记为 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$.

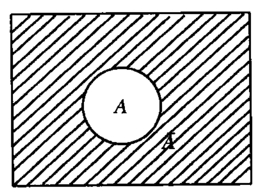

图 1-5

(6) 对立事件　若 A 是一事件，令 $\overline{A} = \Omega - A$，称 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件(或逆事件). 易知，在一次试验中，$\overline{A}$ 与 A 二者只能发生其中之一，并且也必然发生其中之一. 因而有

$$A\overline{A} = \varnothing \quad , \quad A \cup \overline{A} = \Omega.$$

此外，显然有 $\overline{\overline{A}} = A$. 如图 1-6 所示.

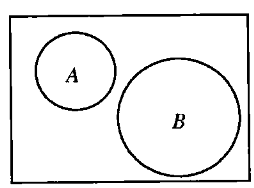

图 1-6

值得注意的是，若事件 A 与 B 对立，则事件 A 与 B 互不相容，反之不然. 如在例 1 中，若 $A = \{$点数为偶数$\}$，$\overline{A} = \{$点数为奇数$\}$.

容易看出，事件间的关系和运算与集合论中集合间的关系和运算之间是完全可以互相类比的. 集合论中常用的运算规律同样适用于事件的运算.

(1) 交换律　　$A \cup B = B \cup A$，

$A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律　　　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(3) 分配律　　　$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

(4) De Morgan 定理(对偶原则)

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n,$$

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \cdots \cup \overline{A}_n.$$

例 5 设 A,B,C 为三个事件,用 A,B,C 及其运算表示下列事件:

(1) A 发生,B 与 C 不发生;

(2) A 与 B 都发生,而 C 不发生;

(3) A,B,C 中至少有一个发生;

(4) A,B,C 都发生;

(5) A,B,C 都不发生;

(6) A,B,C 中不多于一个发生;

(7) A,B,C 中不多于两个发生;

(8) A,B,C 中至少有两个发生.

解 (1) A 发生,B 与 C 不发生,表示 $A,\overline{B},\overline{C}$ 同时发生,故该事件可表示为 $A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A-B-C$;

(2) A 与 B 都发生,而 C 不发生,表示 $A,B,\overline{C}$ 同时发生,故该事件可表示为 $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$;

(3) 该事件为 $A \cup B \cup C$;

(4) 该事件为 ABC;

(5) 该事件为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

(6) 该事件为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$ 或者 $\overline{A}\overline{B} \cup \overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}\overline{C}$ 或者 $\overline{AB \cup BC \cup CA} = \overline{AB} \cap \overline{BC} \cap \overline{CA}$;

(7) 该事件为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$ 或者 $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$;

(8) 该事件为 $AB \cup BC \cup CA$ 或 $ABC \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C \cup AB\overline{C}$.

习　题　1-1

1. 写出下列随机试验的样本空间 Ω:

(1) 袋中有 3 个红球和 2 个白球,现在从袋中任取一个球,观察其颜色;

(2) 掷一次硬币,设 H 表示"出现正面",T 表示"出现反面". 现将一枚硬币连掷两次,观察出现正、反面的情况,并用样本点表示事件 $A=\{$恰有一次出现正面$\}$;

(3) 对某一目标进行射击,直到击中目标为止,观察其射击次数,并用样本点表示事件 $A=\{$射击次数不超过 5 次$\}$;

(4) 生产某产品直到 5 件正品为止，观察记录生产该产品的总件数；

(5) 由编号为 a,b,c,d 四人中，选出正式代表和列席代表各一人参加会议，观察选举结果，并用样本点表示事件 $A=\{$编号为 a 的人当选$\}$.

2. 设某试验的样本空间 $\Omega=\{1,2,\cdots,10\}$，事件 $A=\{3,4,5\}$，$B=\{4,5,6\}$，$C=\{6,7,8\}$，试用相应的样本点表示下列事件：

(1) $A\overline{B}$；　(2) $\overline{A}\cup B$；　(3) $\overline{A\overline{BC}}$；　(4) $\overline{A(B\cup C)}$.

3. 某人向一目标连续射击 3 枪，设 $A_i=\{$第 i 枪击中目标$\}$，$i=1,2,3$，试用事件 A_1,A_2,A_3 及事件的运算表示下列各事件：

(1) $A=\{$只有第一枪击中目标$\}$；　(2) $B=\{$只有一枪击中目标$\}$；

(3) $C=\{$至少有一枪击中目标$\}$；　(4) $D=\{$最多有一枪击中目标$\}$；

(5) $E=\{$第一枪、第三枪中至少有一枪击中目标$\}$.

4. 设 $\Omega=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，$A=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x<1\right\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{4}\leqslant x<\frac{3}{2}\right\}$，求 $\overline{A\cup B}$，AB，$\overline{A}\cup B$.

5. 写出下列试验的样本空间 Ω：

(1) 同时掷三颗骰子，观察并记录三颗骰子点数之和；

(2) 设有 A,B,C 三个盒子，a,b,c 三个球. 试将这三个球随机装入三个盒子，使每个盒子各有一个球，观察装球的情况；

(3) 测量一汽车通过给定点的速度.

6. 用排列或组合方法，计算下列随机试验的样本空间的样本点的总数：

(1) 观察三粒种子的发芽情况；

(2) 从 30 名学生中任选 2 人参加某项活动，观察选举情况；

(3) 将 a,b 两个球放入三个不同的盒子中（每个盒子容纳的球数不限），观察装球情况.

7. 证明

(1) $AB\cup(A-B)\cup\overline{A}=\Omega$；

(2) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)=AB$.

第二节　随机事件的概率

在实际问题中，常常需要对随机事件发生的可能性大小进行定量描述，而"概率"的概念正是源于这种需要而产生的.

一、概率的统计定义

定义 1　设在相同条件下进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 出现了 m 次，则称

$$f_n(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件 } A \text{ 出现的次数}}{\text{试验的总次数}}$$

为随机事件 A 在 n 次试验中出现的频率，m 称为频数.

由频率的定义，易知频率有下述性质：

性质 1　$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

性质 2　$f_n(\Omega) = 1$ $(f_n(\varnothing) = 0)$；

性质 3　若 A_1, A_2 是互不相容的事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2) = f_n(A_1) + f_n(A_2).$$

事件的频率刻画了事件发生的频繁程度，由定义看出，频率越大，事件 A 发生越频繁，因而在一次试验中发生的可能性越大. 因此自然想到用事件 A 的频率表示 A 在一次试验中发生的可能性的大小. 但频率是随试验的具体结果而定的，一般不是确定的值.

实践中，人们发现当试验次数 n 较大时，频率 $f_n(A)$ 总在某一个常数 p 附近波动. 这一性质称为频率的稳定性. 下面的例子说明了这一点.

例 1　掷一枚质地均匀的硬币，出现正面与反面的机会是相等的，即在大量重复试验中，出现正面的频率应接近0.5. 历史上曾有几位数学做过该试验，结果见表 1-1.

表 1-1

试验者	掷硬币次数	正面朝上次数	频率
蒲　丰	4040	2048	0.5069
费　勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

上述事实表明：尽管在某一次试验中可能出现这种结果，也可能出现那种结果，但在大量试验中，只要试验条件相同，观察到的频率就基本上一致. 这说明随机事件在大量试验中存在着一种客观规律性，而频率稳定性正是这种规律性的表现.

定义 2（概率的统计定义）　在大量重复试验中，若事件 A 发生的频率稳定地在某一常数 p 附近摆动，则称该常数 p 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$，即 $P(A) = p$.

应该指出，频率是变动的，而概率则为常数. 当试验次数足够多时，频率相对稳定，可把频率作为概率的近似值，即 $f_n(A) = P(A)$. 我们平常说的产品的合格率、彩票的中奖率、药物治疗某疾病的有效率等都是指频率.

二、古典概型

具有以下特征的随机试验模型，称为古典概型：

（1）试验的样本空间只有有限个样本点；

（2）试验中每个样本点出现的可能性相同.

古典概型也叫做等可能概型. 在概率论的产生和发展过程中，它是最早且最常用

到的一种概率模型.

定义 3(概率的古典定义)　设随机试验 E 为古典概型,它的样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,事件 A 由 m 个样本点组成,则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 中的样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点数}}.$$

例 2　将一枚硬币抛掷三次.

(1) 设事件 A 为"恰有一次出现正面",求 $P(A)$.

(2) 设事件 B 为"至少有一次出现正面",求 $P(B)$.

解　用 H 表示出现正面,T 表示出现反面.那么,样本空间 $\Omega=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$.

(1) $A=\{HTT,THT,TTH\}$,故 $P(A)=\frac{3}{8}$.

(2) $B=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH\}$,故 $P(B)=\frac{7}{8}$.

例 3　设袋中有外型相同的 10 个球(其中包括 6 个红球,4 个白球).现从中随机地抽取 3 个,求

(1) 取出的 3 个球都是红球的概率;

(2) 取出的 3 个球恰有一个是白球的概率.

解　所谓"随机地抽取",是指待抽取的对象中的每一个被抽到的可能性相同,故是古典概型.本例中样本点总数为 $n=C_{10}^3$.

(1) 设 $A=\{$取出的 3 个球都是红球$\}$.事件 A 包含的样本点数 $m=C_6^3$,故

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}.$$

(2) 设 $B=\{$取出的 3 个球中恰有一个是白球$\}$,事件 B 包含的样本点数 $m=C_4^1C_6^2$,故

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}.$$

例 4　设袋中有 a 个红球与 b 个黑球,现任意不放回地一一摸出,求事件 $A_k=\{$第 k 次摸出红球$\}$ 的概率.

解法 1　视同色球是可辨的,可理解球不仅着了色,还编上不同的号码.于是,样本点是这 $(a+b)$ 个球的全排列,样本点总数为 $(a+b)!$.摸球的任意性保证各样本点发生是等可能的,故是古典概型.为计算 A_k 中所含样本点数,我们分解它为两个串行的过程:先从 a 个红球中选一个放在第 k 个位置上,共有 a 种选法.再将其余 $a+b-1$ 个球在其余位置上任意排列,有 $(a+b-1)!$ 种方式.由乘法原理,A_k 所含样本点数为 $a(a+b-1)!$,故

$$P(A_k) = \frac{a}{a+b}.$$

解法 2 视同色球不可辨.此时,样本点取决于这$(a+b)$个位置中哪 a 个放红球,共有 C_{a+b}^{a} 个样本点,而 A_k 要求 k 个位置必须是红球,于是只需从 $a+b-1$ 个位置中选 $a-1$ 个放其余的红球,即 A_k 中含样本点数为 C_{a+b-1}^{a-1},故

$$P(A_k) = \frac{a}{a+b}.$$

两种解法所得结果相同,都与 k 无关.这证明抽签是公平的:如果 $a+b$ 个人将有 a 个人中签,那么,无论是先抽还是后抽,即无论 $k=1,2,\cdots,a+b$,每个人中签的概率均为$\frac{a}{a+b}$,与抽签次序无关.

例 5 一批产品有 N 件,其中有 M 件次品,现从中随机地抽取 n 件产品 $n \leqslant N, M < N$.求恰好取到 k 件次品的概率$(k=1,2,\cdots,l, l=\min\{n,M\})$

解 试验是从 N 件产品中随机地抽取 n 件,共有 C_N^n 种不同的取法,即样本点总数为 C_N^n.设 $A=\{$恰好取到 k 件次品$\}$,则 A 所含样本点数为 $C_M^k C_{N-M}^{n-k}$.故

$$P(A) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

上述公式是产品计件抽样检查常用的公式之一.

三、几何概率

我们继续考察样本点的出现有等可能性的随机试验,但不是如古典概型那样局限于有限多个样本点的情形.有时,虽然试验的可能结果是无限多的,但由试验的任意性或对称性,各样本点出现的机会仍然相等,只是这时不能简单地通过样本点的计数来计算概率.

假定在盛有 1 升水的容器中有一个任意游动的细菌.现从容器中任取出 10 毫升的水样,由于细菌运动与取水的任意性,10 毫升水样中含有这个细菌的概率应为 1%,即等于水样的体积与水的总体积之比.

像这样的例子还有很多,它们的共同特点是通过空间集合的几何度量(称为测度、指体积、面积、长度等)来计算概率.

定义 4 如果试验的可能结果可以几何地表示为某区域 Ω 中的一个点(Ω 可以是一维的,二维的,三维的,……),并且点落在 Ω 中某区域 A 的概率与 A 的测度(长度、面积、体积等)成正比,而与 A 的位置和形状无关,则点落在区域 A 的概率为

$$P(A) = \frac{A\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}} = \frac{mA}{m\Omega}.$$

称上述定义中的概率为几何概率.

例 6 在线段$[0,3]$上任投一点，求此点坐标小于 1 的概率.

解 当且仅当点落在区间$[0,1]$内时，此点的坐标小于 1. 故由几何概率的定义立即可得所求概率：

$$p=\frac{m[0,1)}{m[0,3]}=\frac{1}{3}.$$

例 7 两人相约于早晨 8 时至 9 时之间在某地会面，并约定先到者等候另一人 30 分钟后就可离开. 求两人能见面的概率.

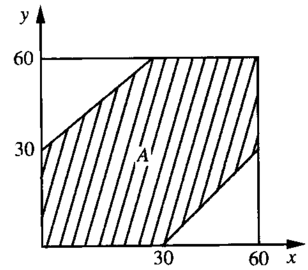

图 1-7

解 设 x,y 分别表示两人到达某地的时刻(单位：分)，由于两人在 8 时到 9 时之间到达是随机的，故 x,y 都等可能地在$[0,60]$上取值，点(x,y)就是平面区域 $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 60,0\leqslant y\leqslant 60\}$ 上等可能的随机点. 设 $A=\{$两人能够会面$\}$，依题意，事件 A 发生的充要条件是 $|x-y|\leqslant 30$，即随机点落在区域

$$A=\{(x,y)\mid |x-y|\leqslant 30\}$$

上，如图 1-7 所示. 故

$$P(A)=\frac{mA}{m\Omega}=\frac{60^2-(60-30)^2}{60^2}=\frac{3}{4}.$$

四、概率的公理化定义

前面分别介绍了统计概率、古典概率及几何概率的定义，它们在解决各自相适应的实际问题中，都起着很重要的作用. 但它们都有一定局限性. 古典定义要求试验的样本空间是有限集且每个样本点在一次试验中出现的可能性相等，几何概率虽然把样本空间扩展到无限集，但仍保留样本点的等可能性要求. 许多问题常常不满足这种要求. 统计概率虽然没有这种局限性，但它的定义建立在大量试验的基础上，有时难以实现. 即使能进行大量试验，由于频率具有波动性，它在什么意义下趋近于概率等都没有确切的说明. 因此，统计定义在数学上是不严密的. 这些不足不仅妨碍概率论自身的发展，也使概率论作为数学分支的科学性受到怀疑. 1933 年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)在综合前人成果的基础上，提出了概率的公理化定义，使概率论成为严谨的数学分支，对概率论的迅速发展起到了积极作用. 简述如下.

定义 5 设随机试验 E 的样本空间为 Ω. 若对于 E 的每一个事件 A，都有一单值实值集合函数 $P(A)$ 与之对应，并且 $P(A)$ 满足下列三条公理，则称$P(A)$为随机事件 A 的概率.

公理 1 非负性：对于任一事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

公理 2 规范性：$P(\Omega)=1$；

公理 3 可列可加性：对于两两互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

由概率的公理化定义可推导出概率的一些重要性质.

性质 1 $P(\varnothing) = 0$

证明 因为 $\Omega = \Omega + \varnothing + \varnothing + \cdots$,由公理 2 知

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots$$

所以,$P(\varnothing) = 0$.

性质 2 概率具有有限可加性,即若 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 两两互不相容,则

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

证明 因为

$$\sum^{n} A_i = A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \varnothing + \varnothing + \cdots$$

故由公理 3 及性质 1 得

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

性质 3 对任意 A,有

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

证明 因为 $A + \overline{A} = \Omega, A\overline{A} = \varnothing$,

所以 $1 = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$.

故 $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

性质 4 若 $A \supset B$,则

$$P(A - B) = P(A) - P(B).$$

证明 因为当 $A \supset B$ 时有

$$A = B \cup (A - B) \quad , \quad B \cap (A - B) = \varnothing.$$

故由有限可加性知

$$P(A) = P(B) + P(A - B),$$

即 $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

显然,若 $A \supset B$,则 $P(A) \geqslant P(B)$.

一般地,对任一事件 A, B,有

$$P(A - B) = P(A) - P(AB).$$

此公式称为概率的减法公式.

性质 5 设 A, B 是任意二事件,则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

这个公式为概率的加法公式.