

高中数学

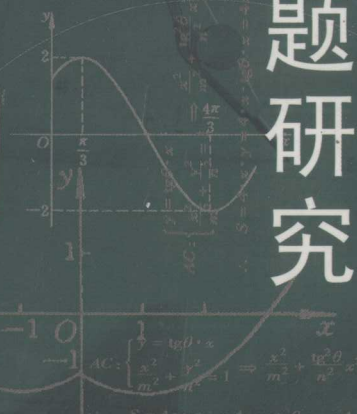
能力型问题研究

(第二版)

主编

奚定华
查建驹
陈嘉驹

SHANGHAI JIAOYU CHUBANSHE
上海教育出版社



$(a-2)x^2 + 2(a-2)x - 4 < mx - 7$,
 $(a-2)x^2 + (2a-4-m)x - 3 < 0$ 在 $(1,3)$ 上恒成立,
 $\begin{cases} a-2 > 0, \\ (a-2) \cdot 1^2 + (2a-4-m) \cdot 1 + 3 < 0 \\ (a-2) \cdot 3^2 + (2a-4-m) \cdot 3 + 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-2 > 0 \\ m < 3a-3 \\ m < 5a-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3, \\ m=6. \end{cases}$
 当 $a=2$ 时 $-mx-3 < 0$ 在 $(1,3)$ 上恒成立是不成立的,
 $a=3$,
 $m=6$.

高中数学

能力型问题研究

(第二版)

主编
华定华
奚建国
陈嘉驹

上海教育出版社
SHANGHAI JIAOYU CHUBANSHE

4 × 3,
18 × 6

1:1 2:1

图书在版编目(CIP)数据

高中数学能力型问题研究/ 奚定华, 查建国, 陈嘉驹
主编. —上海: 上海教育出版社, 2001. 12 (2004. 10 重印)
ISBN 7-5320-1303-0

I. 高... I. ①奚... ②查... ③陈... III. 数学课
-教学研究-高中 IV. G633. 602

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 089774 号

高中数学能力型问题研究
(第二版)

奚定华 查建国 陈嘉驹 主编

上海世纪出版集团 出版
上海教育出版社

易文网: www.ewen.cc

(上海永福路 123 号 邮政编码: 200031)

各地新华书店经销

商务印书馆 上海印刷股份有限公司印刷

开本 850 × 1156 1/32 印张 7.75 字数 182,000

2003 年 1 月第 2 版 2004 年 10 月第 3 次印刷

印数 15,101 - 20,100 本

ISBN 7-5320-1303-0/G · 1274 定价: (软精) 15.00 元

前 言

随着数学课程教材和考试评价改革的深入开展,提高学生能力的问题越来越引起人们的重视,被提到了重要的地位. 为了提高数学学习的质量,有必要对能力问题开展进一步的研究. 心理学研究指出,能力分一般能力和特殊能力. 一般能力是指顺利完成各种活动所必备的基本心理能力,特殊能力是指顺利完成某种特殊活动所必备的能力. 在数学教育领域内,一般能力通常包括学习新的数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学知识解决实际问题的能力和数学创新能力,提高这些能力将大大推动学生素质的提高. 为此我们结合数学教学和考试命题的实践,对数学教育中如何提高一般能力进行了初步的研究,本书反映了其中的部分成果. 书中的能力型问题所指的能力,主要是一般能力,至于有关数学能力的问题我们将另行研究.

为了使本书的读者对一般能力的本质有比较深入的理解,我们在书中对每一种能力通过以下几个方面加以说明:

1. 有关高考试题的设计和分析:因为高考试题是经过数学高考命题组的老师精心设计、反复讨论、认真修改后编制成的,并且经过了高考大面积的测试检验,不但具有原创性和先进性,而且具有典型性和实践性. 通过介绍这些试题的命题思路 and 情景设计,读者可以从中得到很多启发,对什么是能力型问题可以有比较具体的了解. 通过对这些试题解答情况的分析,可以了解在解能力型问题过程中会遇到哪些障碍,产生哪些问题,会出现哪些错误,如何

纠正这些错误,解决这些问题.

2. 例题选讲:为了对学习新的数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学知识解决实际问题的能力和数学创新能力有更深入的了解,我们又编制了一些问题作为例题,通过它们分别对每一种能力进行详细的分析和研究,进一步说明如何解有关这些能力的问题.

3. 如何提高有关的能力:在前面具体问题研究的基础上,进一步总结一般的规律,对有关能力型问题的特点进行了初步的探讨,对解决这些问题的方法和策略进行了研究,并提出如何提高这些能力的一些措施.

4. 练习:读者要真正理解本书的内容,单靠阅读是不行的,学数学还得要进行练习,要做一定数量的习题,为此我们编制了一些练习题,供读者练习之用,并在书后附上解答或答案.由于能力型问题很多是开放的,因此答案只能是其中一部分,仅供读者参考.

由于前面对有关的高考数学试题进行了分析,为了便于阅读和查考,书末附有1999年—2002年高考数学试题和解答.

这里特别要指出一点,读者在阅读本书时必须注意,决不能用传统的教育观念和思维方式,进行题型训练,硬套模式.而应该通过阅读这些问题从中得到启发,开拓解题的思路,学会分析问题的方法,掌握解决问题的策略,不断提高学习新的数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学知识解决实际问题的能力和数学创新能力.

本书由奚定华、查建国、陈嘉驹、贺才兴、忻再义、张雄、况亦军、赵军山、黄华、李秋明等参加编写,最后由奚定华修改和统稿.本书出版过程中得到上海教育出版社韩希塘同志的大力支持和帮助,在此表示感谢.

由于这个课题是一个新的课题,没有现成的理论和经验可以

借鉴,书中的例题和习题又绝大部分都是原创性的,而且撰写时间又非常仓促,因此难免会产生一些错误和问题,望读者阅后批评指正,以便在再版时予以修正.

编 者

2002 年 10 月

目 录

前 言	1
第一章 提高一般能力是数学学习的重要目标	1
一、提高能力是素质教育的要求	1
二、能力立意是数学高考的命题理念	2
三、提高一般能力是数学学习的重要目标	7
第二章 学习能力型问题的研究	9
一、有关高考试题的命题设计和分析	9
二、例题选讲	21
三、如何解学习能力型问题	30
四、练习题	32
第三章 探究能力型问题的研究	38
一、有关高考试题的命题设计和分析	38
二、例题选讲	47
三、如何解探究能力型问题	57
四、练习题	60
第四章 应用能力型问题的研究	65
一、有关高考试题的命题设计和分析	65
二、例题选讲	85
三、如何解应用能力型问题	96
四、练习题	101
第五章 创新能力型问题的研究	109

一、有关高考试题的命题设计和分析·····	109
二、例题选讲·····	114
三、如何解创新能力型问题·····	125
四、练习题·····	128
练习题解答或答案·····	131
附录·····	170
1999 年全国普通高等学校招生统一考试上海数学试卷 (理工农医类)及答案要点 ·····	170
2000 年上海市普通高等学校春季招生考试数学试卷及 答案要点 ·····	182
2000 年全国普通高等学校招生统一考试上海数学试卷 (理工农医类)及答案要点 ·····	191
2001 年上海市普通高等学校春季招生考试数学试卷及 答案要点 ·····	202
2001 年全国普通高等学校招生统一考试上海数学试卷 (理工农医类)及答案要点 ·····	212
2002 年上海市普通高等学校春季招生考试数学试卷及 答案要点 ·····	222
2002 年全国普通高等学校招生统一考试上海数学试卷 (理工农医类)及答案要点 ·····	233

第一章 提高一般能力是数学学习的重要目标

一、提高能力是素质教育的要求

当今已进入知识经济和信息化社会,科学技术迅猛发展,日新月异,以科技进步为核心的综合国力竞争日趋激烈,要应对这种挑战,缩短我们与发达国家之间的差距,必须实现跨越式发展,创新精神和实践能力已成为影响民族生存的基本因素。“创新是一个民族的灵魂,是一个国家发展的不竭动力。”为了提高我们的综合国力,必须大力推进素质教育,为国家培养有创新精神和实践能力的人才.如何才能全面实施素质教育呢?《中共中央国务院关于深化教育改革,全面推进素质教育的决定》提出,要通过课程教材改革、评价制度改革,全面实施以培养创新精神和实践能力为重点的素质教育,“要让学生感受、理解知识产生和发展的过程,培养学生的科学精神和创新思维习惯,重视培养学生搜集处理信息的能力、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力、语言文字表达能力以及团结协作和社会活动的能力。”因此培养学生各方面的能力既是素质教育的重要目标,又是考试评价的重要依据。

随着时代的发展,基础教育中存在的问题和弊端不断显现出来,课程实施过程中基本上以书本、课堂和教师为中心,上课以教师传授知识为主,学生死记硬背、机械操练,难以培养学生的创新

精神和实践能力. 为了改变这种状况, 教育部制订了《基础教育课程改革纲要(试行)》, 提出了基础教育课程改革的具体目标, 其中之一就是要“改变课程实施过于强调接受学习、死记硬背、机械训练的现状, 倡导学生主动参与、乐于探究、勤于动手, 培养学生搜集和处理信息的能力、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力以及交流与合作的能力.”把培养和提高学生的能力作为课程教材改革的重要目标.

上海课程教材改革二期工程在一期工程的基础上, 提出了以学生发展为本, 培养学生发展性学力和创造性学力的新的课程发展理念, 要求通过课程教材改革使全体学生在态度、能力和知识各方面都得到全面发展, 特别要提高学生为主动适应迅速发展的未来社会的自我发展能力, 适应知识经济时代所必须具备的探究态度和批判、创新能力. 同样也把培养和提高学生的能力放在非常重要的地位.

为了进一步推动数学教育的改革, 上海制订了《进入 21 世纪的中小学数学教育行动纲领》, 提出数学教育的目标, 要“普遍提高学生的数学基础能力, 包括数学抽象的能力、数学符号变换的能力和数学应用的能力”. 在进行改革时要重视数学与现实生活的联系, 拓宽创造性学习的渠道, “数学教育不仅培养学生计算、演绎等具有根本意义的严格推理能力, 还培养学生预感试验、尝试归纳、假设—检验、简化然后复杂化、寻找相似性等非形式推理和似真推理的能力.”所有这些说明培养和提高学生的能力是数学教育的一项非常重要的任务.

二、能力立意是数学高考的命题理念

为了全面推进素质教育, 实现评价制度的改革, 教育部对高考命题改革提出了新的要求, “要更加注重能力和素质的考查; 命题

的范围要遵循大纲,又不拘泥于教学大纲;要增加应用型和能力型的试题设计。”根据教育部有关指示的精神,结合上海的实际情况,上海教育考试院对高考上海卷命题工作也提出了指导性的意见,要求命题时应注意在考查知识的基础上注重考查能力,考查学生在新情景中运用基础知识的能力,在不影响评分客观性的前提下,试题的解答要有一定的开放度,提倡发散性思维和创新精神,降低试题的绝对难度,从试题的能力要求上体现区分度.在这些思想的指导下,上海高考数学的命题理念发生了质的变化,从知识立意转向能力立意.随之高考数学的试卷和试题也发生深刻的变化,具体表现在以下几个方面:

1. 突出一般能力的考查

心理学研究指出:能力可以分为一般能力和特殊能力.一般能力是指顺利完成各种活动所必备的基本心理能力,特殊能力是指顺利完成某种特殊活动所必备的能力.据此,数学高考测试的能力包括一般能力和数学能力.近几年来,上海高考数学命题把考查学生的一般能力作为主攻方向,进行了重点的突破,着重考查学习新的数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学知识解决实际问题的能力和数学创新能力,推出了很多新颖的能力型试题,使数学试卷从内容到形式都发生了显著的变化,给人一种耳目一新的感觉.并在命题实践的基础上,对数学高考如何考查学生的一般能力进行了深入的研究,提出了考查一般能力的方案.

1999年—2002年7次高考(包括3次春季高考)一般能力考查情况统计如下:

一般能力	题 量	分 值	占总分的百分比
学习能力	7	81	7.7%
探究能力	11	67	6.4%

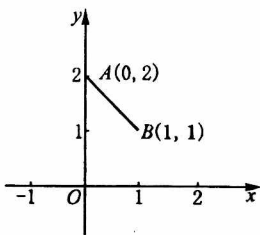
续表

一般能力	题 量	分 值	占总分的百分比
应用能力	16	138	13.1%
创新能力	3	12	1.1%
合 计	37	298	28.4%

从上面的表格可以看到,这四年上海高考数学在考查学生一般能力方面改革的力度是很大的,考查一般能力试题的分值要超过试卷总分的 $\frac{1}{4}$.

2. 创设新的情景,结合双基考查能力

改变以前某些知识点固有的考查模式,在新的情景下考查基础知识和基本技能.如1999年第11题为:若以连续掷两次骰子分别得到的点数 m, n 作为点 P 的坐标,则点 P 落在圆 $x^2 + y^2 = 16$ 内的概率是_____.



这道试题设计为在求平面上圆

内整数点的新的情景下考查掷骰子的概率;又如2000年秋季第8题为:设函数 $y=f(x)$ 是最小正周期为2的偶函数,它在区间 $[0, 1]$ 上的图像为如图所示的线段 AB ,则在区间 $[1, 2]$ 上, $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.通过给出的函数图象的情景来考查函数的奇偶性、周期性.

3. 试题条件结论开放,拓展学生思维空间

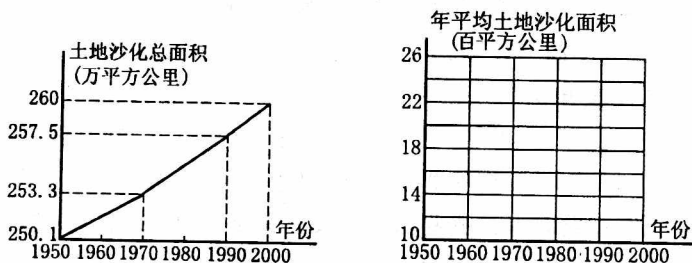
打破试题条件或结论都是唯一确定的模式,通过思路多角度、解答多元化,考查学生思维的广阔性.如1999年第12题,根据已知条件构成的四面体有多种可能,要求学生从中寻求一个较简单的四面体体积;又如2000年春季第12题为:设 I 是全集,非空集合 P, Q 满足 $P \subset Q \subset I$.若含 P, Q 的一个集合运算表达式,使运算结果为空集 $\emptyset$,则这个运算表达式可以是_____.

_____ (只要写出一个表达式). 要求学生在众多的表达式中, 写出其中一个满足条件即可.

4. 提供新的信息, 考查学生获取信息、加工信息的能力

让学生从试题中收集信息, 并对信息进行加工提炼, 从而解决问题. 如 2001 年秋季第 12 题为:

据报道, 我国目前已成为世界上受荒漠化危害最严重的国家之一. 左下图表示我国土地沙化总面积在上个世纪五六十年代、七八十年代、九十年代的变化情况. 由图中的有关信息, 可将上述有关年代中, 我国年平均土地沙化面积在右下图图示为:



这个问题给出了表示我国土地沙化总面积在上个世纪五六十年代、七八十年代、九十年代的变化情况的一个图形, 要求学生从图中收集有关信息, 通过处理后, 再画出上述有关年代中, 我国年平均土地沙化面积的图形.

有的问题要求学生先从题目中获取信息, 然后进行加工处理, 独立完成知识的理解、掌握和运用的过程, 如 2000 年第 22(1)、(2)题为:

已知复数 $z_0 = 1 - mi$ ($m > 0$), $z = x + yi$ 和 $w = x' + y'i$, 其中 x, y, x', y' 均为实数, i 为虚数单位, 且对任意复数 z , 有 $w = \overline{z_0} \cdot \overline{z}$, $|w| = 2|z|$.

(1) 试求 m 的值, 并分别写出 x', y' 用 x, y 表示的关系式;

(2) 将 (x, y) 作为点 P 的坐标, (x', y') 作为点 Q 的坐标, 上述关系式可以看作是坐标平面上点的一个变换, 它将平面上的点 P 变到这一平面上的点 Q .

当点 P 在直线 $y=x+1$ 上移动时, 试求点 P 经该变换后得到的点 Q 的轨迹方程.

学生在解决问题的过程中, 先根据题目提供的信息, 通过复数运算, 建立两复数的实部、虚部间的关系, 并把这个关系定义为一种变换, 得到一种新的知识, 然后独立地理解和掌握它, 再应用它解决点、直线经过变换后的有关问题.

5. 淡化知识结构的完整性和系统性, 不强调知识的覆盖率

过去数学高考以知识立意, 强调考查数学基础知识和基本技能, 特别注重知识的覆盖率, 在命题过程中经常考虑哪些知识要考, 哪些知识不考. 编拟“压阵题”时, 首先考虑它的内容落在哪些知识点上, 是解析几何的圆锥曲线、轨迹, 还是函数、数列或不等式等. 编拟客观题时考虑哪些知识还没有考到, 由此补充有关知识的试题. 随着能力立意命题理念的确立和框架结构的定位, 命题构思和布局已站在新的起点上. 淡化知识覆盖率, 突出思维模式、思维容量和思维层次的考查.

6. 减少运算量, 降低试题数学内容难度

以往高考数学运算量大, 试题数学内容难度较高, 特别是“压阵题”, 考查的数学知识容量大, 逻辑思维段落多, 设置思维障碍的力度较大, 又有一定的学科知识综合度, 因而数学难度较高, 给学生带来较重的负担. 这几年变难度“压阵”为能力“压阵”, 推出一些能力型试题, 数学难度并不高, 但却有较好的区分度, 有利于减轻学生的过重负担.

7. 计算器进入数学高考

这几年在数学高考中可以使用计算器. 使用计算器是一种运

用计算工具的能力,它使学生从繁复的计算中解放出来,既减轻学生的过重负担,又可以使学生将有限的时间用于提高能力.由于计算器强大的计算功能,使原来无法考查的应用问题有了测试的可能,有助于学生应用数学知识解决实际问题能力的提高.

三、提高一般能力是数学学习的重要目标

一般能力是指顺利完成各种活动所必备的基本心理能力.几年来课程教材改革和考试改革的实践表明,数学学科中的一般能力主要包括:学习新的数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学知识解决实际问题的能力和数学创新能力.具体来说,就是

1. 学习新的数学知识的能力

是指通过阅读,理解以前没有学过的新的数学知识(包括新的概念、定理、公式、法则和方法等),并能运用它们作进一步的运算和推理,解决有关问题的能力,这是一种学会学习的能力.

2. 探究数学问题的能力

探究数学问题的能力是指运用学过的数学知识,通过观察、试验、联想、类比、演绎、归纳、分析、综合、猜想等思维形式,对数学问题进行探索和研究的能力.

3. 应用数学知识解决实际问题的能力

应用数学知识解决实际问题的能力是指能正确理解问题背景,会分析给出的有关信息,并能进行提炼、加工,找出它们的数量关系,建立数学模型,从而解决实际问题的能力.

4. 数学创新能力

创新能力是指运用已知信息,通过开展思维和实践活动,产生某种新颖、独特的、有社会价值产品的能力,数学中的创新能力一般是指对已经掌握的数学知识、方法进行推广和拓展,对未知的数

学领域通过探索得到新的结果的能力. 对于中学生来说, 在很多情况下, 表现为他们自己想出解决问题的新的办法或策略, 对某些定理和公式的结论进行深化和延伸, 通过类比或推广得到新的命题等.

通过培养和提高一般能力, 可以使學生既能通过自学掌握数学基础知识和基本技能, 又会通过探索研究解决数学问题, 还能应用数学知识解决实际问题, 对数学知识能作一定的创新, 这样做无疑将大大推动学生素质的提高. 但是培养和提高一般能力不是一件容易的事, 它涉及到学习方式的改革, 为了做到这一点, 我们必须开展研究性学习, 在教师指导下, 学生通过观察、阅读、调查研究、查阅资料、动手操作、实验、收集分析和解读数据、提出假说或猜想、验证、表达和交流等活动, 自主地发现问题、探究问题、获得结论. 学会自己搜集和获得信息, 加工和处理信息, 学会探索和研究, 提高分析问题和解决问题的能力, 并能大胆创新, 敢于提出问题, 进行发散性思维、批判性思维和创造性思维, 培养创新意识. 在进行研究性学习的过程中, 问题解决是一个很重要的方面, 通过适当解一些能力型问题, 有利于提高学习新的数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学知识解决实际问题的能力和数学创新能力. 但是这里必须指出, 在解能力型问题时要注意不能再用过套题型、套模式的方法, 应该通过分析问题, 学习解决数学问题的方法, 掌握解决数学问题的策略, 提高解决问题的能力.

第二章 学习能力型问题的研究

学习新的数学知识的能力指的是通过阅读,理解以前没有学过的新的数学知识(包括新的概念、定理、公式、法则和方法等),并能运用它们作进一步的运算推理,解决有关问题的能力.这里我们简称为学习能力.

学习能力型问题常见的有以下几种情况:

1. 学习新的数学概念;
2. 学习新的数学定理、公式和法则;
3. 学习新的数学方法.

下面我们分别加以说明.

一、有关高考试题的命题设计和分析

1. 设椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 曲线 C_2 的方程为 $y = \frac{1}{x}$, 且 C_1 与 C_2 在第一象限内只有一个公共点 P .

(1) 试用 a 表示 P 点的坐标;

(2) 设 A, B 是椭圆 C_1 的两个焦点, 当 a 变化时, 求 $\triangle ABP$ 的面积函数 $S(a)$ 的值域;

(3) 记 $\min\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 为 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 中的最小的一个. 设