



21世纪全国高职高专数学规划教材

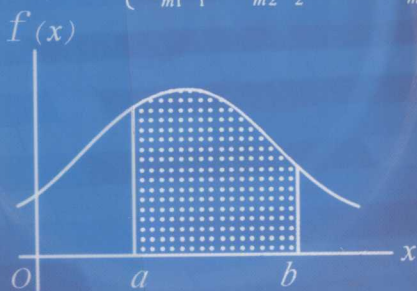
—— 国家级精品课程配套教材

线性代数与概率统计

xianxing daishu yu gailü tongji

朱文辉 陈刚 编著

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪全国高职高专数学规划教材

* 国家级精品课程配套教材

线性代数与概率统计

朱文辉 陈刚 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是国家级精品课程“线性代数与概率统计”的配套教材,该成果还曾获2004年江苏省高等教育教学成果一等奖.本书贯彻“淡化严密性,强调思维性”的编写思路,使得必需够用为度和应用能力培养落到实处.

全书包括线性代数和概率统计方面的教学基本内容,并配有建模应用方面的资料,内容翔实,语言通俗,可读性强.每章后附有数量充足、难易适中的习题,书后附有答案.

本书可作为高职高专院校工程类与经管类专业相关课程的教材,也可供工程技术人员和高校学生业务性学习或扩充性学习的参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与概率统计/朱文辉,陈刚编著. —北京:北京大学出版社,2005.8

(21世纪全国高职高专数学规划教材)

ISBN 978-7-301-09220-0

I. 线… II. ①朱… ②陈… III. ①线性代数—高等学校;技术学校—教材 ②概率论—高等学校;技术学校—教材 ③数理统计—高等学校;技术学校—教材
IV. ①0151.2 ②021

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第069414号

书 名: 线性代数与概率统计

著作责任者: 朱文辉 陈刚 编著

责任编辑: 胡伟晔 刘建龙

标准书号: ISBN 978-7-301-09220-0/O·0656

出 版 者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路205号 100871

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62765126 出版部 62754962

网 址: <http://www.pup.cn>

电子信箱: xxjs@pup.pku.edu.cn

印 刷 者: 河北滦县鑫华书刊印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

787毫米×980毫米 16开本 16.5印张 360千字

2005年8月第1版 2007年2月第2次印刷

定 价: 26.00元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话: 010-62752024; 电子邮箱: fd@pup.pku.edu.cn

前 言

本书是高职高专院校工程类与经管类专业的数学基础课教材之一。针对高职高专学生的特点，我们确立了适合于数学教育的“淡化严密性，强调思维性”的指导思想，能从观念上、方法上解决数学抽象性与人才培养对象之间的矛盾。“淡化严密性”就是以人为本，以高职学生的基础状况和实际需要为依据，调整和控制数学知识传授中的严密程度，降解抽象性，营造适度的数学环境，不追求每个细节的严格表述；“强调思维性”就是以能力为本，关注学生在掌握和应用数学知识时所需要的思维性，包括对专业技术的数学语言表达与交流、对实际问题的数学模型建立与运行。

本书从内容到形式，都力求贯彻“淡化严密性，强调思维性”的指导思想。在介绍各种概念时，均不以严格的“定义”形式出现，而是结合自然的叙述，辅以背景材料顺势引入，并注重从正反两方面对概念内涵加以充分的解读，首次出现的专用名词用黑体字明显标出，这种自然界面既便于查找，同时也减少了数学形式的抽象感；在介绍数学理论时，不拘泥于“定理—证明”的单一模式，也不是简单地删去证明了事，而是尽可能地在通俗易懂的叙述中渐入主题，既交代了来龙去脉，又冲淡了抽象成分，让读者有一种“水到渠成”之感，同时注重对抽象内容的形象化处理，大量地设计一些文字语言解读数学知识。这样的叙述方式，可使读者对数学教材不再望而生畏。

本书特别尊重读者的习惯性与情理性思维，介绍比较复杂的内容都从案例引入，并且注重典型例题的多层次开发，这样一方面可以改变数学教材严肃有余活泼不足的局面，另一方面能踏准读者的思维节奏，便于他们学习数学知识、理解数学原理。

作者运用教学研究成果，对传统的材料组织结构进行了较大幅度的改革，如线性代数中将线性方程组与向量的线性关系分离倒置，增加了初等变换的标准程序和基础解系的读取规则等操作性内容；弱化伴随矩阵在求逆运算中的作用；强化求特征向量的矩阵化技术，增加基础特征向量的新概念等。又如在概率统计中，凸现古典概率与统计定义各自的优势功能；概率的极限定理不再单独成章，而是结合数字特征，一改其高不可攀的理论形象，成了应用性内容；假设检验突破一题一招式的思路，以显著性原理为引导，在适当分解步骤的基础上，重点提示每个步骤的操作思路和执行要领，便于读者面对各种情况融会贯通；在方差分析和回归分析中改变列表计算模式，利用计算器中能直接显示的均值与方差来构造统计量，既避免了复杂的数学推导，能在情理之中掌握计算公式，又大大简化了计算，能在意料之外获得数值结果。本书增加了有关的数学建模内容，以便将数学建模思想有机地融入到基础性教学之中。

全书共分三篇。第一篇线性代数，包括行列式、矩阵、线性方程组、向量的线性关系、矩阵的特征值与特征向量、二次型等 6 章；第二篇概率统计，包括随机事件与概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、统计量与参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等 6 章；第三篇建模应用，包括线性代数和概率统计的应用共 2 章。各章虽有联系，但又能各自独立成篇，便于实施模块式教学构建。

随着教育大众化形势的发展，高职教育的专业设置多种多样，新专业不断涌现，对数学基础课提出了多元化、小型化、分散化的要求。本书的第 5 章、第 6 章、第 11 章、第 12 章等部分内容，就是为适应这些需求而特意安排的。

讲授本书的全部内容约需 60~100 学时。通常各专业要根据不同需求进行模块化搭建，因为本书已对各章节进行了独立化模型化处理，所以本教材实际上可适应 20~60 学时的工程数学课程教学需要。

本书文笔简洁明了，可读性强。“淡化严密性”带来了篇幅的减少以及信息量的增加；“强调思维性”使得理论高度不仅没有降低，相反在通俗易懂的铺叙中生动地展示了思维的全过程，突现了线性代数与概率统计的主流方法和操作技术，使这门基础课对于读者来说更易掌握，更为实用，同时也能使读者的思维在适度的数学环境中得到潜移默化的熏陶，成为培养思维能力的重要载体。

本书的编写特色得到了教育部评审专家组的肯定，“线性代数与概率统计”在 2006 年底被评为国家级精品课程，同时，本书还是数学基础课教学改革成果的组成部分，该成果获 2004 年江苏省高等教育教学成果奖一等奖。

编者

2007 年 2 月

目 录

第一篇 线性代数	1
第 1 章 行列式	1
1.1 行列式的概念与性质.....	1
1.1.1 二阶、三阶行列式.....	1
1.1.2 n 阶行列式的全面展开.....	2
1.1.3 行列式的性质.....	2
1.2 行列式的降阶算法.....	5
1.2.1 代数余子式.....	5
1.2.2 特殊行列式的计算公式.....	5
1.2.3 行列式的降阶算法.....	6
1.3 克莱姆法则.....	8
1.3.1 行列式的按行(列)展开.....	8
1.3.2 代数余子式组合定理.....	9
1.3.3 克莱姆法则.....	9
习题一.....	12
第 2 章 矩阵	15
2.1 矩阵的概念及其线性运算.....	15
2.1.1 矩阵的概念.....	15
2.1.2 矩阵的加、减运算.....	16
2.1.3 矩阵的数乘.....	16
2.2 矩阵的乘法与转置.....	17
2.2.1 矩阵的乘法.....	17
2.2.2 矩阵乘法的性质.....	18
2.2.3 矩阵的转置.....	20
2.2.4 方阵行列式的乘积定理.....	21
2.3 逆矩阵.....	21
2.3.1 逆矩阵的概念.....	21
2.3.2 矩阵可逆的条件.....	22

2.3.3	逆矩阵的性质	23
2.4	矩阵的初等变换	23
2.4.1	矩阵的初等行变换	23
2.4.2	初等变换的标准程序	24
2.4.3	用初等变换法求逆矩阵	25
2.4.4	初等矩阵	26
2.5	分块矩阵	27
2.5.1	分块矩阵的概念	27
2.5.2	分块矩阵的运算	28
	习题二	29
第3章	线性方程组	32
3.1	线性方程组的矩阵消元解法	32
3.2	矩阵的秩	34
3.2.1	秩的概念	34
3.2.2	秩的求法	35
3.2.3	矩阵的秩与线性方程组的解	36
3.3	线性方程组解的结构	37
3.3.1	齐次线性方程组解的结构	37
3.3.2	非齐次线性方程组解的结构	39
3.4	矩阵方程的矩阵消元解法	42
	习题三	44
第4章	向量的线性关系	48
4.1	向量的线性相关性	48
4.1.1	两种线性关系	48
4.1.2	线性关系和线性方程组	50
4.2	极大线性无关组与向量组的秩	52
4.2.1	极大线性无关组的概念	52
4.2.2	极大线性无关组的求法	52
4.2.3	向量组的秩	53
	习题四	55
第5章	矩阵的特征值与特征向量	57
5.1	特征值与特征向量	57
5.2	矩阵的相似与矩阵的对角化	59
5.3	实对称矩阵的对角化	62
5.3.1	向量的内积与正交矩阵	62

5.3.2 实对称矩阵的特征值与特征向量.....	63
习题五.....	66
第6章 二次型.....	69
6.1 二次型及其标准形.....	69
6.1.1 二次方程与几何图形.....	69
6.1.2 二次型的矩阵表示.....	69
6.1.3 二次型的标准形.....	71
6.2 二次型的线性变换与惯性定理.....	72
6.2.1 二次型中的线性变换.....	72
6.2.2 化二次型为标准形的矩阵变换法.....	74
6.2.3 二次型的惯性定理.....	76
6.3 二次型的正交变换与有定性.....	78
6.3.1 用正交变换化二次型为标准形.....	78
6.3.2 二次型的有定性.....	79
习题六.....	81
第二篇 概率统计.....	84
第7章 随机事件及其概率.....	84
7.1 随机事件.....	84
7.1.1 随机试验与样本空间.....	84
7.1.2 随机事件与集合.....	85
7.1.3 事件的关系与运算.....	86
7.2 事件的概率.....	88
7.2.1 古典概率.....	88
7.2.2 概率的性质.....	88
7.2.3 古典概率的计算.....	89
7.2.4 概率的统计定义.....	91
7.3 事件的独立性.....	93
7.3.1 条件概率.....	93
7.3.2 乘法公式.....	93
7.3.3 事件的独立性.....	94
7.3.4 全概率公式.....	96
习题七.....	98
第8章 随机变量及其概率分布.....	101
8.1 离散型随机变量及其分布律.....	101

70	8.1.1	随机变量	101
70	8.1.2	离散型随机变量	101
70	8.1.3	两点分布	103
70	8.1.4	二项分布	103
70	8.1.5	泊松 (Poisson) 分布	105
70	8.2	连续型随机变量及其概率密度	106
71	8.2.1	连续型随机变量	106
71	8.2.2	均匀分布	109
71	8.2.3	指数分布	110
71	8.3	分布函数与函数的分布	110
71	8.3.1	分布函数	110
71	8.3.2	函数的分布	111
71	8.4	正态分布	112
71	8.4.1	正态分布的定义与性质	112
71	8.4.2	正态分布的概率计算	113
71		习题八	115
71	第9章	随机变量的数字特征	118
71	9.1	数学期望	118
71	9.1.1	数学期望的概念与计算公式	118
71	9.1.2	常用分布的数学期望	120
71	9.1.3	数学期望的运算规则	121
71	9.1.4	随机变量函数的数学期望	123
71	9.2	方差与标准差	124
71	9.2.1	方差的概念与计算公式	124
71	9.2.2	方差的运算规则	125
71	9.2.3	常用分布的方差	126
71	9.2.4	协方差与相关系数	128
71	9.3	大数定律与中心极限定理	129
71		习题九	132
71	第10章	统计量与参数估计	135
71	10.1	样本与统计量	135
71	10.1.1	总体与样本	135
71	10.1.2	统计量及其分布	136
71	10.1.3	临界值的概念及其概率意义	138
71	10.2	点估计	140

10.2.1	点估计的概念	习题七	140
10.2.2	点估计的方法		141
10.2.3	估计量的评价标准	习题八	142
10.3	区间估计	习题九	143
10.3.1	置信度与置信区间		143
10.3.2	正态总体的区间估计		143
10.3.3	置信度的选择		146
	习题十		146
第 11 章 假设检验			150
11.1	单个正态总体的参数检验	习题十一	150
11.1.1	假设检验的一般步骤		150
11.1.2	正态总体均值与方差的假设检验		152
11.1.3	显著性原理		154
11.2	两个正态总体的参数检验		156
11.2.1	两个样本的统计量及其分布		156
11.2.2	两个正态总体的均值与方差的假设检验		158
11.3	非参数检验		160
11.3.1	直方图法		160
11.3.2	皮尔逊检验		161
11.3.3	秩和检验		163
	习题十一		164
第 12 章 方差分析与回归分析			168
12.1	方差分析		168
12.1.1	单因素方差分析		168
12.1.2	双因素方差分析		171
12.2	一元回归分析		176
12.2.1	最小二乘法		177
12.2.2	线性化方法		178
12.2.3	相关性检验		180
12.2.4	预测与控制		181
12.3	正交试验设计		183
12.3.1	多因素试验与正交表		183
12.3.2	正交表的应用		184
12.3.3	考虑交互作用的正交试验设计		187
12.3.4	正交试验的方差分析		189

习题十二	191
第三篇 建模应用	196
第 13 章 线性代数的应用	196
13.1 矩阵的简化作用	196
13.2 线性运算技术	201
第 14 章 概率统计的应用	212
14.1 现实中的概率	212
14.2 统计推断	219
部分习题答案	230
附表	241
附表 1 标准正态分布表	241
附表 2 泊松分布数值表	242
附表 3 t 分布临界值表	243
附表 4 χ^2 分布临界值表	244
附表 5 F 分布临界值表	245
附表 6 秩和检验临界值表	250
附表 7 相关系数临界值表	251
附表 8 正交表	252
参考文献	254

第一篇 线性代数

第1章 行列式

1.1 行列式的概念与性质

1.1.1 二阶、三阶行列式

当一个代数式很复杂时，需要引入适当的记号，以便简化它的表达形式、突现它的构成规则。行列式就是一种代数式的简要记号，如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad (1.1)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \quad (1.2)$$

分别是二阶、三阶行列式，两式的左端表示行列式的记号，右端是行列式的全面展开式。行列式的元素有两个下标，分别称为行标和列标，如 a_{32} 表示该元素位于第3行、第2列。

二阶、三阶行列式的全面展开可以用对角线法：在图 1-1 中，实对角线上元素的乘积，前置符号取正；虚对角线上元素的乘积，前置符号取负。它们的代数和即行列式的值。

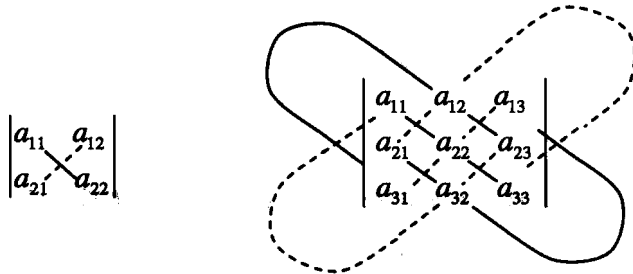


图 1-1 行列式的对角线

例如

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times 2 - (-1) \times 3 = 13; \quad \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times 6 + 1 \times (-1) \times 0 + (-5) \times (-3) \times 4 - 0 \times 3 \times 4$$

$$-(-1) \times (-3) \times 2 - 1 \times (-5) \times 6 = 36 + 0 + 60 - 0 - 6 - (-30) = 120.$$

1.1.2 n 阶行列式的全面展开

用 n^2 个元素可以构成 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

行列式有时简记为 $|a_{ij}|$. 一阶行列式 $|a|$ 就是 a , 为了避免与绝对值记号相混, 一阶行列式通常不加分行式号.

高于 4 阶的行列式不能用对角线法展开. 参照二阶、三阶行列式的展开式 (1.1)、(1.2), 规定 n 阶行列式的全面展开按如下方式进行:

(1) 展开式的每一项都是不同行、不同列的 n 个元素的乘积.

(2) 取自不同行、不同列的 n 个元素要出现所有不同的搭配. 若将行标顺序安排, 则每一项对应列标的一个排列. 如 $a_{12}a_{21}a_{33}$ 对应的排列是 2 1 3. 所有不同的搭配, 对应所有不同的列标排列, n 个自然数共有 $n!$ 种排列, 因而全面展开式共有 $n!$ 项.

(3) 各项的前置符号, 偶排列取正, 奇排列取负. 所谓偶 (奇) 排列是指该排列的逆序数为偶 (奇) 数. 比如排列 4 3 1 2 中, 4 后面有比它小的 3, 1, 2 (算作 3 个逆序), 3 后面有 1, 2, 合计共有 5 个逆序, 是奇排列. 全面展开式的 $n!$ 项中有半数的前置符号为正, 另一半为负.

通过全面展开来计算行列式显然是很复杂的, 应该考虑简便的方法.

1.1.3 行列式的性质

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式, 称为 D 的转置行列式, 记为 D^T . 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

实际书写时，“横着看，竖着写”，便可得到转置行列式。

性质 1 行列式转置后，其值不变，即 $D^T = D$ 。

例如 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$

证 在行列式 D 中，每一行取一个元素，这 n 个元素位于不同的列，它们的乘积添上前置符号构成了 D 的展开式中的一项。该项中的元素也可以理解为取自不同的列，并位于不同的行，而这正是 D^T 的展开式中的一项。可见 D 和 D^T 的展开式中各项都对应相同，因此它们相等。

这条性质告诉我们，行列式的行具有某一性质，它们的列也具有相同的性质。

性质 2 交换行列式的两行（列），行列式的值变号。

例如 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 8 & 9 & 4 \end{vmatrix}.$

证 交换行列式的两行，相当于在展开式每一项所对应的列标排列中，交换了两个数字的位置。这两个数字之间的逆序发生了变化，而这两个数字和其他数字之间的逆序变化是成对发生的，因此整个排列的逆序数变化量为奇数，从而排列的奇偶性发生改变。即行列式展开式中的每一项都改变了符号，于是行列式的值变号。

性质 3 行列式的某一行（列）元素有公因子，可以提到行列式的外面。

例如 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8k & 9k & 4k \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$

证 行列式的某一行有公因子 k 时，因为行列式展开式的每一项中都出现了该行的一个元素，所以每一项都有了公因子 k ，当然可以提取出来。

这条性质也可以反向运用：行列式乘以数 k ，等于把 k 乘到行列式的某一行（列）上去。

推论 以下 3 种行列式的值为零。

- (1) 行列式有某一行（列）的元素全为零；
- (2) 行列式有两行（列）完全相同；
- (3) 行列式有两行（列）的元素对应成比例。

证 其中第 1 种行列式有公因子 0；第 2 种行列式交换两行（列）后，其值不变，同时又改变符号，即 $D = -D$ ，故 $D = 0$ ；第 3 种行列式提取公因子后，即第 2 种行列式。

性质 4 一个行列式可以拆分成两个行列式的和，这两个行列式的某对应行（列）上相同位置的元素之和，正好等于原行列式的对应位置的元素，而其他行（列）的元素都与原行列式相同。

$$\text{例如} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}.$$

证 因为在行列式展开式的各项中，可以把来自于某行（列）的元素拆分成两数之和，再利用分配律将每一项都拆成两项之和，由此组合成两个行列式，而且行列式中除被拆分的元素外，其他元素都未变。

这条性质给出了行列式的**拆分规则**。若反向运用，则成了行列式的**合并规则**。拆分与合并规则特别强调：除某一对应行（列）外，其余元素都相同。

性质 5 把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一数后加到另一行（列）的对应元素上去，行列式的值不变。

证 做了这种变换后的行列式可以拆分成两个行列式，一个是原行列式，另一个是推论中的第 3 种行列式（其值为零）。

比如在一个三阶行列式中将第 1 列乘以数 k 后加到第 3 列，所得行列式可拆分为

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + ka_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + ka_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + ka_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & ka_1 \\ a_2 & b_2 & ka_2 \\ a_3 & b_3 & ka_3 \end{vmatrix}.$$

性质 5 将是计算行列式的主要工具，务必正确理解：“把某一行（列）乘以同一数后加到另一行（列）上去”，运算的对象是整行（列）中的每一个元素，不可偏漏；运算后，其中的“某一行（列）”应保持原样，而“另一行（列）”须发生变化；行列式的元素发生了变化，但行列式的值不变。例如在下面的行列式中，把第 3 行乘以 3 加到第 1 行上去，可以得到等式

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 & 3 \\ -5 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 14 & 15 & 0 \\ -5 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

1.2 行列式的降阶算法

1.2.1 代数余子式

在 n 阶行列式中, 把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后, 余下的 $(n-1)$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的**余子式**, 记为 M_{ij} . 再记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad (1.3)$$

A_{ij} 叫做 a_{ij} 的**代数余子式**.

1.2.2 特殊行列式的计算公式

若行列式第 1 行元素除 a_{11} 外均为零, 则有如下计算式:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}.$$

证 等式右端的 $(n-1)$ 阶行列式是 a_{11} 的余子式 M_{11} . 在行列式 D 中, 每行选取一个元素(不同列)做乘积, 构成展开式的各项. 可以只考虑不等于零的项, 显然第 1 行只能取 a_{11} , 于是各项有了公因子 a_{11} . 选取第 2 至第 n 行的元素, 和全面展开 M_{11} 的选取方式完全相同; 另一方面 a_{11} 与其他元素不构成逆序, 因此 D 的展开项与 M_{11} 的展开项前置符号也相同. 提取公因子 a_{11} 后, 即得 $D = a_{11}M_{11}$.

若行列式的第 1 列除 a_{11} 外均为零, 则有同样的计算式.

现在考虑一般的降阶条件. 如果在行列式 D 中, 非零元素 a_{ij} 所在的行(第 i 行)或列(第 j 列)的其他元素均为零, 那么可以将第 i 行依次与第 $(i-1)$, \dots , 2 , 1 行交换, 然后再将第 j 列依次与第 $(j-1)$, \dots , 2 , 1 列交换, 共经过 $(i+j-2)$ 次换行与换列, 把 a_{ij} 换到左上角的位置, 其所在的行与列也换到了第 1 行和第 1 列, 而其他行、列的排列顺序没有改变. 根据前面的公式可知, 最后的行列式的值变成了 $a_{ij}M_{ij}$. 由于行列式的值变了 $(i+j-2)$ 次符号, 所以

$$D = (-1)^{i+j-2} a_{ij}M_{ij} = a_{ij}A_{ij}. \quad (1.4)$$

定理 1.1 如果行列式的某行(或某列)中, 仅有一个元素非零, 那么行列式的值等于该非零元素与它的代数余子式的乘积.

定理 1.1 是行列式**降阶算法**的基础. 比如下面的行列式经逐次降阶, 很容易得到它的

值:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nm}.$$

我们称这种行列式为**下三角行列式**. 类似地, **上三角行列式**也有同样的计算公式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

更特殊的**对角行列式**的值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

我们把行列式中从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**. **三角行列式**中, 主对角线一侧的元素全为零; 对角行列式中, 主对角线两侧的元素全为零.

推论 三角行列式及对角行列式的值等于其主对角线上所有元素的乘积.

1.2.3 行列式的降阶算法

对于一般的行列式, 可以利用行列式的性质 5 把某些元素变为零, 来达到降阶条件. 具体做法是: 在行列式选定一个非零元素, 称之为**主元**, 将主元所在的行乘以适当的数加到其他行上, 由此把主元所在列的其他元素都变为零. 这个过程叫做**消元**.

例 1.1 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} -10 & 8 & -7 & 2 \\ 7 & -9 & 13 & 1 \\ -5 & -1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & -2 \end{vmatrix}$.

解 选 $a_{24} = 1$ 为主元, 为了将第 4 列的元素 2, 3, -2 变成零, 进行行变换: 第 2 行乘 -2