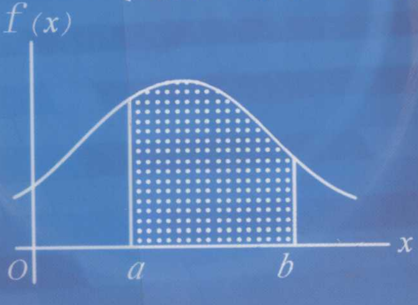
21世纪全国高职高专数学规划教材
——国家级精品课程配套教材

线性代数与概率统计

xianxing daishu yu gailü tongji

朱文辉 陈 刚 编 著

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪全国高职高专数学规划教材
* 国家级精品课程配套教材

线性代数与概率统计

朱文辉 陈 刚 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是国家级精品课程“线性代数与概率统计”的配套教材，该成果还曾获2004年江苏省高等教育教学成果一等奖. 本书贯彻“淡化严密性，强调思维性”的编写思路，使得必需够用为度和应用能力培养落到实处.

全书包括线性代数和概率统计方面的教学基本内容，并配有建模应用方面的资料，内容翔实，语言通俗，可读性强. 每章后附有数量充足、难易适中的习题，书后附有答案.

本书可作为高职高专院校工程类与经管类专业相关课程的教材，也可供工程技术人员和高校学生业务性学习或扩充性学习的参考.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与概率统计/朱文辉，陈刚编著. —北京：北京大学出版社，2005.8
（21世纪全国高职高专数学规划教材）
ISBN 978-7-301-09220-0

I. 线… II. ①朱… ②陈… III. ①线性代数—高等学校：技术学校—教材 ②概率论—高等学校：技术学校—教材 ③数理统计—高等学校：技术学校—教材 IV. ①0151.2 ②021

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第069414号

书　　名：线性代数与概率统计
著作责任者：朱文辉　陈刚　编著
责 任 编 辑：胡伟晔　刘建龙
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-09220-0/O·0656
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62765126　出版部62754962
网　　址：http://www.pup.cn
电 子 信 箱：xxjs@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：河北滦县鑫华书刊印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787毫米×980毫米　16开本　16.5印张　360千字
2005年8月第1版　2007年2月第2次印刷
定　　价：26.00元

前　言

本书是高职高专院校工程类与经管类专业的数学基础课教材之一。针对高职高专学生的特点，我们确立了适合于数学教育的“淡化严密性，强调思维性”的指导思想，能从观念上、方法上解决数学抽象性与人才培养对象之间的矛盾。“淡化严密性”就是以人为本，以高职学生的基础状况和实际需要为依据，调整和控制数学知识传授中的严密程度，降解抽象性，营造适度的数学环境，不追求每个细节的严格表述；“强调思维性”就是以能力为本，关注学生在掌握和应用数学知识时所需要的思维性，包括对专业技术的数学语言表达与交流、对实际问题的数学模型建立与运行。

本书从内容到形式，都力求贯彻“淡化严密性，强调思维性”的指导思想。在介绍各种概念时，均不以严格的“定义”形式出现，而是结合自然的叙述，辅以背景材料顺势引入，并注重从正反两方面对概念内涵加以充分的解读，首次出现的专用名词用黑体字明显标出，这种自然界面既便于查找，同时也减少了数学形式的抽象感；在介绍数学理论时，不拘泥于“定理—证明”的单一模式，也不是简单地删去证明了事，而是尽可能地在通俗易懂的叙述中渐入主题，既交代了来龙去脉，又冲淡了抽象成分，让读者有一种“水到渠成”之感，同时注重对抽象内容的形象化处理，大量地设计一些文字语言解读数学知识。这样的叙述方式，可使读者对数学教材不再望而生畏。

本书特别尊重读者的习惯性与情理性思维，介绍比较复杂的内容都从案例引入，并且注重典型例题的多层次开发，这样一方面可以改变数学教材严肃有余活泼不足的局面，另一方面能踏准读者的思维节奏，便于他们学习数学知识、理解数学原理。

作者运用教学研究成果，对传统的材料组织结构进行了较大幅度的改革，如线性代数中将线性方程组与向量的线性关系分离倒置，增加了初等变换的标准程序和基础解系的读取规则等操作性内容，弱化伴随矩阵在求逆运算中的作用，强化求特征向量的矩阵化技术，增加基础特征向量的新概念等。又如在概率统计中，凸现古典概率与统计定义各自的优势功能；概率的极限定理不再单独成章，而是结合数字特征，一改其高不可攀的理论形象，成了应用性内容；假设检验突破一题一招式的思路，以显著性原理为引导，在适当分解步骤的基础上，重点提示每个步骤的操作思路和执行要领，便于读者面对各种情况融会贯通；在方差分析和回归分析中改变列表计算模式，利用计算器中能直接显示的均值与方差来构造统计量，既避免了复杂的数学推导，能在情理之中掌握计算公式，又大大简化了计算，能在意料之外获得数值结果。本书增加了有关的数学建模内容，以便将数学建模思想有机地融入到基础性教学之中。

全书共分三篇。第一篇线性代数，包括行列式、矩阵、线性方程组、向量的线性关系、矩阵的特征值与特征向量、二次型等 6 章；第二篇概率统计，包括随机事件与概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、统计量与参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等 6 章；第三篇建模应用，包括线性代数和概率统计的应用共 2 章。各章虽有联系，但又能各自独立成篇，便于实施模块式教学构建。

随着教育大众化形势的发展，高职教育的专业设置多种多样，新专业不断涌现，对数学基础课提出了多元化、小型化、分散化的要求。本书的第 5 章、第 6 章、第 11 章、第 12 章等部分内容，就是为适应这些需求而特意安排的。

讲授本书的全部内容约需 60～100 学时。通常各专业要根据不同需求进行模块化搭建，因为本书已对各章节进行了独立化模型化处理，所以本教材实际上可适应 20～60 学时的工程数学课程教学需要。

本书文笔简洁明了，可读性强。“淡化严密性”带来了篇幅的减少以及信息量的增加；“强调思维性”使得理论高度不仅没有降低，相反在通俗易懂的铺叙中生动地展示了思维的全过程，突现了线性代数与概率统计的主流方法和操作技术，使这门基础课对于读者来说更易掌握，更为实用，同时也能使读者的思维在适度的数学环境中得到潜移默化的熏陶，成为培养思维能力的重要载体。

本书的编写特色得到了教育部评审专家组的肯定，“线性代数与概率统计”在 2006 年底被评为国家级精品课程，同时，本书还是数学基础课教学改革成果的组成部分，该成果获 2004 年江苏省高等教育教学成果奖一等奖。

编　者

2007 年 2 月

目　录

第一篇　线 性 代 数

第 1 章　行 列 式

1.1　行列式的概念与性质

1.1.1　二阶、三阶行列式

当一个代数式很复杂时，需要引入适当的记号，以便简化它的表达形式、突现它的构成规则．**行列式**就是一种代数式的简要记号，如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \tag{1.2}$$

分别是二阶、三阶行列式，两式的左端表示行列式的记号，右端是行列式的**全面展开式**．行列式的元素有两个下标，分别称为**行标**和**列标**，如 a_{32} 表示该元素位于第 3 行、第 2 列．

二阶、三阶行列式的全面展开可以用对角线法：在图 1-1 中，实对角线上元素的乘积，前置符号取正；虚对角线上元素的乘积，前置符号取负．它们的代数和即**行列式的值**．

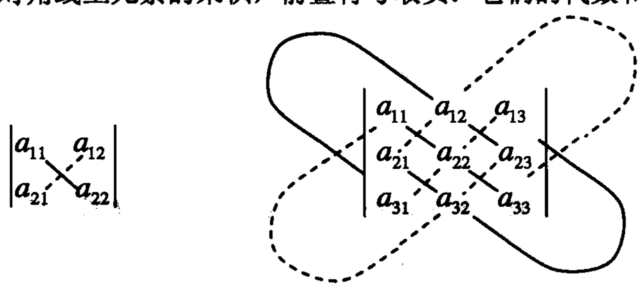


图 1-1　行列式的对角线

例如

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5\times 2-(-1)\times 3=13\text{；}\quad \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2-(-b^2)=a^2+b^2\text{；}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 2\times 3\times 6+1\times(-1)\times 0+(-5)\times(-3)\times 4-0\times 3\times 4$$

$$-(-1)\times(-3)\times 2-1\times(-5)\times 6=36+0+60-0-6-(-30)=120\text{.}$$

1.1.2 n 阶行列式的全面展开

用 n^2 个元素可以构成 **n 阶行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\text{.}$$

行列式有时简记为 $|a_{ij}|$. 一阶行列式 $|a|$ 就是 a，为了避免与绝对值记号相混，一阶行列式通常不加行列式号.

高于 4 阶的行列式不能用对角线法展开. 参照二阶、三阶行列式的展开式(1.1)、(1.2)，规定 n 阶行列式的**全面展开**按如下方式进行：

(1) 展开式的每一项都是不同行、不同列的 n 个元素的乘积.

(2) 取自不同行、不同列的 n 个元素要出现所有不同的搭配. 若将行标顺序安排，则每一项对应列标的一个排列. 如 $a_{12}a_{21}a_{33}$ 对应的排列是 2 1 3. 所有不同的搭配，对应所有不同的列标排列，n 个自然数共有 $n!$ 种排列，因而全面展开式共有 $n!$ 项.

(3) 各项的前置符号，偶排列取正，奇排列取负. 所谓偶（奇）排列是指该排列的逆序数为偶（奇）数. 比如排列 4 3 1 2 中，4 后面有比它小的 3，1，2（算作 3 个逆序），3 后面有 1，2，合计共有 5 个逆序，是奇排列. 全面展开式的 $n!$ 项中有半数的前置符号为正，另一半为负.

通过全面展开来计算行列式显然是很复杂的，应该考虑简便的方法.

1.1.3 行列式的性质

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T}. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

实际书写时，“横着看，竖着写”，便可得到转置行列式.

性质 1　行列式转置后，其值不变，即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

例如 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

证　在行列式 D 中，每一行取一个元素，这 n 个元素位于不同的列，它们的乘积添上前置符号构成了 D 的展开式中的一项. 该项中的元素也可以理解为取自不同的列，并位于不同的行，而这正是 D^{T} 的展开式中的一项. 可见 D 和 D^{T} 的展开式中各项都对应相同，因此它们相等.

这条性质告诉我们，行列式的行具有某一性质，它们的列也具有相同的性质.

性质 2　交换行列式的两行（列），行列式的值变号.

例如 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 8 & 9 & 4 \end{vmatrix}$.

证　交换行列式的两行，相当于在展开式每一项所对应的列标排列中，交换了两个数字的位置. 这两个数字之间的逆序发生了变化，而这两个数字和其他数字之间的逆序变化是成对发生的，因此整个排列的逆序数变化量为奇数，从而排列的奇偶性发生改变. 即行列式展开式中的每一项都改变了符号，于是行列式的值变号.

性质 3　行列式的某一行（列）元素有公因子，可以提到行列式的外面.

例如 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8k & 9k & 4k \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.

证　行列式的某一行有公因子 k 时，因为行列式展开式的每一项中都出现了该行的一个元素，所以每一项都有了公因子 k，当然可以提取出来.

这条性质也可以反向运用：行列式乘以数 k，等于把 k 乘到行列式的某一行（列）上去.

推论　以下 3 种行列式的值为零.

（1）行列式有某一行（列）的元素全为零；

（2）行列式有两行（列）完全相同；

（3）行列式有两行（列）的元素对应成比例.

证 其中第 1 种行列式有公因子 0；第 2 种行列式交换两行（列）后，其值不变，同时又改变符号，即 $D=-D$，故 $D=0$；第 3 种行列式提取公因子后，即第 2 种行列式.

性质 4 一个行列式可以拆分成两个行列式的和，这两个行列式的某对应行（列）上相同位置的元素之和，正好等于原行列式的对应位置的元素，而其他行（列）的元素都与原行列式相同.

例如
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}.$$

证 因为在行列式展开式的各项中，可以把来自于某行（列）的元素拆分成两数之和，再利用分配律将每一项都拆成两项之和，由此组合成两个行列式，而且行列式中除被拆分的元素外，其他元素都未变.

这条性质给出了行列式的**拆分规则**. 若反向运用，则成了行列式的**合并规则**. 拆分与合并规则特别强调：除某一对应行（列）外，其余元素都相同.

性质 5 把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一数后加到另一行（列）的对应元素上去，行列式的值不变.

证 做了这种变换后的行列式可以拆分成两个行列式，一个是原行列式，另一个是推论中的第 3 种行列式（其值为零）.

比如在一个三阶行列式中将第 1 列乘以数 k 后加到第 3 列，所得行列式可拆分为
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+ka_1 \\ a_2 & b_2 & c_2+ka_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+ka_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & ka_1 \\ a_2 & b_2 & ka_2 \\ a_3 & b_3 & ka_3 \end{vmatrix}.$$

性质 5 将是计算行列式的主要工具，务必正确理解："把某一行（列）乘以同一数后加到另一行（列）上去"，运算的对象是整行（列）中的每一个元素，不可偏漏；运算后，其中的"某一行（列）"应保持原样，而"另一行（列）"须发生变化；行列式的元素发生了变化，但行列式的值不变. 例如在下面的行列式中，把第 3 行乘以 3 加到第 1 行上去，可以得到等式
$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 & 3 \\ -5 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 14 & 15 & 0 \\ -5 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

1.2　行列式的降阶算法

1.2.1　代数余子式

在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划去后，余下的$(n-1)$阶行列式叫做元素a_{ij}的**余子式**，记为M_{ij}．再记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}, \tag{1.3}$$

A_{ij}叫做a_{ij}的**代数余子式**.

1.2.2　特殊行列式的计算公式

若行列式第 1 行元素除a_{11}外均为零，则有如下计算式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证　等式右端的$(n-1)$阶行列式是a_{11}的余子式M_{11}．在行列式D中，每行选取一个元素（不同列）做乘积，构成展开式的各项．可以只考虑不等于零的项，显然第 1 行只能取a_{11}，于是各项有了公因子a_{11}．选取第 2 至第n行的元素，和全面展开M_{11}的选取方式完全相同；另一方面a_{11}与其他元素不构成逆序，因此D的展开项与M_{11}的展开项前置符号也相同．提取公因子a_{11}后，即得$D=a_{11}M_{11}$．

若行列式的第 1 列除a_{11}外均为零，则有同样的计算式.

现在考虑一般的降阶条件．如果在行列式D中，非零元素a_{ij}所在的行（第i行）或列（第j列）的其他元素均为零，那么可以将第i行依次与第$(i-1)$，…，2，1 行交换，然后再将第j列依次与第$(j-1)$，…，2，1 列交换，共经过$(i+j-2)$次换行与换列，把a_{ij}换到左上角的位置，其所在的行与列也换到了第 1 行和第 1 列，而其他行、列的排列顺序没有改变．根据前面的公式可知，最后的行列式的值变成了$a_{ij}M_{ij}$．由于行列式的值变了$(i+j-2)$次符号，所以

$$D=(-1)^{i+j-2}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}. \tag{1.4}$$

定理 1.1　如果行列式的某行（或某列）中，仅有一个元素非零，那么行列式的值等于该非零元素与它的代数余子式的乘积.

定理 1.1 是行列式**降阶算法**的基础．比如下面的行列式经逐次降阶，很容易得到它的

值：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

我们称这种行列式为**下三角行列式**．类似地，**上三角行列式**也有同样的计算公式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

更特殊的**对角行列式**的值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

我们把行列式中从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**．**三角行列式**中，主对角线一侧的元素全为零；对角行列式中，主对角线两侧的元素全为零．

推论 三角行列式及对角行列式的值等于其主对角线上所有元素的乘积．

1.2.3 行列式的降阶算法

对于一般的行列式，可以利用行列式的性质 5 把某些元素变为零，来达到降阶条件．具体做法是：在行列式中选定一个非零元素，称之为**主元**，将主元所在的行乘以适当的数加到其他行上，由此把主元所在列的其他元素都变为零．这个过程叫做**消元**．

例 1.1 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} -10 & 8 & -7 & 2 \\ 7 & -9 & 13 & 1 \\ -5 & -1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & -2 \end{vmatrix}$.

解 选 $a_{24}=1$ 为主元，为了将第 4 列的元素 2,3,－2 变成零，进行行变换：第 2 行乘－2