

理論物理
學導論

力學概論

乙酉學社叢書第一集

力學概論

(理論物理學導論卷一)

INTRODUCTION TO THEORETICAL PHYSICS

VOL. I

GENERAL MECHANICS

原著者：MAX PLANCK

諾貝爾獎金獲獎人，英國皇家學會國外會員，柏林大學理論物理學教授，Kaiser Wilhelm 研究院主任

譯述者：陸學善

英國 Manchester 大學物理學博士

中華書局印行

◎
定 價 八 元

(郵 遞 匯 費 另 加)

Max Planck

陸 學 善

李 虞 杰
中華書局股份有限公司代表

上海澳門路八九號
中華書局永寧印刷廠

各埠中華書局

乙酉學社叢書第一集

緣 起

民國三十有四年之初，抗日戰事猶酣，曙光未露，殊深風雨如晦之感。本社同人蟄處滬濱，幽憂隱憤，共相策勵，亟思藉輶潛之光陰，從事於嚴正科學之述作，爲將來復興作育人才之準備上略效涓埃之助，而苦於經濟拮据，徒有心餘力絀之憾。

適袁良、黃伯樵兩先生見告：實業家章榮初先生疎財好義，擬於否塞之會作有意義之舉，問其道於兩先生；兩先生固夙稔同人之志事者，遂爲之介。一席傾譚，章氏毅然任編輯上經濟之責；並相與約定同人個人暨章氏均拋棄版稅，期減輕成書售價，以利讀者。

於是邀集同人，詳加商討。僉認爲國內文化界中最感貧乏者，莫過於大學所需嚴正科學之教本；補苴之道則莫善於選譯國外名著。蓋泰西名家著述既正確可靠，且由經驗所積，深合講授之用；況當前需要至亟，尤須爭取時間，爲求剋期觀成，則譯述尙焉。爰商定叢書第一集應採之原本及分任譯述之人選如次：

R. Courant: Differential-und Integral-rechnung 朱言鈞

L. Bieberbach: Theorie der Differentialgleichungen 沈 潛

Grimsehl-Thomaschek: Lehrbuch der Physik:

Mechanik 裘維裕

Wärmelehre-Akustik 許國保

Elektromagnetisches Feld 史鍾奇

Optik 葉蘊理

Atomphysik 王福山

M. Planck: Vorlesungen der theoretische Physik:

Allgemeine Mechanik

Mechanik deformierbarer Körper }

陸學善

Abraham-Becker: Theorie der Elektrizität: Band I: Ein-

führung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität 楊肇燭

Hildebrand: Principles of Chemistry 曹惠羣

Latimer-Hildebrand: Reference Book of

Inorganic Chemistry 曹惠羣

以上各書均期以一年告竣。又爲編撰程式之規劃及名詞之統一，推定下走爲總編輯。遂於是年二月初開始工作。當時承中國科學社惠借房屋一間爲編輯室。每星期六日同人集會一次，互作各方面之商榷。並延趙學士孟養襄理編校及其他事務；後趙君他就，改由許學士繼之。兩君皆踴躍將事，爲助良多。

一年之中，同人昕夕從事，雖環境艱危，生活窘迫，仍莫不精神煥發，視爲樂事，故均獲完成。嗣中華書局鑒於本集叢書之重要，雖丁此經濟萬分艱苦之時期，慨然擔任出版，本集叢書乃得問世。

茲值付梓，爰誌其涯略，俾讀者知本集之獲藏事，實由於章榮初氏崇學之熱忱，與夫袁、黃兩先生之多方贊助，同人均深緬佩；而方子衡先生以其餘暇，不吝協力，並此申謝。

所望海內學者，對於本集惠予指正，俾於再版時得減少瑕疵，同人不敢不拜嘉；會當勉竭庸愚，繼爲第二集之譯述，請以本集爲其息壤云爾。

中華民國三十六年一月三十一日 楊肇燭

原 序

年來力學書籍之見於出版界者，何啻汗牛充棟，就中且不乏佳構，欲圖於此更有所增益，是必有說：著者執教有年，觀察所及，深感初習理論物理學者所遭遇之困難，並非數學之難而為領略觀念之物理的涵義；最感棘手者，非方程式之計算，而為方程式之創立，尤其為方程式之解釋。本卷之主要目的，即欲於此諸端能對學者有所貢獻。讀者於數學知識當具相當基礎，如解析幾何與微積學必先明其大要。敘述時著者並不以力學體系為已知之知識，乃導讀者循序漸進，用明其演進之跡象，此自非一般傳統科學文獻所泥定之方向，故每於具有決定性之轉捩點，時時加以指示或警惕，如是則凡具獨立思想之學者或能領略初入一新科學領域中所特有之樂趣。

余確信一準確科學之歷史，以發展之邏輯言，並不自其體系有甚大之偏離，凡與余有同感者當首肯於題材處理之先後，必循該科學實際產生之同一路跡。然此僅就全體立論言，至於外來影響，外界之環境（特別是由先進者之執拗個性所造成者），足引導吾人向迂迴或謬誤之途徑，欲再循故道，自非必需，且或有害。余於闡發定理時所採用之證明，並非常為最簡捷及最佳者，而為余所認為最富啟發性或最曉暢者。蓋着筆時注力所在，並不在某定理之實際如何發見，或往後之如何可以最直接方法證明，而在當時之如何得以最簡捷方法求得之，所不能不承認者，即於此尚有游移餘地，可因各人之觀點而異。

顧名思義本書實係初步性質，自不欲對任何題材為周詳之論述。讀者欲求深造，可參考更詳盡之力學教本及專門著作，有時定理之已見於前者亦不憚重複，每遇適當機會，更以新穎方法證明之，蓋欲明瞭一問題之真實特性及所用以解答此問題之各種方法之不同性能，則除將某特定問題以各種不同方法處理外，實無他道也。

Max Planck.

Berlin--Grunewald,

1916年8月.

再 版 序

因再版之付梓，余得以對本書爲若干必要之校正，且插入幾許新增之材料。在新增材料中須特別提出一說者，爲 Hamilton 及 Jacobi 偏微分方程式之引用，近來在量子論中極形重要者也。藉此機會，余對諸同仁之指正及興趣，特殊表感戴之忱。

Max Planck.

Berlin - Grunewald,

1919年12月。

第 四 版 序

此新版中本書之特質一仍其舊。在求每一定律時，余所沿用之方法，仍非形式上最簡之方法，而為與物理概念相隨最密之方法，或為去發明當時所用者為最近之方法。蓋公式之緊湊或簡潔，常使所述關係之外表較實際為尤簡，真正之困難，乃移入定義中。據著者所見，某種知識之誘導，最要者，其終極定義不當如已知結果之置諸開端，而必須於討論特定問題之過程中，由用途及需要，漸見其真義。

新版中略有改進處，所須提出一說者：余已用近時習用之符號 L 代表 Lagrange 函數（動勢），以代 Helmholtz 所用之 H ， H 當留為 Hamilton 函數之用。至以動能言，則余殊不欲用近時習用之字母 T ，前者曾依照 Boltzmann 以 L （活動）代表之。蓋 T 當留為溫度之用，溫度與動能常相連繫，於統計熱力學中可見之，今用 K 字代表動能，則意義一見自明，可免混淆不清之弊。

Max Planck.

Berlin—Grunewald,

1928年3月。

發 凡

0.0.1 力學⁽¹⁾者，研究物體運動⁽²⁾之定律也。凡位置⁽³⁾之依時變遷謂之“動”，此概念不僅包括時間⁽⁴⁾與空間⁽⁵⁾，且及於動體。動體初未限於物體，如水面波峯之推動，則與水中質點本身之運動，大相逕庭；或如陰影之移動，或如磁場⁽⁶⁾中力線⁽⁷⁾之運動，凡此種種，動體本身皆非物質而為一種吾人意念所注之某種“態⁽⁸⁾”。物體運動，吾人特名之曰“微粒運動⁽⁹⁾”以示區別。力學所討論之運動，係專指微粒運動而言。然微粒運動同時亦可為波動⁽¹⁰⁾，如前述之水波即其一例。所謂“自然”之機械觀⁽¹¹⁾，即信一切物理變遷，其終極皆為微粒運動。此觀念之正確與否，固非吾人目下所欲言者。

0.0.2 最簡單之物體為一質點⁽¹²⁾。所謂質點者，乃指其大小較運動中其他一切之大小為渺乎其小者。故某物體是否可視為一質點之問題，當全視所討論中運動之性質而定。如地球環繞日球之運動，地球可視為一質點，而於自轉則否。凡物體依其體內一軸而轉動，吾人皆不得視此物體為一質點矣。

質點與幾何點⁽¹³⁾宜嚴為釐別。幾何點係單指其所處之位置而言，質點則兼及於物質之組織，讀者開宗明義，當知質點間非惟有量之別，亦且有質之別。物質之量初不易得一普遍之量度；如鐵與鉛，乃不同之二物，若無一特殊之通性為其基準，則量之比較，殊屬難能。

凡物體皆得視為由多數小部分所組成，此每一小部分皆得視為一質點。故一物體之任何運動，不論情形如何，錯縱複雜，吾人皆得追溯其源，以究其組成此物體諸質點之運動。本書分二篇，一為質點之力學，一為質點系之力學，茲先言一質點單純之性質。

(1)Mechanics. (2)Motion. (3)Position. (4)Time. (5)Space. (6)Magnetic field.

(7)Line of force. (8)State. (9)Corpuscular motion. (10)Wave motion.

(11)Mechanical view of nature. (12)Material point. (13)Geometrical point.

力 學 概 論

目 錄

緣起

發凡

第一篇 一質點之力學.....1—92

第一章 直線運動.....1

第二章 空間運動.....16

第三章 有心力 勢.....31

第四章 運動方程式之積分.....52

第五章 相對運動.....62

第六章 約束.....74

第二篇 質點系之力學.....93—195

第一章 剛體靜力學.....93

第二章 任意點系之靜力學.....114

第三章 任意點系之動力學.....144

第四章 剛體動力學.....170

附錄 歲寒譯書記

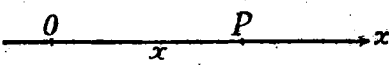
力學概論

第一篇 一質點之力學

第一章 直線運動

1.1.1. 茲先論一質點沿直線之運動，暫不究其致動之原。凡祇研究運動而不考其原因者，謂之運動學⁽¹⁾。動點之位置，隨時以變；如知其任何時間之位置（即如知其位置為時間之某函數⁽²⁾），則運動即行決定。設動點之位置由幾何點 P 標識之， P 點去 O 點之距離為 x ； O 點乃假設固定於空間之一點，即坐標系⁽³⁾之原點⁽⁴⁾（圖1.1.1）， x 為 P 點之橫標⁽⁵⁾，其正負視 P 點在 O 點之右或

左而定。故當 $x=0$ 時， P 與 O 疊合⁽⁶⁾：



P 點之運動途徑即 x 軸，或稱橫標軸。

圖 1.1.1

x 遞增之方向謂之軸向，在（圖1.1.1）中此由一箭頭表示之。欲以定數表示距離 x ，自必有一固定之長度單位，此長度單位例如厘米⁽⁷⁾；一厘米為 Paris 標準米尺長度百分之一，此標準米尺之長約當於地球子午線一象限之千萬分之一。故 x 之值即量度所得在 OP 長度內之厘米數。

既明如何可藉幾何點 P 以定位，同樣可知如何可藉時間之點以定時。所謂 t 時間者，即謂自假設固定一時點起所量得之時也。此時間之原點可用任何準確時計定之。 t 之正負視此時點在原點之後或前而定，在原點時， $t=0$ 。自前時至後時之方向為時軸之方向。時間之單位例為秒⁽⁸⁾，一秒等於平均太陽日86,400分之一。故所謂 t 時間即指 $t=0$ 時後之秒數。

(1) Kinematics. (2) Function. (3) Co-ordinate system. (4) Origin. (5) Abscissa.

(6) Coincide. (7) Centimetre. (8) Second.

決定質點運動之條件，須知其位置為時間之函數，如：

$$x = f(t) \dots \dots \dots (1.1.1)$$

f 須為實⁽¹⁾者、單值⁽²⁾者、連續⁽³⁾者、且為可取微商⁽⁴⁾者。蓋質點在運動中無論何時必有一定位置，非可突然超躍也。

解方程式 (1.1.1) 以求 t ，得

$$t = \phi(x).$$

此示質點在 x 位置之時間。函數 ϕ 不必定為實者，且不必定為單值者；蓋質點可永無抵達某定點 x 之時，或在週期運動⁽⁵⁾中，則質點經過某定點可非止一次。

1.1.2. 茲先舉一特殊之例以便解釋。設 $f(t)$ 為一次函數⁽⁶⁾，即：

$$x = at + b \dots \dots \dots (1.1.2)$$

a, b 為二常數。

b 之物理意義簡單易曉，此即示 $t = 0$ 時動點之所在。 a 之意義可以由下述之理明之。若 $x' = at' + b$ ，則在 $t' - t = \Delta t$ 時間內，動點之行程為 $x' - x$ ，即；

$$x' - x = \Delta x = a(t' - t) = a \cdot \Delta t.$$

故於 (1.1.2) 式所代表之運動中，行程 Δx 係與其所需用之時間 Δt 成比例，換言之相等之距離常需用相等之時間。由此可知 a 之量即為行程與時間之常比。以方程式示之，則：

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = a \dots \dots \dots (1.1.3)$$

此比數謂之動點之速度⁽⁷⁾。速度者，單位時間內動點之行程也。行程之正或負，當視 t 遞增時 x 之增或減而定。在 (1.1.2) 式所代表之運動中，其速度不變，故此運動謂之“均速”運動⁽⁸⁾。

次可討論任何直線運動 $x = f(t)$ 之普通情形。若 $x' = f(t')$ ，則在 $t' - t = \Delta t$ 時間內，動點之行程為 $x' - x$ 。故

(1)Real. (2)One-valued. (3)Continuous. (4)Derivative, differential coefficient.

(5)Periodic motion. (6)Linear function. (7)Velocity. (8)Uniform motion.

$$x' - x = \Delta x = f(t') - f(t) = f(t + \Delta t) - f(t).$$

以 Δt 除之, 得

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

此行程與時間之比數, 謂之動點在 t 至 $t + \Delta t$ 時間內之平均速度⁽¹⁾. 一般言之, 平均速度與 t 及 Δt 均有關.

如使時距⁽²⁾漸次縮短, 則終得其極限值:

$$\lim \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(t) \dots \dots \dots (1.1.4)$$

此微商謂之動點在 t 時間之速度 u . u 祇與時間 t 本身攸關.

以均速運動言, 則由(1.1.2)式求得之速度仍為: $u = \frac{dx}{dt} = a$. 以靜止之點言, 則 $x = \text{常數}$, 故 $u = 0$.

1.1.3. 欲藉定數以示速度之值, 則長度與時間之單位必先確定. 長度與時間單位選擇不同, 則用以代表速度之數字, 其物理意義即因之而異. 故速度者, 非一“純粹”之數也. 速度為有“量綱”⁽³⁾者, 其量綱為時間除長度之商:

$$\left[\frac{l}{t} \right].$$

此符號係 Maxwell 所初用以表示量綱者, 統示吾人以長度變遷時或時間變遷時或二者均變遷時對於速度數值之影響. 例如欲將 $20 \left[\frac{\text{厘米}}{\text{秒}} \right]$ 之速度以米及分表之, 則祇須書:

$$1[\text{厘米}] = \frac{1}{100}[\text{米}], \quad 1[\text{秒}] = \frac{1}{60}[\text{分}],$$

將此等符號一如普通數量運算而代入原式中即得: $20 \left[\frac{\text{厘米}}{\text{秒}} \right] = 12 \left[\frac{\text{米}}{\text{分}} \right]$.

凡任何導出之量, 如其量綱式已知, 皆得如法換算之.

1.1.4. 上節已明均速運動($u = \text{常數}$)之例, 今可進而討論另一特例, 即速度與時間為一次關係之運動:

$$u = a_1 t + b_1 \dots \dots \dots (1.1.5)$$

(1)Mean velocity. (2)Interval of time. (3)Dimension.

a_1 與 b_1 爲常數, b_1 乃動點在 $t=0$ 時之速度, a_1 之意義可釋之如下:

設 $u' = a_1 t' + b_1$, 則在 $t' - t = \Delta t$ 時距內速度之變遷爲 $u' - u$.

$$u' - u = \Delta u = a_1(t' - t) = a_1 \cdot \Delta t.$$

故在此運動中, 速度之變遷係與時間成正比, 其比數爲 a_1 :

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = a_1 \dots \dots \dots (1.1.6)$$

a_1 謂之動點之加速度⁽¹⁾. 加速度者, 每單位時間內速度之增量也, 其正或負當視 t 遞增時速度 u 之增或減而定. 在 (1.1.5) 式所代表之運動中, 其加速度不變, 故謂之“均加速運動”⁽²⁾.

由此可更進而討論 (1.1.4) 式所示之任何運動:

$$u = \dot{f}(t).$$

同樣若 $u' = \dot{f}(t')$, 則在 $t' - t = \Delta t$ 時距內速度之變遷爲 $\Delta u = u' - u$, 以時距除之, 得:

$$\frac{u' - u}{t' - t} = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\dot{f}(t + \Delta t) - \dot{f}(t)}{\Delta t}.$$

此速度變遷與所需時間之比謂之動點在 t 至 $t + \Delta t$ 時距內之平均加速度⁽³⁾. 一般言之, 平均加速度與 t 及 Δt 均有關.

如使時距漸次縮短, 則終得其極限值:

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt} = \dot{u} = \ddot{x} = \ddot{f}(t) \dots \dots \dots (1.1.7)$$

此微商謂之動點在 t 時間之加速度, 是則祇與時間 t 本身攸關.

均速運動或靜止之質點, 其加速度俱爲零.

加速度之量綱可自 (1.1.7) 式得之, 卽:

$$\left[\frac{l}{t^2} \right].$$

參閱第 1.1.3 節由此量綱式可得:

$$20 \left[\frac{\text{厘米}}{\text{秒}^2} \right] = 720 \left[\frac{\text{米}}{\text{分}^2} \right].$$

吾人自可將此方法依次推廣而得“較高級之加速度”, 然此等量在

(1) Acceleration. (2) Uniformly accelerated motion. (3) Mean acceleration.

物理學上之重要性甚微。

在 x, u, a 諸量中，如任何一量已知為時間 t 之某函數，則其他二量可依 t 求微商或取積分得之。例如：在均加速運動(1.1.5)中， x 與 t 為二次⁽¹⁾之關係。

1.1.5. 綜上所述，吾人僅論及運動本體而未究其致動之原。欲探究運動之原因，則必自特殊觀察始。經驗昭示吾人，運動種類，形態不一，球之拋擲也，石之下落也，擺⁽²⁾之蕩動也，凡此種種，每一運動各有其特殊之因。如球之拋擲，則原動者為吾人手臂之肌肉；石之下落，其致動之原在地球；至如擺之振動則除手臂與地球外，且與懸置之方法有關。所須明瞭者，即舉凡手臂也，地球也，懸置之方法也，如不存在，則上述諸運動之發生即不可能矣。力學之主要鵠的，即在探討於特定原因下所可發生之運動種類。

吾人所首須解答者有一事：如不問質點之過去歷史，並剔除過去可影響其運動之原因，換言之，如質點目下已完全隔絕於太空中，與其他諸體遠隔無窮，則該質點之運動為何如？此問題自非可以實驗答之，且是否有物理意義，亦殊屬疑問。蓋嘗有龐大之體或在遼遠之處而稍可影響於質點之運動。然在任何特殊運動中，吾人可減少凡可為致動原因之其他物體之影響，且理論上吾人可減少此影響至無限小。如拋擲之球，吾人可使之自由循其行程而無窒礙，吾人可割斷垂擺之線以便自由下落。凡此諸例，不勝枚舉。吾人自不能移去地球，然若置質點於準確水平⁽³⁾之固定平面上，例如相當廣大之彈球面上，則地球對此質點運動之影響可除去。依此實驗，可知質點(如球是)運動恆依直線進行，其速度漸次遞減。然速度之遞減視平面之狀態而定，凡平面之粗糙處愈少者，其速度遞減亦愈小，在光滑冰面上速度之遞減，欲較在彈球布面上為小甚多。由此可知，在絕對平面上，由粗糙所致之摩擦及生熱等表面狀態已無存在時，速度之遞減當為零，換言之，速度不變。故上述問題可答之如

(1)Quadratic. (2)Pendulum. (3)Horizontal.

下：一質點如無一切外來致動之因，則運動恒依直線均速進行，如方程式(1.1.2)所示者。此之謂“慣性原理”(1)，即Newton動律之第一律也。

上述推論並不欲為慣性原理之詮證，乃僅表示闡發此原理之一途徑而已。其證明祇可自不可勝數之應用中得之。要言之，吾人已將一切相關觀察之總和融會於一簡單語句中矣。

讀者切莫視慣性原理為顯而易見之事或僅屬一種定義，須知在慣性原理之辭句中，有一定之物理敘說在，其準確度可耐高度精確實驗而不破者。

1.1.6. 有質點，譬諸一在絕對光滑平面上運動之球，初則完全與外界隔絕，依直線均速進行，忽受某致動原因之影響，而在其運動方向上發生增速或減速現象。設致此變動者為吾人之肌肉，推之於後則增速，遏之於前則減速，當時吾人即有一種感覺(2)，其強度(3)與所產生之加速度有直接因果關係。

是故吾人將以此肌肉感覺量度加速度之起因，此加速度之起因，名之曰力(4) X ，即吾人所加於球體者也。由實驗可知凡較強之肌肉感覺，即較大之力 X ，必產生較大之加速度 $\ddot{u}$ ，如力之方向反，則加速度之方向亦反，如 $X=0$ ，則 $\ddot{u}=0$ ；此與慣性原理合。

人體肌肉之感覺，無奈失之不定，未能用作衡量力之標準。故欲藉此種實驗方法以求力與加速度之其他關係，殊屬難能。欲免此困難，可下一更嚴密之定義如下：所謂力 X 者，其數量及正負係與所產生之加速度成比例，此即 Newton 動律之第二律也。此新定義之合理性，係基於一切可能之實驗，上文由肌肉感覺所得 X 與 $\ddot{u}$ 之關係，即與此定義相合。不特此也，此定義不含感覺印像，加速度不限於由吾人肌肉所產生，故可應用於任何普遍問題而無礙，下文將詳論之。總之任何運動其致動之因為力，力之值與所產生之加速度成比例。質點之運動如不由其他原因所成而為吾人肌肉所致，則其力即為吾人所發之力。

(1) Principle of inertia. (2) Sensation. (3) Intensity. (4) Force.