现代数学基础丛书 25

有限群导引

上册

(第二版)

徐明曜 著

科学出版社
www.sciencep.com

现代数学基础丛书 25

有限群导引

上册

（第二版）

徐明曜 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书分上下册出版. 上册包括前六章和一个附录，可作为综合大学和师范院校数学、物理和化学专业高年级学生的教材，主要内容是，群论的基本概念，群在集合上的作用及其应用，群的构造理论，幂零群和 p-群，可解群和有限群表示论等.

本书用尽量少的篇幅介绍有限群论的基本知识和方法，为了应用特别突出方法，本书包含相当数量的习题. 书末还有解答和提示.

本书适于大学数学、物理、化学高年级学生、研究生、教师和有关科技工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

有限群导引(上)/徐明曜著. —北京:科学出版社,1999.3
(现代数学基础丛书;25)
ISBN 978-7-03-007119-4

Ⅰ. 有…　Ⅱ. 徐…　Ⅲ. 有限群　Ⅳ. 0152.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 34282 号

责任印制:安春生/封面设计:黄华斌　陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
1987 年 12 月第 一 版　开本:B5(720×1000)
1999 年 3 月第 二 版　印张:19
2007 年 1 月第四次印刷　字数:242 000
印数:7 401—9 400

定价:36.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

上册第二版前言

自本书上册于1987年由科学出版社出版以来，已经过去了11年．它作为多所高校数学系研究生和高年级本科生的教材得到了广泛的使用．因此初版印刷的三千册早已售完．另一方面，由于作者方面的原因，本书下册一直未能交稿付印．在这11年间，作者不断收到读者来信询问下册何时出版，以及要求购买早已售缺的上册，这对我们是很大的鞭策和鼓励．现在，在科学出版社的帮助下，终于完成了下册的出版工作，并借此机会重印上册，以飨读者．我们谨对关心本书的学术界朋友和广大读者，以及科学出版社的同志们表示衷心的感谢．

根据使用的情况，我们认为上册的选材和难度等都是比较适当的．再版时拟基本维持原状，在前五章中除改正了原书中的印刷错误外，只作了很少的改动．如对个别定理的证明给了简化等．但是在第VI章中则作了较大的改动．我们根据使用本书的读者多为研究生的实际情况，对常表示的叙述改用模的语言，加入了群代数、半单代数的结构等内容．这可使读者能更深人地理解常表示的实质．另外，“指标”一词按我国数学界的通常叫法改为“特征标”．

上册的部分修改和计算机排版工作是我在广西大学访问时完成的，班桂宁教授给予了很多帮助，特在此致谢．又，北方交大的冯衍全博士也协助进行第VI章的录人工作，在此一并致谢．

徐明曜

1998年于广西大学

上册第一版前言

在抽象代数课程中我们知道，群是现代代数最基本和最重要的概念之一．它在数学本身以及现代科学技术的很多方面都有广泛的应用．比如在理论物理、量子力学、量子化学、结晶学等方面的应用就是明证．因此，在我们学习了抽象代数课程之后，更深入地研究群的理论是很有必要的．

在群论的众多分支中，有限群论无论从理论本身还是从实际应用来说都占据着更为突出的地位．同时，它也是近年来研究最多、最活跃的一个数学分支．最近 20 多年来，经过很多数学家的努力，在有限群中取得了一连串的突破，并终于在 1981 年解决了著名的有限单群分类问题．这项重大的科学成果的得来是很不容易的．如果从 1832 年 Galois 证明交错群 A_5 是单群算起，整整经历了 150 年．参加这项工作的数学家前后共达几百人．为了证明单群分类定理，即有限单群共有 18 个无限族和 26 个零散单群，人们使用了抽象群论的、表示论的 (包括常表示和模表示) 、几何的以及组合论和图论的方法，在杂志上发表了数千页以至上万页的论文．这些论文的总体就构成了单群分类定理的证明．当然人们希望能有一个完整的证明，但在今天看来，要写出这样的证明还需要一定的时间．关于这方面的详细情况，读者可参看 D. Gorenstein 的专著 "Finite Simple Groups" 一书． (Plenum Press, New York, 1982.)

由于这项重大的成果，在数学界中形成了 "有限群热", 很多学数学甚至学物理的大学生和研究生都想学一点有限群的知识．

从国内来看，不只综合性大学数学系纷纷开设有限群课程，很多师范院校也开了这门课. 本书就是作者 1981–1983 年间在北京大学数学系为大学生和研究生开设有限群课时所编写的讲义. 这个讲义作者前后使用了四次，进行了三次较大的修改. 外校也有一些同志使用这个教材，并提出了不少宝贵的意见和建议.

本书分为上、下两册. 上册包括前六章和一个附录，可作为综合大学或师范学院数学专业本科高年级同学 (已学过抽象代数) 一个学期的选修课的教材. 根据作者的实践，在 54 课时 (每周 3 课时，共 18 周) 的时间中，约可讲完六章中的五章. 只对抽象群感兴趣的教师如感到时间不够可只讲前五章，第 VI 章留给学生自己阅读. 也可以在讲完前三章之后，后面的三章只选讲前面的几节，剩下的材料供学生阅读. 附录中的所谓“研究题”是供大学生做毕业论文时参考用的. 它们或者是较难的习题，或者是一个小的专题，里面包含一些未解决的问题或进一步研究的方向，学完了上册的大学生就可以在这些题目上试试自己的能力. 对于这些研究题，通常我们只指出参考文献，有的也给出解决它的较详细的提示.

本书的下册主要是供研究生用的，其中第 VII–XI 章是有限群的基本知识，对于并非专攻有限群的研究生来说，学习这几章也是有必要的. 但是从第 XII 章起，则是比较专门的材料，它们的选择大部分出自作者个人的兴趣. 但是作者认为在单群分类问题解决之后，它们仍然是可以研究的有意义的课题. 下册如作为研究生一个学期的群论课的教材，前五章是一定要讲的，后面则可由教师随意选讲一部分. 当然全书也可供自学者使用. 读者只要扎实地学完了前 11 章，就能够接触有限群的现代文献，并开始对某些问题进行独立的研究. 从作者的教学实践来看，这点是可以做到的.

还有几点是需要向读者说明的.

1. 本书是作为教材而编写的，目的是用尽量少的篇幅介绍有限群论的基本知识和基本方法，特别是要突出方法. 因此从知识上并不追求完全，相当多的内容是为了介绍方法而写入的.

2. 阅读本书之前应该学过抽象代数课程. 比如读过 N. Jacobson 的 "Basic Algebra I" 的前两章并做过其中大部分习题. 我们劝告那些没有学过抽象代数或者抽象代数训练不够的人不要企图阅读本书. 如果一定要阅读, 势必事倍功半. 基于这种考虑, 第 I 章中多数定理的证明被省略了. 但是这一章还必须仔细阅读, 因为其中补充了很多在抽象代数课程中并不重要但对有限群论具有基本意义的东西.

3. 由于读者都受过较充分的抽象代数的训练, 在本书中定理的证明写得比较简短, 常给读者留有思考的余地. 这样读起来可能会感到吃力, 但对训练推理能力以及将来阅读文献都会有一定的帮助.

4. 本书中的习题是不可不做的, 它们是本书重要的组成部分. 这些习题难易程度不等, 对于稍难一些的题目在书末都附有提示.

5. 我们叙述定义、定理等是依章节统一编号. 在引述前面的结果时, 如果是在本章中, 则不指明所属的章; 如果是在前面各章, 则用罗马数字表明章号. 例如, "定理 2.3" 是指本章中的定理 2.3, 而 "II,3.11" 是指第 II 章的定理 3.11.

编写本书主要参考了以下三本书:

1. B. Huppert, Endliche Gruppen I, Springer-Verlag, 1967.

2. H. Kurzweil, Endliche Gruppen, Springer-Verlag, 1977.

3. D. Gorenstein, Finite Groups, Harper & Row Publishers, New York, 1980.

Huppert 的书是有限群论的一部巨著, 也是搞有限群论的人必备的参考书. 目前这本书的第 II, III 两卷也已经出版, 并加进了合作者 N. Blackburn. 后两卷是用英文写的, 三卷合在一起有近两千页的篇幅. 后两卷是

4. B. Huppert and N. Blackburn, Finite Groups II, III, Springer-Verlag, 1982.

中文的参考书有以下几种:

5. 张远达, 有限群构造, 科学出版社, 1982.

6. 陈重穆，有限群论基础，重庆出版社， 1983.
7. M. Hall 著，裘光明译，群论，科学出版社， 1981.

最后，我要感谢我的导师段学复教授，他给作者很多帮助和鼓励. 此外，我的同事刘力前同志，曾经参加编写 1981 年版本讲义的第七、八两章；河北大学邵惠伯同志、杭州大学姜豪同志、湖南益阳师专陈进之同志以及我校研究生张继平、张来武等同志都对本书提了很多宝贵的修改意见，特在此一并致谢.

徐明曜

1986 年于北京大学

目　录

第 I 章

群论的基本概念

本章是对抽象代数课程中已经学过的群论的基本概念进行复习和补充. 因此, 多数结果不再给出证明.

§1. 群和子群

§1.1 群的定义

定义一个群有多种不同的方式.

定义 1.1 称非空集合 G 为一个 *群*, 如果在 G 中定义了一个二元运算, 叫做乘法, 它满足

(1) *结合律*: $(ab)c = a(bc)$, $a, b, c \in G$;

(2) 存在 *单位元素*: 存在 $1 \in G$, 使对任意的 $a \in G$, 恒有

$$1a = a1 = a;$$

(3) 存在 *逆元素*: 对任意的 $a \in G$, 存在 $a^{-1} \in G$, 使得

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

上述条件 (2), (3) 可以分别减弱为

(2′) 存在左 (右) 单位元素: 存在 $1 \in G$, 使对任意的 $a \in G$, 有 $1a = a$ $(a1 = a)$;

(3′) 存在左 (右) 逆元素: 对任意的 $a \in G$, 存在 $a^{-1} \in G$, 使得 $a^{-1}a = 1$ $(aa^{-1} = 1)$.

即，条件 (1), (2′) 和 (3′) 亦可定义一个群.

定义 1.2 称非空集合 G 为一个群，如果在 G 中定义了一个二元运算，叫做乘法. 它满足

(1) 结合律：$(ab)c=a(bc)$, $a,b,c\in G$;

(4) 对任意的 $a,b\in G$, 存在 $x,y\in G$, 满足 $ax=b$ 和 $ya=b$.

定义 1.1 和定义 1.2 是等价的.

在任一群 G 中，还成立下述运算规律：

(5)*消去律*: 对任意的 $a,b,c\in G$ 成立

$$ac=bc\Rightarrow a=b$$

和

$$ca=cb\Rightarrow a=b.$$

一般来说，条件 (1) 和 (5) 不足以定义一个群. 例如全体正整数集合对于加法就满足条件 (1) 和 (5), 但它不是群. 可是我们有下面的结论：

定理 1.3 *有限非空集合 G 是群，如果 G 中定义了一个二元运算，满足条件 (1) 和 (5).*

定义 1.4 如果群 G 满足

(6) *交换律*: $ab=ba$, $a,b\in G$, 则称 G 为 *交换群* 或 *Abel群*.

对于以上给出的群的定义，请读者自已检查是否熟悉下列事项的证明：

(1) 由单位元素的存在性推出它的唯一性;

(2) 由逆元素的存在性推出它的唯一性;

(3) 证明条件 (1), (2), (3) 和 (1), (2′), (3′) 的等价性;

(4) 证明定义 1.1 和定义 1.2 的等价性;

(5) 证明定理 1.3;

(6) 由结合律 (1) 推出下面的 *广义结合律*:

(1′) 广义结合律：对于任意有限多个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in G$, 乘积 $a_1a_2\cdots a_n$ 的任何一种"有意义的加括号方式"[1] 都得出相同的值，因而上述乘积是有意义的.

(7) 在交换群 G 中，乘积 $a_1a_2\cdots a_n$ 的诸因子任意交换次序，其值不变.

注 1.5 (1) 定义一个群还有很多其他的方式，例如可见 M. Hall 的《群论》(中译本) §1.3.

(2) 如果定义 1.1 中把 (2′), (3′) 两条改为有左单位元素和右逆元素，则 G 不一定是一个群，可参看研究题 1.

下面对我们使用的符号做些说明：我们用大写拉丁字母 $G, H, K, A, B, \cdots$ 表示群或集合，小写拉丁字母 $a, b, c, \cdots$ 表示它的元素；以 1 表示群的单位元素以及仅由单位元素组成的子群，对二者不加区别，读者可从上下文来判断 1 究竟代表单位元素还是单位子群，以 $|G|$ 表示集合 G 的势. 如果 G 是群，则 $|G|$ 叫群的**阶**. 又，称 G 为有限群，如果 $|G|$ 是有限数，否则叫做无限群.

由广义结合律 (1′), 任意有限多个元素的乘积 $a_1a_2\cdots a_n$ 是有意义的. 特别地，我们可以规定群 G 中元素 a 的整数次方幂如下：设 n 为正整数，则

$$a^n = \underbrace{aa\cdots a}_{n\text{ 个}},\ a^0 = 1,\ a^{-n} = (a^{-1})^n.$$

显然有

$$a^m a^n = a^{m+n},\ m, n\text{是整数}.$$

又，对于乘积的逆，有下列法则：

命题 1.6 设 G 是群，$a_1, a_2, \cdots, a_n \in G$, 则

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1}\cdots a_2^{-1}a_1^{-1}.$$

[1] 因为群的乘法是二元运算，根据定义，只有两个元素的乘积才有意义，多个元素的乘积必须通过逐步作两个元素的乘积来实现. 所谓"有意义的加括号方式"指的就是给定的一种确定的运算次序. 例如对乘积 $abcde$, 我们称 $((ab)c)(de)$, $((a(bc))d)e, \cdots$ 等为"有意义的加括号方式", 但 $((abc)d)e$, $(ab)(cd)e, \cdots$ 等则不是.

§1.2 子群

设 G 是群， H,K 是 G 的子集，规定 H,K 的乘积为

$$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}.$$

如果 $K = \{a\}$, 仅由一个元素 a 组成，则简记为 $H\{a\} = Ha$; 类似地有 aH 等. 我们还规定

$$H^{-1} = \{h^{-1} \mid h \in H\}.$$

很明显，子集的乘法也满足结合律，因而也可以定义子集 H 的正整数次幂 H^n, 并且对子集的乘法也成立命题 1.6.

定义 1.7 称群 G 的非空子集 H 为 G 的 *子群*, 如果 $H^2 \subseteq H$, $H^{-1} \subseteq H$. 这时记作 $H \leq G$.

事实上，易验证如果 H 是 G 的子群，则必有 $H^2 = H$, $H^{-1} = H$, 并且 $1 \in H$. 显然，任何群 G 都有二子群 G 和 1, 叫做 G 的 *平凡子群*.

命题 1.8 *设 G 是群， $H \subseteq G$; 则下列命题等价:*
(1) $H \leq G$;
(2) 对任意的 $a, b \in H$, 恒有 $ab \in H$ 和 $a^{-1} \in H$;
(3) 对任意的 $a, b \in H$, 恒有 $ab^{-1} \in H$(或 $a^{-1}b \in H$).

命题 1.9 *设 G 是群， $H \subseteq G$, $|H|$ 是有限数，则*

$$H \leq G \iff H^2 \subseteq H.$$

若干个子群的交仍为子群，即我们有

定理 1.10 *设 G 是群. 若 $H_i \leq G$, $i \in I$, I 是某个指标集，则 $\bigcap_{i \in I} H_i \leq G$.*

一般来说若干子群的并不是子群，但我们有下述概念:

定义 1.11 设 G 是群, $M \subseteq G$ (允许 $M = \varnothing$), 则称 G 的所有包含 M 的子群的交为 *由 M 生成的子群*, 记作 $\langle M \rangle$.

容易看出, $\langle M \rangle = \{1, a_1 a_2 \cdots a_n \mid a_i \in M \cup M^{-1},\ n = 1, 2, \cdots\}$.

如果 $\langle M \rangle = G$, 我们称 M 为 G 的一个 *生成系*, 或称 G 由 M 生成. 仅由一个元素 a 生成的群 $G = \langle a \rangle$ 叫做 *循环群*. 可由有限多个元素生成的群叫做 *有限生成群*. 有限群当然都是有限生成群.

对于群 G 中任意元素 a, 我们称 $\langle a \rangle$ 的阶为 *元素 a 的阶*, 记作 $o(a)$, 即 $o(a) = |\langle a \rangle|$. 由此定义, $o(a)$ 是满足 $a^n = 1$ 的最小的正整数 n, 而如果这样的正整数 n 不存在, 则 $o(a) = \infty$.

下面的结论是十分重要的.

定理 1.12 设 G 是群, $H \leq G, K \leq G$, 则

$$HK \leq G \iff HK = KH.$$

证 $\Rightarrow$: 由 $HK \leq G$ 有 $(HK)^{-1} = HK$, 即 $K^{-1}H^{-1} = HK$. 又由 $H \leq G$, $K \leq G$, 有 $H^{-1} = H$, $K^{-1} = K$, 于是 $KH = HK$.

$\Leftarrow$: 由 $HK = KH$ 可得 $(HK)^2 = HKHK = HHKK = HK$, $(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH = HK$, 由定义 1.7 即得 $HK \leq G$. □

§1.3 子群的陪集

定义 1.13 设 $H \leq G$, $a \in G$. 称形如 $aH(Ha)$ 的子集为 H 的一个 *左 (右) 陪集*. 容易验证 $aH = bH \iff a^{-1}b \in H$. 类似地有 $Ha = Hb \iff ab^{-1} \in H$.

命题 1.14 设 $H \leq G, a, b \in G$, 则

(1) $|aH| = |bH|$;

(2) $aH \cap bH \neq \varnothing \Rightarrow aH = bH$.

于是, G 可表成 H 的互不相交的左陪集的并:

$$G = a_1 H \cup a_2 H \cup \cdots \cup a_n H,$$