高等院校“十一五”规划教材·公共基础类

大学物理

王存莲 刘玉富 / 主编

冶金工业出版社
www.cnmip.com.cn

高等院校“十一五”规划教材·公共基础类

大学物理

主　编　王存莲　刘玉富
副主编　张玉英　杨光晔
　　　　赵　春　苏新武

北　京
冶金工业出版社
2009

内 容 简 介

本书是大学物理的基础教学用书，主要包括力学、热学、电磁学、波动理论和波动光学、近代物理5篇共14章的内容。

本书作为非物理专业的大学物理教材，在适度的基础知识与鲜明的结构体系覆盖下，注意了各部分知识的有机联系，重点突出，难度适中。考虑到应用型院校的特点和实际情况，对例题习题做了精选，在保证必要的基本训练的基础上，适当降低其难度，努力拓宽知识面，尽量反映新科技发展概况，是教学改革的一次尝试。

本书适合作为高等院校理工科非物理专业大学物理课程的教材，也可作为高校人文类专业的物理课程教材或参考书，亦可作为高校自学考试或函授教材。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理/王存莲，刘玉富主编. —北京：冶金工业出版社，2009.8

ISBN 978-7-5024-5065-6

Ⅰ. 大…　Ⅱ. ①王…②刘…　Ⅲ. 物理学—高等学校—教材　Ⅳ. O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第140103号

出 版 人　曹胜利

地　　址　北京北河沿大街嵩祝院北巷39号，邮编100009

电　　话　(010)64027926　电子信箱　postmaster@cnmip.com.cn

责任编辑　刘　源

ISBN 978-7-5024-5065-6

北京天正元印务有限公司印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销

2009年8月第1版，2009年8月第1次印刷

787mm×1092mm　1/16；20.5印张；485千字；319页；1-3000册

36.00元

（本书如有印装质量问题，本社发行部负责退换）

前　言

本书内容符合国家教育部关于“高等教育要面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的基本要求，是编者总结多年的教学实践经验，参照原国家教委颁发的《高等学校工科本科物理课程教学基本要求》，为高等工科院校各专业编写的大学物理课程教材。本书包括质点运动学、质点动力学、刚体绕定轴转动、气体动理论、热力学基础、静电场、静电场中的导体和电介质、电流的磁场、电磁感应、振动、波动、波动光学、狭义相对论基础、量子物理等 14 章内容，主要介绍一些常用的物理学的基本知识和实际应用。

本书在编写过程中力求突出以下几个方面的特点：

(1) 将一些实际应用有机地渗透到物理规律的学习中，将实用性和适用性体现在教材中的实例、例题和习题中，并突出新。

(2) 选择的语言力求通俗易懂，精炼准确，术语的引入节奏合理，不让读者产生晦涩难懂的感觉。

(3) 每章前提出 1～3 个与本章知识点相关的典型问题作为引入，以启发思考，激发兴趣。内容叙述中体现对这些问题的解决思路。

(4) 章节中第一次涉及的重要概念和定律等，后面括号附英文表达。

(5) 本书还对部分教学内容做了适当调整：删去恒定电流的欧姆定律和直流电路，把电动势的概念放在电磁感应一章；删去磁介质一章，将有关磁介质的基本概念放在电流的磁场一章；振动和波动内容放在波动光学之前讲，使相位概念得到很好的衔接；狭义相对论内容放在了近代物理一篇中，这样更符合物理学发展的时间顺序，突出了相对论和量子力学在近代物理中的两大理论支柱作用。

本书是面向高等院校理工科非物理专业或高校人文类专业的，建议授课时数为 80～100。不同专业在使用时，可根据自身的特点和需要加以取舍。

本书由王存莲、刘玉富任主编，张玉英、杨光晔、赵春、苏新武任副主编，柴常、孙建新、孙丽莉参加编写。

在本书的编写过程中，参考和借鉴了一些国内外的同类优秀教材，使本书编者受益匪浅，在此一并表示诚挚的谢意。

由于编者水平所限，书中如有不足之处敬请使用本书的师生与读者批评指正，以便修订时改进。如读者在使用本书的过程中有其他意见或建议，恳请向编者(bjzhangxf@126.com)踊跃提出宝贵意见。

编　者

目　　录

第Ⅰ篇　力　　学

力学(mechanics)是物理学的一个分支，物理学的建立就是从力学开始的。以牛顿定律为基础的经典力学是整个物理学的理论基础，经典力学的创立对其他学科的发展影响深远。近代物理中的相对论力学和量子力学的形成都受到经典力学的影响，它们的许多概念和思想都是经典力学概念和思想的发展与改造。不仅如此，经典力学的基础研究不断深化和丰富了人类对基本自然规律的认识，不断为其他学科的发展提供认识工具。目前，经典力学的物理内容仍在深化，经典力学在与其他学科的前沿交叉处迅速发展，形成了多种新的力学分支学科。

经典力学不仅具有很强的基础性，同时又具有广泛的应用性。在一般的工程技术领域，如机械工程、土建与水利工程、爆炸工程、抗震工程、航空与航天技术以及航海技术等，经典力学仍保持着充沛的活力，它的实用性也是学习经典力学的一个重要原因。

力学的研究对象是物体的机械运动。经典力学研究的是弱引力场中宏观物体的低速运动。通常把经典力学分为运动学和动力学。运动学只研究物体运动的规律，不涉及运动状态变化的原因。动力学则研究物体间的相互作用及其对物体运动的影响。

本书经典力学的内容包括质点运动学、质点动力学和刚体力学 3 部分。

第 1 章　质点运动学

质点运动学(particle kinematics)的任务是描述作机械运动的物体在空间的位置随时间变化的关系，而不涉及运动变化的原因。

本章首先定义描述质点运动的物理量，如位置矢量、位移、速度和加速度等，并进而讨论这些量随时间变化的关系。然后讨论曲线运动中的法向加速度和切向加速度以及圆周运动的角量描述。最后将介绍相对运动以及相对运动中的速度相加定理。

位移、速度和加速度是运动学中的重要物理量，它们都具有相对性、瞬时性和矢量性，只有掌握了这些特性，才能正确理解这些物理量的意义，从而掌握物体运动的基本规律。

问题引入:

(1) 一个质点，如果它在一条直线上运动，只要用一条数轴即可描述其运动。如果它在一个平面内运动，且加速度只固定在一个方向上，一般可以建立平面直角坐标系来研究它，并把坐标系的一条轴放在加速度方向上，如平抛运动。当物体的加速度的大小和方向时刻都在变化时，如圆周运动，你会采用什么样的坐标系来研究它呢？

(2) 木星的一个卫星——木卫 1 上面的珞玑火山喷发出的岩块上升高度可达 200km，那么这些石块的喷出速度是多大呢？已知木卫 1 上的重力加速度是 1.80m/s^2，而且在木卫 1 上没有空气。

1.1 质点运动及其描述

宇宙中的任何物体都处于永恒的运动中，绝对静止的物体是不存在的。运动是绝对的，静止是相对的，但运动的描述却是相对的。为描述一个物体的运动而选择的参考标准叫做**参考系(reference frame)**。参考系选定后，要想定量地描述物体的位置及其随时间的变化，就必须在参考系上建立适当的**坐标系(coordinate system)**。在力学中常用的是直角坐标系，根据需要，也可以选用极坐标系、自然坐标系和球坐标系等。一般把坐标系的原点和轴固定在参考系上，运动物体的位置就由它在坐标系中的坐标值决定。这样，物体相对坐标系的运动也就是相对于参考系的运动。当参考系选定后，物体运动的性质、轨道形状等也就确定了，且不会因为坐标系的选择不同而有所不同。坐标系选择得当，可以使计算简化。

任何物体均有形状及大小，但在有些问题中，物体的形状及大小对问题的讨论影响不大，可以忽略。这时便可将物体抽象成为一个只有质量而无形状大小的几何点，这样的点称为**质点(particle)**。由两个或两个以上质点所组成的系统称为**质点系(system of particle)**。

质点是一个理想化的模型，它体现了物理学中化繁为简、突出问题的主要方面的研究方法，在实践上和理论上都是有重要意义的。当我们所研究的物体不能被看作质点时，可把整个物体看成由许多质点组成，弄清楚这些质点的运动，就可以弄清楚整个物体的运动。因此，研究质点的运动是研究物体运动的基础。

1.1.1 位置矢量

在坐标系中，质点的位置常用位置矢量表示，简称位矢(position vector)。位矢是从原点指向质点所在位置的有向线段，用矢量$\boldsymbol{r}$表示。如图 1-1 所示，位矢$\boldsymbol{r}$在直角坐标系$Oxyz$的 3 个坐标轴上的投影分别为x、y、z。所以，质点P在直角坐标系$Oxyz$中的位置，既可以用位矢$\boldsymbol{r}$来表示，也可以用坐标x、y、z来表示。引入沿着x、y、z 3 轴正方向的单位矢量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$后，那么位矢$\boldsymbol{r}$在直角坐标系$Oxyz$中可以表示为

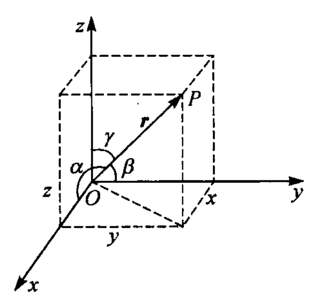

图 1-1 位置矢量

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

位矢$\boldsymbol{r}$的大小为

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

位矢$\boldsymbol{r}$的方向余弦由下式确定

$$\cos\alpha = \frac{x}{r};\ \cos\beta = \frac{y}{r};\ \cos\gamma = \frac{z}{r} \tag{1-2}$$

式(1-2)中α、β、γ分别是$\boldsymbol{r}$与Ox、Oy轴和Oz轴之间的夹角。

1.1.2 运动方程

当质点运动时，它相对坐标原点O的位矢$\boldsymbol{r}$是随时间而变化的，所以，$\boldsymbol{r}$是时间的函数，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-3}$$

式(1-3)称为质点的运动方程。而

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \tag{1-4}$$

称为运动方程的分量式，从中消去时间t便得到了质点的**轨迹方程(locus equation)**。如果轨迹是直线，就叫做**直线运动(linear motion)**；如果轨迹是曲线，就叫做**曲线运动(curvilinear motion)**。如自由落体作的是直线运动，它的运动方程可写作$x=\dfrac{1}{2}gt^2$，式中x的单位为米(m)，t的单位为秒(s)，$g=9.8\mathrm{m\cdot s^{-2}}$。知道了运动方程，就能确定任一时刻质点的位置，从而可以确定质点的运动。运动学的重要任务之一，就是找出各种具体运动所遵循的运动方程。

1.1.3 位移

设质点沿轨迹PQ作一般曲线运动，时刻t质点位于A，位矢为$\boldsymbol{r}(t)$；时刻$t+\Delta t$，质点位于B，位矢为$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$，如图 1-2 所示。在时间$\Delta t$内质点位置的变化可用由$A$向$B$所作的矢量$\Delta\boldsymbol{r}$来表示，$\Delta\boldsymbol{r}$的大小等于$A$点与$B$点之间的直线距离，方向由起点$A$指向终点$B$，矢量$\Delta\boldsymbol{r}$称为质点在时间$\Delta t$内的位移(displacement)。

由图 1-2 可知

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t) \tag{1-5}$$

即质点在某一时间内位矢的增量。

在直角坐标系中，如图 1-3 所示，设质点沿轨迹LM作一般曲线运动，时刻t，质点位于P，位矢为$\boldsymbol{r}_1$，时刻$(t+\Delta t)$，位于Q，位矢为$\boldsymbol{r}_2$，时间Δt内位移为$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$，由式(1-3)可知

$$\boldsymbol{r}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_2=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$$

时间Δt内质点的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k} \tag{1-6}$$

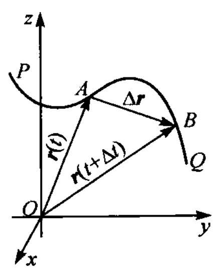

图 1-2 位移图一

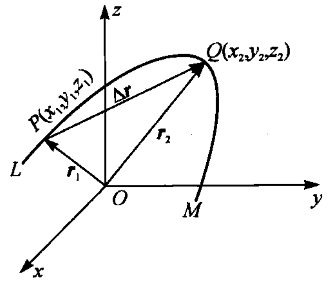

图 1-3 位移图二

令Δx、Δy、Δz分别表示$\Delta \boldsymbol{r}$沿坐标轴x、y、z的投影，则有

$$\Delta \boldsymbol{r} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}$$

显然

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$\Delta z = z_2 - z_1$$

位移和位矢不同，位矢确定某一时刻质点的位置，位移则表示某一段时间始末质点位置的变化。位移只反映出一段时间始末质点位置的变化，它不涉及质点位置变化过程的细节。如图 1-2 所示，位移$\Delta \boldsymbol{r}$的大小虽然等于由A到B的直线距离，但这并不意味着质点是从A沿直线AB移动到B的。时间Δt内质点从A沿轨迹曲线$\overset{\frown}{AB}$移动到B点所经历路径的长度，即弧线$\overset{\frown}{AB}$的长度，称为质点在该段时间内的路程。路程是算术量。一般情况下，某段有限时间内质点位移的大小不等于这段时间内质点所经过的路程。对于相对静止的不同坐标系来说，位矢依赖于坐标系的选取，而位移则与坐标系的选取无关。

还要指出的是，位移$\Delta \boldsymbol{r}$的大小$|\Delta \boldsymbol{r}|$与位矢大小的增量一般是不相等的。设时间Δt内位矢大小的增量为Δr，则$\Delta r = |\boldsymbol{r}(t+\Delta t)| - |\boldsymbol{r}(t)|$。例如，一质点以半径$R$作匀速圆周运动，以圆心为原点，半个周期内质点位移的大小$|\Delta \boldsymbol{r}| = 2R$，位矢大小的增量为$\Delta r = R - R = 0$。

1.1.4 速度

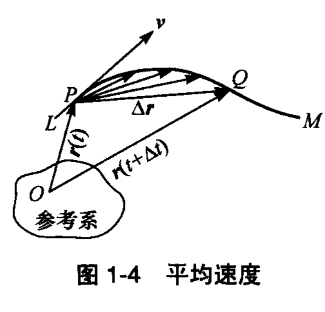

图 1-4 平均速度

设质点沿轨迹LM按运动学方程$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$作一般曲线运动，时间$\Delta t$内质点的位移为$\Delta \boldsymbol{r}$，如图 1-4 所示。质点的位移$\Delta \boldsymbol{r}$与发生这个位移所经历的时间$\Delta t$之比，称为这一段时间内质点的平均速度，用$\overline{\boldsymbol{v}}$表示，即

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-7}$$

平均速度是矢量，其方向与位移$\Delta \boldsymbol{r}$的方向相同。它表示在时间Δt内$\boldsymbol{r}(t)$随时间的平均变化率。

平均速度只能对时间 Δt 内质点位置随时间变化的情况作一粗略地描述。

为了精确地描述质点的运动快慢和方向，可将时间 Δt 无限减小，并使之趋近于零，即 $\Delta t \to 0$，这样，质点的平均速度就会趋向于一个确定的极限矢量，这个极限矢量称为 t 时刻的**瞬时速度(instantaneous velocity)**，简称**速度(velocity)**，用 $\boldsymbol{v}$ 表示，即

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{\boldsymbol{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-8}$$

即速度等于位矢对时间的一阶导数。

速度是矢量，其大小反映了 t 时刻质点运动的快慢，其方向就是 t 时刻质点运动的方向。

从速度的定义式(1-7)可知，t 时刻质点速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向就是当 $\Delta t \to 0$ 时平均速度 $\overline{\boldsymbol{v}}$ 的极限方向。由图 1-3 可以看出，当 $\Delta t \to 0$ 时，Q 点将趋近于 P 点，$\boldsymbol{v}$ 将变得和轨迹上 P 点处的切线重合并指向运动一方，故 t 时刻质点速度的方向，沿着该时刻质点所在位置 P 点轨迹的切线，并指向质点运动的一方。质点在作曲线运动时，速度沿轨迹的切线方向，如转动雨伞，水滴将沿切线方向离开雨伞等。

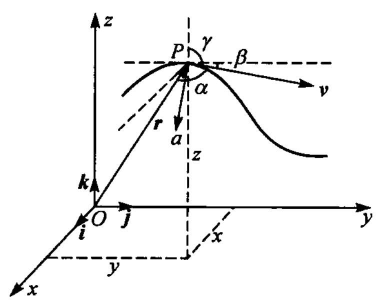

图 1-5　速度

速度的大小 $|\boldsymbol{v}| = \left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$ 常称**速率(speed)**，速率是标量，恒取正值。

在直角坐标系中，设时刻 t，质点在 P 点，位矢为 $\boldsymbol{r}$，速度为 $\boldsymbol{v}$，如图 1-5 所示。由于 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，根据速度的定义，有

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$$

$$= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

用 v_x、v_y、v_z 分别表示速度 $\boldsymbol{v}$ 沿坐标轴 x、y、z 的投影，则有

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \tag{1-9}$$

显然

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

即速度沿直角坐标系中某一坐标轴的投影，等于质点对应该轴的坐标对时间的一阶导数。

速度的大小和方向可表示为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{v};\quad \cos\beta=\frac{v_y}{v};\quad \cos\gamma=\frac{v_z}{v}$$

式中　α、β、γ——分别表示速度$\boldsymbol{v}$与x、y、z 3个坐标轴的夹角。

如果已知用直角坐标系表示的质点运动学方程$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，就可以通过求导得出质点在任意时刻$t$速度的大小和方向。

【例 1-1】 设质点的运动方程为$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}$，其中$x(t)=(1\text{m}\cdot\text{s}^{-1})t+2\text{m}$，$y(t)=(\frac{1}{4}\text{m}\cdot\text{s}^{-2})t^2+2\text{m}$。

(1) 求$t_1=2\text{s}$及$t_2=4\text{s}$的位置矢量。

(2) 从2s末到4s末质点的位移。

(3) 求$t=3\text{s}$时的速度。

(4) 作出质点的运动轨迹图。

解：(1) 将$t_1=2\text{s}$及$t_2=4\text{s}$分别代入运动方程，得这两个时刻的位置矢量分别为

$$\boldsymbol{r}_1(t)=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}_2(t)=6\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}$$

(2) 从2s末到4s末质点的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2(t)-\boldsymbol{r}_1(t)=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$$

(3) 由题意可得速度分量分别为

$$v_x=\frac{\text{d}x}{\text{d}t}=1\text{m}\cdot\text{s}^{-1},\ v_y=\left(\frac{1}{2}\text{m}\cdot\text{s}^{-2}\right)t$$

故$t=3\text{s}$时的速度分量为$v_x=1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，$v_y=1.5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$。于是$t=3\text{s}$时，质点的速度为$\boldsymbol{v}=(1\text{m}\cdot\text{s}^{-1})\boldsymbol{i}+(1.5\text{m}\cdot\text{s}^{-1})\boldsymbol{j}$。

速度的值为$v=1.8\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，速度$\boldsymbol{v}$与$x$轴之间的夹角为

$$\theta=\arctan\frac{1.5}{1}=56.3°$$

(4) 由已知运动方程$x=(1\text{m}\cdot\text{s}^{-1})t+2\text{m}$，$y=(\frac{1}{4}\text{m}\cdot\text{s}^{-2})t^2+2\text{m}$，消去$t$得轨迹方程$y=(\frac{1}{4})x^2-x+3\text{m}$并可作如图 1-6 所示的质点运动轨迹图。

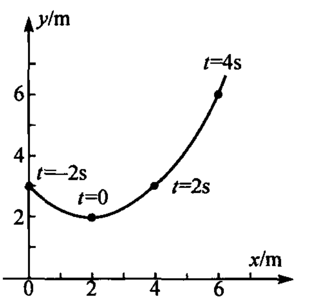

图 1-6　例 1-1 图

1.1.5　加速度

质点运动时，它的速度大小和方向都可能随时间变化，加速度就是描述速度变化情况的物理量。

设质点沿轨迹 LM 作一般曲线运动。时刻 t 质点位于 P，速度为 $\boldsymbol{v}(t)$；时刻 $(t+\Delta t)$，质点位于 Q，速度为 $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$，如图 1-7 所示。用 $\Delta\boldsymbol{v}$ 表示时间 Δt 内质点速度的增量，有

$$\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t) \tag{1-10}$$

速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}(t)$、$\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$ 之间的关系如图 1-8 所示。质点速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 与其所经历的时间 Δt 之比，称为这一段时间内质点的平均加速度，用 $\overline{\boldsymbol{a}}$ 表示，即

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1-11}$$

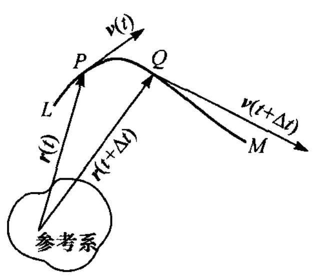

图 1-7 速度变化

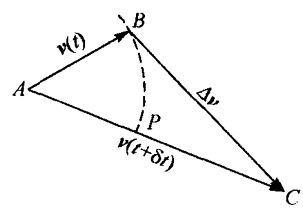

图 1-8 速度增量

平均加速度只能对质点速度随时间变化的情况作一粗略的描述。

为了精确地描述质点速度的变化情况，可将时间 Δt 无限减小，并使之趋近于零，即 $\Delta t\to 0$，这样，质点的平均加速度就会趋向于一个确定的极限矢量，这个极限矢量称为 t 时刻的**瞬时加速度(instantaneous acceleration)**，简称**加速度(acceleration)**，用 $\boldsymbol{a}$ 表示，即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\overline{\boldsymbol{a}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1-12}$$

考虑到 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，加速度还可以表示为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-13}$$

即加速度等于速度对时间的一阶导数，或位矢对时间的二阶导数。只要知道了 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$ 或 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，就可以通过求导或二次求导得到质点的加速度表达式。

加速度是矢量，其方向就是当 $\Delta t\to 0$ 时平均加速度 $\overline{\boldsymbol{a}}$ 的极限方向。质点作曲线运动时，加速度的方向总是指向轨迹曲线凹的一面，与同一时刻速度的方向一般是不同的。式(1-12)、(1-13)是加速度的一般表达式。

在直角坐标系中，根据加速度的定义，可得

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$$

用a_x、a_y、a_z分别表示加速度$\boldsymbol{a}$沿坐标轴x、y、z的投影，则有

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

显然

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$
$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$
$$a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

即加速度沿直角坐标系中某一坐标轴的投影，等于速度沿同一坐标轴的投影对时间的一阶导数，或等于质点对应该轴的坐标对时间的二阶导数。

加速度的大小和方向可分别表示为

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}|&=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}\end{aligned}$$

$$\cos\alpha'=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|};\quad \cos\beta'=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|};\quad \cos\gamma'=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$$

式中　α'、β'、γ'——分别表示加速度$\boldsymbol{a}$与x、y、z 3个坐标轴的夹角。

1.2　运动学中的两类基本问题

1.2.1　求导类型

求导类型为第一类基本问题，它是已知质点的运动方程(常可由已知条件及几何关系得到)，求任意时刻的速度和加速度。这类问题原则上可以应用速度和加速度定义式通过求导运算求解。

【例 1-2】 在离水面高h的岸上，有人用绳拉船靠岸，如图 1-9 所示。设人以匀速率v_0收绳，试求：当船距岸边x_0时，船的速度和加速度的大小各是多少？

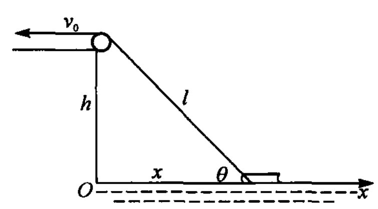

图 1-9　例 1-2 图

解： 建立坐标系如图 1-9 所示。设任意时刻绳长为l，船处于x位置。船在运动过程中，l和x均是t的函数，由题意可知

$$v_0=-\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

显然有关系式

$$l^2=x^2+h^2$$

上式两边对时间 t 求导，得

$$2l\frac{dl}{dt}=2x\frac{dx}{dt}$$

则船运动的速度大小为

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{l}{x}\frac{dl}{dt}=-\frac{l}{x}v_0$$

对速度求导即可以得到船运动的加速度大小为

$$a=\frac{dv}{dt}=-\frac{v_0}{x^2}\left(x\frac{dl}{dt}-l\frac{dx}{dt}\right)$$

代入 x_0，即得船在该处的速度和加速度分别为

$$v=-\frac{\sqrt{x_0^2+h^2}}{x_0}v_0\text{；}\quad a=-\frac{v_0^2h^2}{x_0^3}$$

【例 1-3】 如图 1-10 所示，在倾角为 θ 的山坡平面上有一门大炮，大炮相对于山坡的仰角为 α，发射炮弹的初速度为 v_0，求炮弹着地的位置，并求最大射程时的仰角 α，忽略空气阻力。

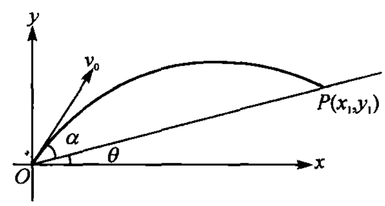

图 1-10　例 1-3 图

解：如图 1-10 所示，取直角坐标系 xOy，大炮位于坐标原点 O 处，设 $t=0$ 时刻发射炮弹，依题意

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=0 \tag{1}$$

$$a_y=\frac{dv_y}{dt}=-g \tag{2}$$

根据初始条件 $t=0$ 时，$x_0=0$，$y_0=0$，且

$$v_{0x}=v_0\cos(\theta+\alpha) \tag{3}$$

$$v_{0y}=v_0\sin(\theta+\alpha) \tag{4}$$

对式(1)、(2)积分，并利用式(3)、(4)，有

$$v_x=v_{0x}=v_0\cos(\theta+\alpha)$$

$$v_y=v_{y0}-gt=v_0\sin(\theta+\alpha)-gt$$