领航 高考

GAO KAO LING HANG

▶ 主编：李成民

新精活实展平台　翱翔高飞圆梦想

高考总复习

2010 Gaokaolinghang

数学（理）

青海人民出版社

高考领航

Gaokaolinghang

2010

本册主编/徐雪静　郑永广

副主编/刘兴堂　张超　郭好霞

邵彦明　闫霞　李冠臣

石华清　张利民　高文静

乔金花　李士彬　张胜

宋国兴

主编：李成民

班　　级________________

姓　　名________________

任课教师________________（恩师难忘哦！）

你的同桌________________（多年以后你是否会想起？）

图书在版编目（CIP）数据

高考领航系列丛书.数学(理)/李成民主编.-西宁：青海人民出版社，2008.12

ISBN 978-7-225-03323-5

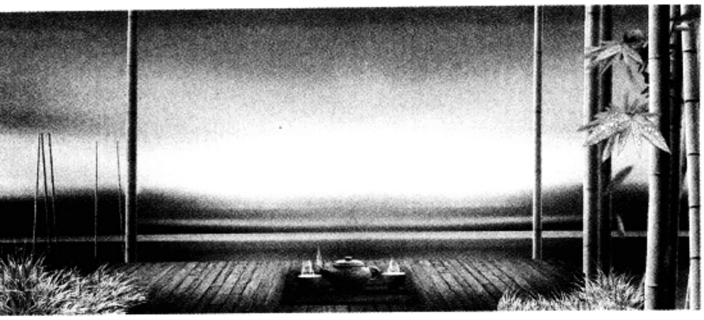
Ⅰ.高...　Ⅱ.李...　Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第208915号

高考领航——高考总复习

主　　编	李成民
责任编辑	康　瑛
封面设计	艺彩工作室
出版发行	青海人民出版社
地　　址	青海省西宁市同仁路 10 号
印　　刷	山东梁山印刷有限公司
开　　本	880x1230　1/16
印　　张	25
字　　数	290 千字
版　　次	2009 年 2 月第 1 版
印　　次	2009 年 2 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-225-03323-5
定　　价	57.60 元

本书如有破损、缺页、装订错误，请与我社联系。



前言
Preface

点燃青春激情 成就非凡梦想

泡一杯香茗，望着刚刚放在书案上的《高考领航》系列丛书，闻着它散发出的阵阵馨香之气，眼睛不由得有些湿润，想起伴它诞生的日日夜夜，真是感慨万千。

今天，无论是出版行业，还是整个世界，都经历了巨大的变化。书业亦已大不同于往常，竞争趋于白热化，并波及到各个环节，只有强者、创新者才能在这样的环境中生存下来，更重要的是，只有智者，才能走向繁荣兴旺。竞争是件好事，它使我们在压力下清洗大脑，改变思维模式；它有利于改变教辅市场单调的图书模式。

萧伯纳曾经说过，假如你有一个苹果，我有一个苹果，当我们交换之后，每人仍然只是一个苹果；但是，如果你有一个思想，我有一个思想，当我们交换之后，就会有两个思想。为此，更为了把《高考领航》系列丛书以一个崭新的面孔面对师生，以良好的编写理念面对使用者，我们丛书编委走遍了大江南北，拜访了众多名校名师，深入课堂听课，走进师生之中，倾听他们的心声，获得了第一手的教考信息和编写资料。样稿编出后，我们直接找一线教师和在校学生去审读，听取他们的意见后再行修订。如此再三，力争丛书以新的理念、新的版式、新的内容面对广大师生。在此，真的感谢名校一线的部分高级教师们，他们那种一丝不苟、反复推敲的敬业精神给我们留下了深刻的印象。

理想的教辅本身就应该是一个知识仓库，里面装满了所有编者的智慧，为学生的学习创造一个求知的广阔天地。冷静思考，本丛书主要有三个特点：一是内涵丰富，不仅有对知识的理性思考、感性认识，还有它的人文关怀。所涉及的题例新颖、实用、翔实，对学生的学习具有极大帮助。二是体现探究合作，教育的发展趋向是合作与对话，本丛书所选内容为师生共同交流、探究提供了一个平台，强调师生之间共同切磋，协调合作，彼此支持。三是实践为本，本书内容体现了“从实践中来，到实践中去”的教育新理念，所选案例题都直接面对社会所面临的问题，采用实践的逻辑，坚持实践为本，在实践中提高学生学习能力，在实践中改造自我，以实现理论和实践的统一。

生命到处存在，人生何其多彩。人生本身就是一个奋斗、学习的过程，很想为天下学子提供一本人文化、理想化、能够轻松提高自身学习能力的教辅。我们尽力了，真的希望你们能喜欢它，它亦能成为你们学途中的一个知己。“十年树木，百年树人”，“没有最好，只有更好”。

我们会继续努力。

《高考领航》编委会

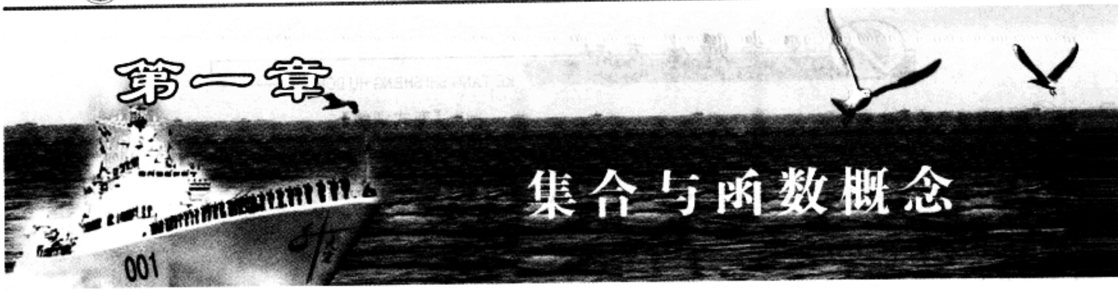
2009年2月

目录

CONTENTS

目录

CONTENTS



知识网络

- 集合
  - 集合表示法
    - 列举法
    - 描述法
    - 图表法
  - 集合关系
    - 包含
    - 相等
  - 集合运算
    - 交集
    - 并集
    - 补集

- 简易逻辑
  - 简单命题
  - 逻辑联结词 → 四种命题间关系 → 充要条件
    - 互逆关系
    - 互否关系
    - 互为逆否关系
  - 复合命题

考纲解读

1. 理解集合、子集、补集、交集、并集的概念，了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单的集合.

2. 理解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义，理解四种命题及其相互关系，掌握充分条件，必要条件及充要条件的意义.

命题要点

在高中数学中，集合的初步知识与简易逻辑知识和其他内容有着密切联系，它们是学习、掌握和使用数学语言的基础，在每年的高考试题中均有一定的体现，本章在高考试题中的类型和大致特点有：

1. 题型大多为客观题(其中大多数为选择题)，而解答题较少.

2. 考点内容基本上为集合以及本身内部知识的简单综合，且试题难度较低，属送分题.

3. 集合与简易逻辑，这一章在高考试卷中，主要出现于客观题部分，且题量一般在一道左右，主要考查学生“集合”“充分条件与必要条件”的基本概念和基本性质以及运算能力.

4. 由于近几年高考试题经常涉及“简易逻辑”(特别是和命题有关的试题)方面的内容，因此在复习中应给予高度的重视.

§ 1.1 集合的概念与运算

高考知识清单 GAO KAO ZHI SHI QING DAN

1. 集合概念

(1)元素的性质：确定性、互异性、无序性.

(2)集合表示法：列举法、描述法、图表法.

(3)集合分类：无限集、有限集

【深化思考 1】

怎样理解空集，它与集合$\{0\}$，$\{\varnothing\}$之间有何关系？

2. 集合间关系

(1)集合与元素关系：$\in$或$\notin$

(2)集合与集合间关系：$A\subseteq B$或$A\subsetneqq B$.

(3)集合相等：若两个集合中的元素完全相同，则两集合相等. 记作$A=B$.

3. 集合间运算关系

(1)交集：记作$A\cap B=\{x|x\in A$且$x\in B\}$

性质：①$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$.

② $A\cap A=A$，$A\cap\varnothing$

(2)并集：记作$A\cup B=\{x|x\in A$或$x\in B\}$

性质：①$A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$.

②$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$

(3)补集：$\complement_U A=\{x|x\in U$且$x\notin A\}$

性质：①$\complement_U(\complement_U A)=A$，$\complement_U U=\varnothing$，$\complement_U\varnothing=U$

②$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$，$A\cup(\complement_U A)=U$

【深化思考 2】

设有限集合A，$\mathrm{card}(A)=n(n\in\mathbf{N}^*)$，证明$A$的子集个数是$2^n$个.

课堂师生互动

KE TANG SHI SHENG HU DONG

题型1 集合的基本概念

例1 已知 $A=\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$，若 $1\in A$，求实数 a 值.

【解】 $\because 1\in A$，则 $a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3$ 都可能为1，则需分类讨论解决，且必须验证元素的互异性.

(1)若 $a+2=1$，则 $a=-1$，此时 $a+2=a^2+3a+3=1$ 与集合中元素互异性矛盾(舍去).

(2)若 $(a+1)^2=1$，则 $a=0$ 或 $a=-2$.

当 $a=0$ 时，$A=\{2,1,3\}$ 满足题意；

当 $a=-2$ 时，$A=\{0,1,1\}$ 与集合中元素互异性矛盾(舍去).

(3)若 $a^2+3a+3=1$，则 $a=-1$(舍去)或 $a=-2$(舍去)

综上所述 $a=0$.

【点评】 本例重在考查集合中元素的互异性，解题时注意应用分类讨论思想.

【变式训练】

1. 已知集合 $A=\{x\in \mathbf{N}|\frac{12}{6-x}\in \mathbf{N}\}$，试用列举法表示集合 A.

例2 现有三个实数的集合，既可以表示为 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$，也可表示为 $\{a^2,a+b,0\}$，则 $a^{2008}+b^{2008}=$________.

【解析】 根据集合中元素的确定性，我们不难得到两集合的元素是相同的，这样需要列方程组分类讨论，显然复杂又繁琐. 这时若能发现0这个特殊元素，和 $\frac{b}{a}$ 中的 a 不为0的隐含信息，就能得到如下解法.

由已知得 $\frac{b}{a}=0$，及 $a\neq 0$，所以 $b=0$，于是 $a^2=1$，即 $a=1$ 或 $a=-1$. 又根据集合中元素的互异性 $a=1$ 应舍去，因而 $a=-1$，

故 $a^{2008}+b^{2008}=(-1)^{2008}=1$.

【答案】 1

【点评】 (1)利用集合中元素的特点，列出方程组求解，但仍然要检验，看所得结果是否符合集合元素的互异性的特征.

(2)此类问题还可以根据两集合中元素的和相等，元素的积相等，列出方程组求解，但仍然要检验.

【变式训练】

2. 若 $x\in \mathbf{R}$，则 $\{3,x,x^2-2x\}$ 中的元素 x 应满足什么条件？

题型2 集合间的基本运算

例3 设 $A=\{x|x^2+4x=0\}$，$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$，

(1)若 $A\cap B=B$，求 a 的值；

(2)若 $A\cup B=B$，求 a 的值.

【解】 $A=\{0,-4\}$，

(1) $\because A\cap B=B$，$\therefore B\subseteq A$.

①若 $0\in B$，则 $a^2-1=0$，解得 $a=\pm 1$，当 $a=1$ 时，$B=\{x|x^2+4x=0\}=A$，当 $a=-1$ 时，$B=\{0\}\subsetneqq A$，

②若 $-4\in B$，则 $a^2-8a+7=0$，解得 $a=7$ 或 $a=1$，

当 $a=7$ 时，$B=\{x|x^2+16x+48=0\}$

$=\{-12,-4\}\nsubseteq A$.

③若 $B=\varnothing$，则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$，解得 $a<-1$.

综上所述，$a\leqslant -1$ 或 $a=1$.

(2) $\because A\cup B=B$，$\therefore A\subseteq B$，

$\because A=\{0,-4\}$，而 B 中最多有两个元素，$\therefore A=B$，即 $a=1$.

【点评】 进行集合运算，首先要分析、简化每个集合. 本题集合 B 中含有字母 a，因此分类讨论思想是本题的重要思想. 根据判别式 Δ，可分 $B=\varnothing$ 和 $B\neq\varnothing$ 两类，解题中切莫漏掉"空集". 另外，本例解法中通过对 $0,-4$ 的代入试值运算，确定 a 的取值，使运算更简捷，从而避免了解一元二次方程的繁琐计算.

【变式训练】

3. 已知集合 $A=\{x|x^2-x=0\}$，$B=\{x|ax^2-2x+4=0\}$，且 $A\cap B=B$，求实数 a 的取值范围.

题型3 集合与函数、方程、不等式等知识联系

例4 已知：命题 p：$f^{-1}(x)$ 是 $f(x)=1-3x$ 的反函数，且 $|f^{-1}(a)|<2$；命题 q：集合 $A=\{x|x^2+(a+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x>0\}$，且 $A\cap B=\varnothing$.

(1)解不等式 $|f^{-1}(a)|<2$；

(2)求使命题 p、q 中有且只有一个真命题时实数 a 的取值范围.

【解】 对于(1)先求反函数再解不等式，对(2)先求 p、q 为真时 a 的取值. 利用补集运算，求 p、q 为假时 a 的取值.

(1)$\because f(x)=1-3x$，$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{1-x}{3}$，由 $|f^{-1}(a)|<2$，$\left|\dfrac{1-a}{3}\right|<2$，

解得 $-5<a<7$，$\therefore$ 不等式的解集为 $\{a|-5<a<7\}$.

(2)设 $x^2+(a+2)x+1=0$ 的判别式为 Δ，

当 $\Delta<0$ 时 $A=\varnothing$，此时 $\Delta=(a+2)^2-4<0$，$\therefore -4<a<0$，

当 $\Delta\geqslant 0$ 时，由 $A\cap B=\varnothing$，

得 $\begin{cases}\Delta=(a+2)^2-4\geqslant 0\\ x_1+x_2=-(a+2)<0\\ x_1\cdot x_2=1>0\end{cases}$，解得 $a\geqslant 0$，综上可得 $a>-4$.

①要使 p 真 q 假，则 $\begin{cases}-5<a<7\\ a\leqslant -4\end{cases}\Rightarrow -5<a\leqslant -4$，

②要使 p 假 q 真，则 $\begin{cases}a\leqslant -5 \text{ 或 } a\geqslant 7\\ a>-4\end{cases}\Rightarrow a\geqslant 7$，

$\therefore$ 当 a 的取值范围为 $(-5,-4]\cup[7,+\infty)$ 时，

命题 p、q 中有且只有一个为真命题.

【点评】 本例重在考查集合与逻辑，函数，方程，不等式等内容的综合应用.

【变式训练】

4. 已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+mx-y+2=0\}$ 和 $B=\{(x,y)|x-y+1=0,0\leqslant x\leqslant 2\}$，如果 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

解题误区探因 JIE TI WU QU TAN YIN

已知 $f(x)=x^2$，集合 $A=\{x|f(x+1)=ax\}$，且 $A\cup\mathbf{R}^+=\mathbf{R}^+$，求实数 a 的取值范围.

【错解】 由 $f(x+1)=ax$ 和 $f(x)=x^2$ 可得 $x^2+(2-a)x+1=0$，又由 $A\cup\mathbf{R}^+=\mathbf{R}^+$，得 $A\subseteq\mathbf{R}^+$，即 $x>0$，

则有 $x^2+(2-a)x+1=0$ 有正根，故有 $\begin{cases}\Delta=(2-a)^2-4\geqslant 0,\\ x_1+x_2=a-2>0,\\ x_1x_2=1>0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a\geqslant 4 \text{ 或 } a\leqslant 0,\\ a>2\end{cases}\Rightarrow a\geqslant 4$. $\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $[4,+\infty)$.

【剖析】 错解中由 $A\cup\mathbf{R}^+=\mathbf{R}^+$ 得出 $A\subseteq\mathbf{R}^+$，但忽视了 $A=\varnothing$ 时的情况.

【正解】 (1)当 $A\neq\varnothing$ 时，由上述错解知 $a\geqslant 4$；

(2)当 $A=\varnothing$ 时，$x^2+(2-a)x+1=0$ 无实数根，则有 $\Delta=(2-a)^2-4<0\Rightarrow 0<a<4$，综合(1)(2)可得 a 的取值范围是 $a>0$.

思想方法小结 SI XIANG FANG FA XIAO JIE

1. 集合的思想方法：如用集合的语言表述数学问题，如解不等式；用集合的观点研究解决数学问题，如利用集合关系求参数的取值范围.

2. 数形结合的思想方法：如利用 Venn 图表示集合，在解答问题时，首先应明确集合元素的意义，作好文字语言与符号语言、图形语言的转化，注意数形结合，充分利用文氏图或数轴的直观性来帮助解题.

3. 在这里运用数轴解题时，要注意“端点”的取与舍.

(1)对于集合问题，要确定属于哪一类集合(数集、点集或图形集)，然后再确定处理此类问题的方法.

(2)关于集合的运算，一般应把各参与运算的集合化到最简形式，再进行运算.

(3)含参数的集合问题，多根据集合中元素的互异性处理，有时需要用到分类讨论、数形结合的思想.

(4)集合问题多与函数、方程、不等式有关，要注意各类知识的融会贯通.

§1.2 绝对值不等式、一元二次不等式的解法

高考知识清单 GAO KAO ZHI SHI QING DAN

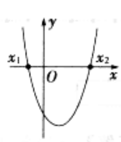
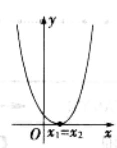
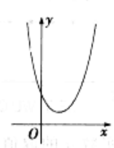
1. 含绝对值的基本不等式的解法

不等式类型	解 法
$\|x\|>a(a>0)$	$\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$
$\|x\|<a(a>0)$	$\Leftrightarrow -a<x<a$
$\|ax+b\|>c(c>0)$	$\Leftrightarrow ax+b>c$ 或 $ax+b<-c$
$\|ax+b\|<c(c>0)$	$\Leftrightarrow -c<ax+b<c$
$c<\|ax+b\|<d(c>0)$	$\Leftrightarrow c<ax+b<d$ 或 $-d<ax+b<-c$

【深化思考 1】

怎样解型如 $|f(x)|<g(x)$；$|f(x)|>g(x)$ 的不等式？

2. 一元二次方程、一元二次不等式和二次函数之间的关系

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ 的根	有两相异实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	无实根
$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集	$\{x\|x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\{x\|x\in R$ 且 $x\neq-\frac{b}{2a}\}$	R
$ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集	$\{x\|x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

【深化思考 2】

解一元二次不等式的一般步骤是什么？

3. 分式不等式的解法

先将分式不等式移项通分整理为一边为 0 的形式，再等价转化为整式不等式求解，即

(1) $\frac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$；

(2) $\frac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$；

(3) $\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\geqslant 0\\ g(x)\neq 0\end{cases}$；

(4) $\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\leqslant 0,\\ g(x)\neq 0.\end{cases}$

4. 高次不等式的解法

(1)一元高次不等式常用"数轴标根法"(或称"区间法"、"穿根法").

(2)"数轴标根法"解一元高次不等式的步骤：

①将 $f(x)$ 的最高次项的系数化为正数；

②将 $f(x)$ 分解为若干个一次因式的积；

③将每一个一次因式的根标在数轴上，从右上方依次穿过每一个根点画曲线；

④根据曲线显现出 $f(x)$ 的符号变化规律，写出不等式的解集.

【深化思考 3】

高次不等式分解因式后，用数轴穿根法求解，若出现重根，如何进行穿根？

课堂师生互动 KE TANG SHI SHENG HU DONG

题型 1 简单绝对值不等式的解法

例 1 解下列关于 x 的不等式.

(1) $|2x+1|+|x-2|>4$；

(2) $1<|2x+1|\leqslant 3$.

【解】 (1)原不等式等价于 $\begin{cases}x\leqslant-\frac{1}{2},\\ -2x-1-x+2>4,\end{cases}$

【变式训练】

1. 解不等式 $1\leqslant|2x-1|<5$.

或$\begin{cases}-\frac{1}{2}<x\leqslant 2,\\ 2x+1-x+2>4,\end{cases}$ 或$\begin{cases}x>2,\\ 2x+1+x-2>4.\end{cases}$

即 $x<-1$ 或 $1<x\leqslant 2$ 或 $x>2$.

∴原不等式的解集为$\{x|x<-1$ 或 $x>1\}$.

(2)∵$1<|2x+1|\leqslant 3 \Leftrightarrow -3\leqslant 2x+1<-1$ 或 $1<2x+1\leqslant 3 \Leftrightarrow -2\leqslant x<-1$ 或 $0<x\leqslant 1$.

∴原不等式的解集为$\{x|0<x\leqslant 1$ 或 $-2\leqslant x<-1\}$.

【点评】 此类不等式中有绝对值符号,解题关键是去掉绝对值符号,转化为普通不等式求解,可以根据绝对值的定义和性质进行.

题型2 一元二次不等式的解法

例2 解关于 x 的不等式 $ax^2-2\geqslant 2x-ax(a\in\mathbf{R})$.

【解】 首先把不等式化为一元二次不等式的标准形式,根据 $a=0$ 或 $a\neq 0$,求方程根,再比较根的大小,写出解集.

原不等式变形为 $ax^2+(a-2)x-2\geqslant 0$,

①$a=0$ 时,$x\leqslant -1$;

②$a\neq 0$ 时,不等式即为$(ax-2)(x+1)\geqslant 0$,

当 $a>0$ 时,$x\geqslant\frac{2}{a}$ 或 $x\leqslant -1$,由于 $\frac{2}{a}-(-1)=\frac{a+2}{a}$.

于是,当 $-2<a<0$ 时,$\frac{2}{a}\leqslant x\leqslant -1$,

当 $a=-2$ 时,$x=-1$,当 $a<-2$ 时,$-1\leqslant x\leqslant\frac{2}{a}$,

综上所述,$a=0$ 时,解集为:$\{x|x\leqslant -1\}$;

$a>0$ 时,解集为:$\{x|x\geqslant\frac{2}{a}$ 或 $x\leqslant -1\}$;

$-2<a<0$ 时,解集为:$\{x|\frac{2}{a}\leqslant x\leqslant -1\}$;

$a=-2$ 时,解集为:$\{x|x=-1\}$;

$a<-2$ 时,解集为:$\{x|-1\leqslant x\leqslant\frac{2}{a}\}$.

【点评】 本例属于含参数的不等式,解题注意对参数的讨论应做到不重不漏.

【变式训练】

2. 已知关于 x 的二次不等式:$ax^2+(a-1)x+a-1<0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,求 a 的取值范围.

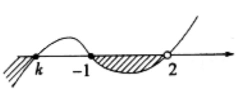
题型3 分式不等式及简单高次不等式

例3 解关于 x 的不等式.$\frac{(x-k)(x+1)}{x-2}\leqslant 0(k\in\mathbf{R})$.

【解】 原不等式可化为$\begin{cases}(x-k)(x+1)(x-2)\leqslant 0,\\ x-2\neq 0.\end{cases}$

其根为 $k,-1,2$,要讨论 k 与 $-1,2$ 的大小关系,利用穿根法求解.

当 $k<-1$ 时,



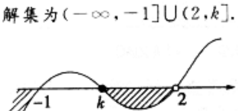
不等式的解集为$(-\infty,k]\cup[-1,2)$.

当 $k=-1$ 时,不等式即$\frac{(x+1)^2}{x-2}\geqslant 0$,不等式的解集为$\{-1\}\cup(2,+\infty)$.

当 $2>k>-1$ 时,不等式的解集为$(-\infty,-1]\cup[k,2)$.

当 $k=2$ 时,不等式的解集为$(-\infty,-1]$.

当 $k>2$ 时,不等式的解集为$(-\infty,-1]\cup(2,k]$.



【点评】 本例解题注意应用分类讨论思想,对 k 讨论时应做到不重不漏.

【变式训练】

3. 若不等式$\frac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3}<1$ 对于 x 取任何实数均成立,求 k 的取值范围.

题型4 二次函数、方程、不等式综合问题

例4 不等式$(m-2)x^2+2(m-2)x-4<0$对一切实数x都成立，求实数m的取值范围.

【解】 若$ax^2+bx+c<0$恒成立，则先考虑$a=0$的情形，然后按照$\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$求解.

①若$m=2$，不等式可化为$-4<0$，这个不等式与x无关，即对一切$x\in\mathbf{R}$都成立.

②若$m\neq2$，这是一元二次不等式.

由于解集为$\mathbf{R}$，知抛物线

$y=(m-2)x^2+2(m-2)x-4$开口向下，且与x轴无交点，必有

$\begin{cases}m-2<0\\ \Delta<0\end{cases}$，即$\begin{cases}m-2<0\\ 4(m-2)^2-4(m-2)(-4)<0\end{cases}$，

解得$-2<m<2$. 综上，m的取值范围是$\{m|-2<m\leqslant2\}$.

【点评】 一元二次不等式的解是一切实数，则与不等式对应的二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象有密切关系. 若恒正，则$\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$，即图象开口向上，与$x$轴无交点(如图1)；

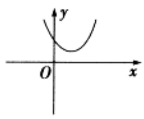


图1

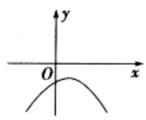


图2

若恒负，则$\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$，即图象开口向下，与$x$轴无交点(如图2).

特别要注意二次项系数为零时能否成立.

【变式训练】

4. 已知函数$f(x)=x^2-2kx+2$，在$x\geqslant-1$时恒有$f(x)\geqslant k$，求实数k的取值范围.

解题误区探因

JIE TI WU QU TAN YIN

解不等式$\dfrac{3-x}{2x-4}\leqslant1$.

【错解】 去分母，得$3-x\leqslant2x-4$，$-3x\leqslant-7$，

两边同除以-3，得$x\geqslant\dfrac{7}{3}$.

∴原不等式的解集$\{x|x\geqslant\dfrac{7}{3}\}$.

【剖析】 虽然解方程允许去分母，但解不等式一般不允许去分母，对解方程而言，去分母后可能增加使分母为零的解，这种解可以通过验根剔除. 对解不等式而言，如果分母含有未知数，那么在不知道分母正负的前提下，去分母是错误的，上述错解就是犯了这个错误.

【正解一】 $\dfrac{3-x}{2x-4}\leqslant1$，即$\dfrac{3-x}{2x-4}-1\leqslant0$，$\dfrac{7-3x}{2x-4}\leqslant0$.

因为两实数的积与商是同号的，所以上述不等式同解于如下的不等式组

$\begin{cases}2x-4\neq0,\\ (7-3x)(2x-4)\leqslant0,\end{cases}$即$\begin{cases}x\neq2,\\ (x-\dfrac{7}{3})(x-2)\geqslant0.\end{cases}$

∴原不等式的解集为$\{x|x<2或x\geqslant\dfrac{7}{3}\}$.

【正解二】 因为分母$2x-4\neq0$，所以可以分$2x-4>0$和$2x-4<0$两种情况分别解不等式，然后求并集即得已知不等式的解集. 已知不等式的解集是下面两个不等式组的解集的并集：

(1)$\begin{cases}2x-4>0,\\ 3-x\leqslant2x-4;\end{cases}$ (2)$\begin{cases}2x-4<0,\\ 3-x\geqslant2x-4.\end{cases}$

不等式组(1)的解集为$\{x|x\geqslant\dfrac{7}{3}\}$，不等式组(2)的解集为$\{x|x<2\}$，

∴原不等式的解集是$\{x|x<2或x\geqslant\dfrac{7}{3}\}$.

思想方法小结

SI XIANG FANG FA XIAO JIE

1. 不等式试题主要体现了等价转化、函数与方程、分类讨论等数学思想，随着以培养创新精神和实践能力为重点的素质教育的深入发展，近年来高考命题越来越关注开放性、探索性等创新型问题.

2. 含参数的一元二次不等式关于字母参数的取值范围问题，其主要考查一元二次不等式的解与系数的关系及集合与集合之间的关系.

3. 理解三个"二次"之间的关系：

(1)二次函数的图像与x的位置关系，需要研究二次方程的Δ的值，分$\Delta>0$，$\Delta=0$，$\Delta<0$三种情况讨论；

(2)联系三个“二次”的纽带是坐标思想，函数值 y 是否大于零等价于点 $P(x,y)$ 是否在 x 轴上方；

(3)三个“二次”关系的实质是数形结合思想：

$ax^2+bx+c=0$ 的解$\overset{对应}{\Longleftrightarrow}$$y=ax^2+bx+c$ 图象上点 $P(x,0)$；

$ax^2+bx+c>0$ 的解$\overset{对应}{\Longleftrightarrow}$$y=ax^2+bx+c$ 图象上点 $P(x,y)$，其中 $y>0$，即 x 轴上方的点；

$ax^2+bx+c<0$ 的解$\overset{对应}{\Longleftrightarrow}$$y=ax^2+bx+c$ 图象上点 $P(x,y)$，其中 $y<0$，即 x 轴下方的点.

4. 分类讨论思想：对于含参数的分式不等式，需要对参数进行讨论，应当根据条件正确划分分类标准，确保穷尽所有可能情形，做到不重不漏.

§1.3 简易逻辑

高考知识清单 GAO KAO ZHI SHI QING DAN

1. 逻辑联结词

(1)命题：可以判断真假的语句叫做命题.

(2)逻辑联结词：“或”、“且”、“非”这些词叫做逻辑联结词.

或：两个简单命题至少一个成立.

且：两个简单命题都成立.

非：对一个命题的否定.

(3)简单命题与复合命题：不含逻辑联结词的命题叫简单命题；由简单命题和逻辑联结词构成的命题叫做复合命题.

(4)真值表：表示命题真假的表叫真值表.

复合命题的真假可通过下面的真值表来加以判定：

P	Q	非 P	P 或 Q	P 且 Q
真	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	真	真	真	假
假	假	真	假	假

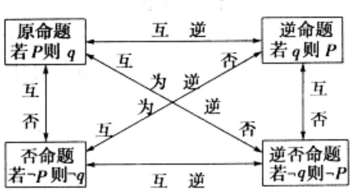
2. 四种命题及其相互关系

(1)命题的四种形式

原命题：若 p 则 q；逆命题：若 q 则 p；

否命题：若 $\neg p$ 则 $\neg q$；逆否命题：若 $\neg q$ 则 $\neg p$.

(2)四种命题的关系



原命题与它的逆否命题一定同真或同假；同样，它的逆命题与否命题也一定同真或同假. 也就是说：互为逆否的两个命题是等效的(等价的).

【深化思考1】

命题的否命题与命题的否定有什么不同？

3. 反证法

(1)定义：欲证“若 p 则 q”为真命题，从否定其结论即“非 q”出发，经过正确的逻辑推理导出矛盾，从而证明“若 p 则非 q”为假，即原命题为真，这样的方法称为反证法.

(2)反证法证明命题的一般步骤是：

①反设：假设命题的结论不成立，即假设结论的反面成立；

②归谬：从这个假设出发，经过推理论证，得出矛盾，

③结论：由矛盾判定假设不正确，从而肯定命题的结论正确.

①准确地作出反设(即否定结论)是正确运用反证法的前提，否则推理论证法再好也劳而无功，现将一些常见的“结论的否定形式”列表如下：

原结论词	反设词	原结论词	反设词
是	不是	至少有一个	没有一个
都是	不都是	至多有一个	至少有二个
大于	小于或等于	至少有 n 个	至多有 $n-1$ 个
小于	大于或等于	至多有 n 个	至少有 $n+1$ 个

【深化思考2】

应用反证法解题时可能出现的矛盾通常有哪些情况？

4. 充要条件

定义	从集合观点看
若 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件	若集合 $p\subseteq q$，则 p 是 q 的充分条件
若 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的必要条件	若集合 $q\subseteq p$，则 p 是 q 的必要条件
若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充分必要条件	若集合 $p=q$，则 p 是 q 的充分必要条件

【深化思考3】

判断命题的充要关系常用的方法有哪些？

课堂师生互动

KE TANG SHI SHENG HU DONG

题型1 四种命题之间的关系

例1 “已知 a,b,c,d 是实数，若 $a>c;b>d$，则 $a+b>c+d$”写出上述命题的逆命题，否命题，逆否命题，并分别判断它们的真假.

【解】 原命题：已知 a,b,c,d 是实数，若 $a>c,b>d$ 则 $a+b>c+d$ 真命题.

逆命题：已知 a,b,c,d 是实数，若 $a+b>c+d$，则 $a>c,b>d$，假命题.

否命题：已知 a,b,c,d 是实数，若 a,b 不都分别大于 c,d 则 $a+b\leqslant c+d$，假命题.

逆否命题：已知 a,b,c,d 是实数，若 $a+b\leqslant c+d$，则 a,b 不都分别大于 c,d，真命题.

【点评】 本题中不同的选择四种命题的写法不同，但若不分清楚前提条件，则无法正确写出四种命题，要掌握一些常见词语的否定.

【变式训练】

1. 写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题，并指出他们的真假：

(1)若 $xy=0$，则 x,y 中至少有一个是 0；

(2)若 $x>0,y>0$，则 $xy>0$；

题型2 充要条件的求解与判定

例2 指出下列各组命题中，p 是 q 的什么条件(在“充分而不必要条件”、“必要而不充分条件”、“充要条件”、“既不充分又不必要条件”中选出一种作答).

(1)$p:a^2<b^2,q:a<b$；

(2)$p:a^2+b^2=0,q:ab=0$；

(3)$p:A_1A_2+B_1B_2=0,q$：直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 垂直；

(4)$p:a\geqslant 5$ 或 $b\geqslant 5,q:a+b\geqslant 10$.

【答案】 (1)既不充分也不必要条件；(2)充分不必要条件；(3)充要条件；(4)必要不充分条件.

【点评】 (1)若 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 成立的充分条件(同时，q 是 p 成立的必要条件)；若 $\neg p\Rightarrow\neg q$，则称 p 是 q 成立的必要条件(同时，q 是 p 成立的充分条件)；若 $p\Rightarrow q$，且 $p\Leftarrow q$，则称 p 是 q 的充分必要条件(同时，q 是 p 成立的充分必要条件)，简称充要条件.

(2)若将(4)中“$p:a\geqslant 5$ 或 $b\geqslant 5$”改为“$p:a\geqslant 5$ 且 $b\geqslant 5$”，则 p 是 q 成立的充分不必要条件.

【变式训练】

2. 已知关于 x 的一元二次方程($m\in\mathbf{Z}$)

①$mx^2-4x+4=0$；②$x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$ 求方程①和②都有整数解的充要条件.

题型3 反证法

例3 若 x,y,z 均为实数，且 $a=x^2-2y+\frac{\pi}{2},b=y^2-2z+\frac{\pi}{3},c=z^2-2x+\frac{\pi}{6}$.

求证：a,b,c 中至少有一个大于 0.

【证明】 含有“至少”、“至多”“不存在”等词语的数学命题，常用反证法.

假设 a,b,c 都不大于 0，即 $a\leqslant 0,b\leqslant 0,c\leqslant 0$. 则 $a+b+c\leqslant 0$. 而：$a+b+c=x^2-2y+\frac{\pi}{2}+y^2-2z+\frac{\pi}{3}+z^2-2x+\frac{\pi}{6}$

$=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+\pi-3$.

又因为 $\pi>3,\pi-3>0$，且无论 x,y,z 为何实数，都有 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\geqslant 0$. 所以 $a+b+c>0$，这与 $a+b+c\leqslant 0$ 相矛盾.

因此 a,b,c 中至少有一个大于 0.

【点评】 (1)正确地作出反设(即否定结论)，是正确运用反证法的前题，要注意一些常用的“结论否定形式”. 如“至少有一个”、“至多有一个”、“都是”、的否定形式分别是“一个也没有”、“至少有两个”、“不都是”.

(2)在推理时导致的矛盾是多种多样的. 一般是：与已知矛盾；与公理、定义、定理、公式矛盾；也可以与反设矛盾或自相矛盾. 作出反设后，可把反设也当做已知条件的一部分，和原来的已知条件合并在一起，用它们的全部或部分进行推理，由于选的条件不同，得出的矛盾也不同. 可见矛盾是在推理过程中发现的，而不是推理之前设计或确定的.

【变式训练】

3. 设 $0<a,b,c<1$，求证：$(1-a)b,(1-b)c,(1-c)a$ 不同时大于 $\frac{1}{4}$.

题型4　逻辑知识综合应用

例4　已知 $c>0$，设 P：函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，Q：不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$. 如果 P 和 Q 有且仅有一个正确，求 c 的取值范围.

【解】 函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减 $\Leftrightarrow 0<c<1$. 不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $R\Leftrightarrow$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒大于 1.

$\because x+|x-2c|=\begin{cases}2x-2c,(x\geqslant 2c),\\2c,(x<2c).\end{cases}$

$\therefore$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 $2c$.

$\therefore$ 函数 $y=x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow 2c>1\Leftrightarrow c>\frac{1}{2}$.

如果 P 正确，且 Q 不正确，则 $0<c\leqslant\frac{1}{2}$.

如果 P 不正确，且 Q 正确，则 $c\geqslant 1$.

所以 c 的取值范围为 $(0,\frac{1}{2}]\cup[1,+\infty)$.

【点评】 本例考查逻辑与其它知识的综合应用.

【变式训练】

4. 已知两个命题 $r(x)$：$\sin x+\cos x>m$，$s(x)$：$x^2+mx+1>0$. 如果对 $\forall x\in\mathbf{R}$，$r(x)$ 与 $s(x)$ 有且仅有一个是真命题. 求实数 m 的取值范围.

解题误区探因

JIE TI WU QU TAN YIN

已知 p：方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不相等的负根；q：方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根，若 p 或 q 为真，p 且 q 为假，求 m 的取值范围.

【错解】 若 p 真，则 $\begin{cases}\Delta=m^2-4>0,\\m>0,\end{cases}$ 得 $m>2$；

若 q 真，则 $\Delta=16(m^2-4m+3)<0$ 得 $1<m<3$.

因为 p 或 q 为真，p 且 q 为假，所以 p 真 q 假.

于是 $\begin{cases}m>2,\\m\leqslant 1,\text{或 } m\geqslant 3\end{cases}$，$\therefore m\geqslant 3$.

【剖析】 p 或 q 为真，p 且 q 为假应当包含两种情况：一是 p 真 q 假；二是 p 假 q 真. 上面的解法丢了一种情况.

【正解】 若 p 真，则 $\begin{cases}\Delta=m^2-4>0,\\m>0\end{cases}$ 得 $m>2$.

若 q 真，则 $\Delta=16(m^2-4m+3)<0$ 得 $1<m<3$，

因为 p 或 q 为真，p 且 q 为假，所以 p、q 应为一真一假，则

p 真 q 假时，有 $\begin{cases}m>2,\\m\leqslant 1\text{ 或 } m\geqslant 3,\end{cases}$ 得 $m\geqslant 3$.

p 假 q 真时，有 $\begin{cases}m\leqslant 2,\\1<m<3,\end{cases}$ 得 $1<m\leqslant 2$.

所以 $m\geqslant 3$ 或 $1<m\leqslant 2$.

思想方法小结

SI XIANG FANG FA XIAO JIE

1. 主要是转化与化归的思想，即将未知转化为已知，将繁难转化为简便. 如 p 是 q 的充分条件或必要条件时，就是用化归的思想，这样的转化往往能给人带来思维的闪亮点，找到解决问题的突破口.

2. 正难则反，即正向考虑问题比较麻烦时，可从反面入手，也就是补集的思想或等价命题的思想.

3. 充要条件的判定方法

(1)运用定义

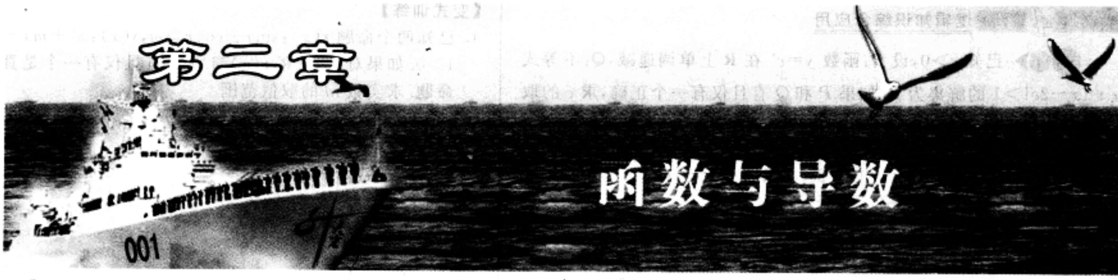
如果已知 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件. 如果 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充要条件.

(2)运用子集

设 $A=\{x|p(x)\}$，$B=\{x|q(x)\}$，如果 $A\subseteq B$，那么 $x\in A\Rightarrow x\in B$，于是 x 具有性质 $p\Rightarrow x$ 具有性质 q，即 $p(x)\Rightarrow q(x)$. 反之，如果 A 中的所有元素 x 都具有性质 q，那么 A 一定是 B 的子集. 这就是说，$A\subseteq B$ 与 $p(x)\Rightarrow q(x)$ 等价，即若 $A\subseteq B$，则 A 是 B 的充分条件，B 是 A 的必要条件. 若 $A=B$，则 A 是 B 的充要条件.

(3)运用图形

对于多个有联系的命题，常常作出它们之间的一个网络图，根据图形找出答案.



知识网络

- 映射 — 函数
  - 函数概念
    - 函数定义
    - 函数三要素
    - 函数表示法
  - 函数性质
    - 可导性
    - 奇偶性
    - 单调性
    - 周期性与对称性
  - 反函数
    - 反函数概念
    - 互为反函数定义域值域关系
    - 互为反函数图象间关系
  - 基本函数
    - 二次函数
    - 指数函数
    - 对数函数

考纲解读

1. 了解映射的概念,理解函数的概念.

2. 了解函数可导性、单调性、奇偶性的概念,掌握判断函数单调性、奇偶性的方法.

3. 了解反函数的概念及互为反函数的函数图象间的关系,会求一些简单函数的反函数.

4. 理解分数指数的概念,掌握有理指数幂的运算性质,掌握指数函数的概念、图象和性质.

5. 理解对数的概念,掌握对数的运算性质;掌握对数函数的概念、图象和性质.

6. 能够运用函数的性质,指数函数和对数函数的性质,解决某些简单的实际问题.

命题要点

本章知识依2009考纲共有14个知识点,近几年全国各地数学试卷,分别考查了其中不同的考点,每套卷考查其中5－6个知识点,共考查了12个知识点,这些卷重点考查了反函数、互为反函数、图象间关系、函数可导性,单调性和奇偶性.

总结近几年的高考,有如下规律特点:

从题型上看,在选择题和填空题中各地试卷都有考查本章知识的习题,出题率为100%,在这类题中,又多为考查本章基础知识的题目,题目难度属于中档题或容易题,在解答题中各地试卷也都有考查本章知识的题目,多为综合题,分别与数列、导数的综合,与不等式的综合,多为中档及其以上题目.

对2010年命题预测:

今年对本章知识考查不会有太大的变化,仍将以选择题或填空题的形式考查本章的基础知识,分值也同以往.重点在函数、反函数、函数的单调性和奇偶性,以解答题的形式考查本章知识的进一步应用,多数省份的综合题会多与导数知识结合,数列知识结合出这样两道大题.

§ 2.1 映射与函数

高考知识清单

GAO KAO ZHI SHI QING DAN

1. 映射

(1)定义:设 A、B 是两个集合,如果按照某种对应法则 f,对于集合 A 中的任何一个元素在集合 B 中都有唯一的元素和它对应,这样的对应叫做从 A 到 B 的映射,记作:$f:A\to B$.

(2)象与原象:对于映射 $f:A\to B$,和 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫 a 的象,a 叫 b 的原象.

(3)映射的特点:①映射 $f:A\to B$ 包括集合 A、B 和对应法则 f 三个要素,三者缺一不可;②A 中的元素都有唯一的象,但 B 中的元素不一定都有原象,如果有,也不一定唯一;③{象}$\subseteq B$.

(4)一一映射:设 A、B 是两个集合,$f:A\to B$ 是集合 A 到集合 B 的映射,如果在这个映射下,对于集合 A 中的不同元素,在集合 B 中有不同的象,而且 B 中的每一个元素都有不同的原象,那么这个映射叫做 A 到 B 上的一一映射.

2. 函数

(1)定义:从非空数集 A 到非空数集 B 的一个映射 $f:A\to B$,叫做 A 到 B 的函数,记作 $y=f(x)$,其中 $x\in A$,$y\in B$,原象集 A 叫函数的定义域,象集 C 叫做函数的值域,一般地,$C\subseteq B$.

(2)三要素:①定义域;②值域;③对应法则.

(3)表示法:①列表法;②解析法;③图象法.

(4)分段函数:当函数用解析法表示时,函数的解析式不是由一个式子给出的,它是由两个或两个以上的数学式子给出的.分段函数的定义域为它在各段上的定义域的并集,对应法则各段各异.分段函数是一个整体.

(5)常用函数:①常数函数($y=c$,c 为常数);②正比例函数;③反比例函数;④一次函数;⑤二次函数;⑥$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$($c\neq 0$);⑦$y=ax+\dfrac{b}{x}$;⑧指数函数;⑨对数函数;⑩三角函数;⑪反三角函数.

【深化思考 1】

若两个函数的定义域与值域相同，是否为相同函数？

3. 函数的表示法和区间

(1)函数的表示法

①解析法：用函数的解析式来表示两个变量之间的函数关系的方法.

用解析式表示函数关系的优点是：函数关系清楚，容易根据自变量的值求出对应的函数值，便于用解析式来研究函数的性质.

②列表法：就是列出表格来表示两个变量的函数关系.

用列表法表示函数关系的优点是：不必通过计算就知道自变量取某些值时函数的对应值.

③图象法：就是用函数图象表示两个变量之间的关系.

用图象法表示函数关系的优点是：能直观形象地表示出函数值的变化情况.

(2)区间的定义：设 a,b 是两个实数，而且 $a<b$，规定：

①满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间，表示为$[a,b]$；

②满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫做开区间，表示为(a,b)；

③满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做半开半闭区间，分别表示为$[a,b)$，$(a,b]$.

这里实数 a 与 b 都叫做相应区间的端点.

说明

(1)平时表示函数常用的表示法是解析法，建立有实际意义的函数解析式，首先要选定自变量，而后寻找等量关系，求得函数解析式，其中确定其定义域比较关键.

(2)若函数在其定义域的不同子集上，因对应法则不同而分别用几个不同的式子来表示，这种函数称为分段函数.

(3)并不是所有的函数都能写出解析式，有时只能用图象法或列表法来表示.

【深化思考 2】

映射与函数有什么区别？

课堂师生互动

KE TANG SHI SHENG HU DONG

题型 1　映射的概念及应用

例 1 设 $M=\{a,b,c,d\}$，$N=\{-1,0,1\}$，取适当的对应法则 f. 求：

(1)从 M 到 N 建立不同映射的个数和从 N 到 M 建立不同映射的个数；

(2)以 M 为定义域，N 为值域的函数有多少个？

(3)在(2)中满足 $f(a)\leqslant f(b)\leqslant f(c)\leqslant f(d)$ 的函数有多少个？

【分析】 (1)建立映射，只需为原象集合每个元素找到象即可.

(2)N 为值域意味着 N 中元素必有原象.

(3)转化成特殊的模型.

(1)、(2)、(3)的实质都是排列、组合问题.

【解】 (1)从 M 到 N 建立映射，只需为 M 中的元素 a,b,c,d 都找到象，元素 a 的象有 $-1,0,1$ 三选一，同样 b,c,d 都有三种选择，根据分步计数原理，从 M 到 N 的映射有 $3^4=81$ 个. 同理，从 N 到 M 的映射个数为 $4^3=64$ 个.

(2)M 为定义域，N 为值域，则 N 中每个元素必有原象，只需使 M 中的某 2 个元素对应 N 中的一个元素，且另两个元素各对应另外两个不同元素即可，这是从 $M\to N$ 的满射，共有 $C_4^2\cdot A_3^3=\frac{4\times 3}{2}\times 3\times 2=36$ 个这样的函数.

(3)在上述 36 个函数中满足 $f(a)\leqslant f(b)\leqslant f(c)\leqslant f(d)$ 的必须相邻的两个元素结合，a,b,c,d 分别对应 $-1,0,1$，而 a,b,c,d 的结合只有 ab,c,d；a,bc,d；a,b,cd 三种，故满足条件的函数只有三个.

【点评】 涉及到从一个集合到另一个集合建立映射(与函数)的个数问题，应特别注意利用排列、组合知识，从理论上把握住求解的方法，结合具体情况，转化为相对应的排列、组合数.

【变式训练】

1. (浙江)函数 $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$满足 $f(f(x))=f(x)$，则这样的函数个数共有 (　　)

A. 1 个

B. 4 个

C. 8 个

D. 10 个

题型 2　考查函数概念

例 2 下列三组函数中，$f(x)$与 $g(x)$是否为同一函数？

(1)$f(x)=\lg x$，$g(x)=\frac{1}{2}\lg x^2$；

(2)$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3)$f(x)=\begin{cases}x+1 & (-1<x<0)\\ x-1 & (0<x<1)\end{cases}$，$g(x)=f^{-1}(x)$.

【解】 (1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$g(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，定义域不同，故 $f(x)$与 $g(x)$不是同一函数.

(2)$f(x)$的值域为$(-\infty,+\infty)$，$g(x)$的值域为$[0,+\infty)$，值域不同，故 $f(x)$与 $g(x)$也不是同一函数.

(3)因为 $g(x)=f^{-1}(x)=\begin{cases}x-1 & (0<x<1),\\ x+1 & (-1<x<0).\end{cases}$

所以 $f(x)$与 $g(x)$的对应法则、定义域和值域都分别相同，故它们是同一函数.

【变式训练】

2. 下列四组函数中，表示同一函数的是 (　　)

A. $f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}$

B. $f(x)=|x|$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$

C. $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$，$g(x)=x+1$

D. $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$，$g(x)=\sqrt{x^2-1}$