GAODENG YUANXIAO JINGPIN GUIHUA JIAOCAI

高等院校精品规划教材

新编高等数学学习指导（下册）

◎ 主　编　张野芳

◎ 副主编　李长青

$$\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv=$$

$$\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv=$$

$$\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv=$$

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高等院校精品规划教材

新编高等数学学习指导(下册)

◎ 主　编　张野芳

◎ 副主编　李长青

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是在总结多年教学经验的基础上精心编写而成的，目的是指导学生结合课堂学习，系统地复习高等数学，为后续课程学习及硕士研究生入学考试打下良好基础。

全书共十二章，分为上、下册，上册包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用；下册包括微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分和无穷级数。每章包括基本内容、例题分析、常规练习题和提高训练题，使读者在熟悉本章主要内容的基础上掌握各种解题方法，灵活运用所学知识，做到举一反三。

本书主要作为高等学校本科生高等数学的配套教材和硕士研究生入学考试的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

新编高等数学学习指导．下册/张野芳主编．—北京：中国水利水电出版社，2009

高等院校精品规划教材

ISBN 978－7－5084－6776－4

Ⅰ. 新…　Ⅱ. 张…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 150493 号

书　名	高等院校精品规划教材 **新编高等数学学习指导**（下册）
作　者	主编　张野芳　副主编　李长青
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www. waterpub. com. cn E－mail：sales@ waterpub. com. cn 电话：（010）68367658（营销中心）
经　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　刷	北京市地矿印刷厂
规　格	184mm×260mm　16开本　9.5印张　225千字
版　次	2009年8月第1版　2009年8月第1次印刷
印　数	0001—5000册
定　价	**17.00**元

前　言

高等数学是高等学校本科学生的一门重要的公共基础课，也是硕士研究生入学考试数学科目的主要组成部分。高等数学课程在培养学生的思维能力、提高学生的创新能力方面都具有非常重要的作用，同时高等数学课也是大学其他课程的重要的基础。只有学好高等数学，才能更好地掌握各专业的专业课。为了帮助学生正确理解《高等数学》的基本概念，掌握解题基本方法与技巧，提高学生的解题能力，我们在总结多年教学经验的基础上编写了这本学习指导书。目的是通过本书指导学生结合课堂学习系统地复习《高等数学》的内容，巩固、提高所学知识，培养学生分析问题和解决问题的能力，为后续课程的学习及将来的硕士研究生入学考试打下良好的基础。

本书共分十二章，分为上、下册出版。其上册包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用；下册包括微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。每章包括基本内容、例题分析、常规练习题、提高训练题 4 个部分的内容。基本内容部分给出该章内容的概要，读者在使用本书时可不必查阅高等数学教材就可了解本章的主要内容与主要公式。例题分析部分对各种类型的题目给出了较为详细的解题思路分析，帮助读者熟悉和掌握解题方法。常规练习题部分按一般高等数学教材的顺序，根据教材中的相应内容配备了适当的练习题。题目类型有判断题、选择题、填空题、计算题和证明题等。选题力求能够反映大纲要求和知识的综合应用，使读者通过这些常规练习题熟练掌握大纲所规定内容，并能够做到灵活运用所学知识。提高训练题部分精选了一些典型试题及历年研究生入学考试的部分真题，读者通过练习这部分练习题，能够了解研究生入学考试对高等数学的基本要求，提高解题能力，增强自身的应试能力，为以后的研究生入学考试打下良好的基础。为辅助读者自学做题、自查需要，本书末附有练习题参考答案或提示。

掌握数学概念与方法的最好途径就是做题，在使用本书时，读者应尽力多做一些练习题，通过练习真正掌握每章的内容。对于本书提供的例题，读者应先对题目进行独立思考，然后再查阅解答过程，最好能够提出不同于书中的解题方法，做到举一反三。书中带“*”号的是一些较深的内容或难度

稍大的题目，与提高训练题一样，可作为考研训练之用。

本书由张野芳、李长青副教授主持编写。参加本书编写的老师有徐优红、何再乐、沈最意、曹金亮、王廷、朱玉辉、王娜儿、徐海娜、卢猷庆、陈丽燕、姜静、王朝平、周杰等。在本书的编写过程中，编者除了总结多年的教学经验外，还参考了其他的一些教材和参考书，在很多方面得到启发与教益，在此不一一指明，谨对原书编著者表示衷心地感谢。限于编者水平有限，书中不妥之处恳请读者批评指正。

编　者

2009 年 7 月

目　　录

第七章　微　分　方　程

【基本内容】

1．微分方程及其阶

凡表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程，称为微分方程，有时也简称方程．微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数，称为微分方程的阶．

2．微分方程的解及其特解

满足微分方程的函数称为微分方程的解，如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫做微分方程的通解．确定了通解中的任意常数以后，就得到了微分方程的特解．

3．微分方程的分类及其一般解法

（1）可分离变量的微分方程的解法：分离变量，然后两端同时积分．

（2）齐次方程 $\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$：令 $\frac{y}{x}=u$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ 代入，可分离变量．

对方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+C}{a_1x+b_1y+C_1}$，可令 $x=X+h$，$y=Y+k$，h，k 为待定的常数，适当选择 h，k，将其化为齐次型微分方程．

（3）一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$ 的通解为

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

（4）可降阶的三类高阶方程：$y^{(n)}=f(x)$、$y''=f(x,y')$ 与 $y''=f(y,y')$．

1）$y^{(n)}=f(x)$：两端同时积分 n 次即可求得其解．

2）$y''=f(x,y')$：令 $y'=p$，则 $y''=p'$、$p'=f(x,p)$，变成一阶微分方程，再用一阶微分方程的求解方法解之．

3）$y''=f(y,y')$：令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$、$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$，变成一阶微分方程，再用一阶微分方程的求解方法解之．

（5）二阶线性齐次微分方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{7-1}$$

线性齐次微分方程解的结构及其解法如下．

定理1　如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程（7－1）的两个解，那么

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

也是（1）的解，其中，C_1、C_2 是任意常数．

定理 2 如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程（7－1）的两个线性无关的解，那么

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

是（1）的通解，其中 C_1、C_2 是任意常数.

定理 3 设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \tag{7-2}$$

的一个特解，$Y(x)$ 是与齐次线性微分方程（7－2）对应的齐次方程（7－1）的通解，那么

$$y = Y(x) + y^*(x)$$

是二阶非齐次线性微分方程（7－2）的通解.

定理 4 设非齐次线性微分方程（7－2）的右端 $f(x)$ 是两个函数之和，即

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x) \tag{7-3}$$

而 $y_1^*(x)$ 与 $y_2^*(x)$ 分别是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$
$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解，那么 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 就是原方程的特解.

（6）常系数齐次线性微分方程.

1）对二阶齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$，其根及通解见表 7－1.

表 7－1　二阶齐次线性微分方程的根及通解

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根 r_1，r_2	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
两个不相等的实根 r_1，r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根 r_1，r_2	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

2）对高阶齐次线性微分方程 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$，其特征方程的根及在微分方程通解中的对应项见表 7－2.

表 7－2　高阶齐次线性微分方程的根及在微分方程通解中的对应项

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
单实根 r	给出一项：Ce^{rx}
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha+i\beta$	给出两项：$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
k 重实根 r	给出 k 项：$e^{rx}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$
一对 k 重复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	给出 k 项： $e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

3）二阶非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 特解的求法.

a. 若 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$，则其特解形式为

$$y^* = x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$$

其中 $Q_m(x)$ 与 $P_m(x)$ 同次多项式，而 k 按 λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是

特征方程的重根依次取为0、1或2.

b. 若$f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\overline{\omega}x + P_n(x)\sin\overline{\omega}x]$，则其特解为

$$y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\overline{\omega}x + R_m^{(2)}(x)\sin\overline{\omega}x]$$

其中$R_m^{(1)}(x)$与$R_m^{(2)}(x)$是m次多项式，$m = \max\{l,n\}$，而k按$\lambda + i\overline{\omega}$（或$\lambda - i\overline{\omega}$）不是特征方程的根、是特征方程的单根依次取为0或1.

*(7) 欧拉方程 $^*x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}xy' + p_n y = f(x)$ 的解法：令$x = e^t$，采用D表示对t求导的运算，一般有

$$x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y$$

【例题分析】

例1　求微分方程$y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$的通解.

解　把原方程化为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1}$$

这是齐次型微分方程，令$\frac{y}{x} = u$，$y = ux$，则

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

原方程化为

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u-1}$$

分离变量，得

$$\left(1 - \frac{1}{u}\right)du = \frac{1}{x}dx$$

两端积分，得

$$u - \ln u = \ln x + \ln C$$

即

$$\ln uxC = u$$

将$u = \frac{y}{x}$代入并化简，得

$$Cy = e^{\frac{y}{x}}$$

例2　求解微分方程$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$的通解.

解　这是一阶线性微分方程，用常数变易法求解，对应的齐次方程为

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 0$$

分离变量

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

积分得齐次方程的通解

$$\ln y=-\ln x+\ln C$$

即 $y=\frac{C}{x}$.

设非齐次方程的通解为

$$y=\frac{C(x)}{x}$$

将其代入非齐次方程，得

$$\frac{xC'(x)-C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x^2}=\frac{\sin x}{x}$$

由此解得

$$C(x)=-\cos x+C$$

从而，原微分方程的通解为

$$y=\frac{1}{x}(-\cos x+C)$$

其中 C 为任意常数.

若直接利用公式，可得

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-\ln x}\left[\int\frac{\sin x}{x}\ln x\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\int\sin x\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{x}[-\cos x+C]$$

例 3 求解微分方程 $x^2y''=(y')^2+2xy'$ 的通解.

解 这是一个不显含 y 的二次方程，令 $y'=p$，$y''=p'$，原方程化为

$$x^2p'=2xp+p^2$$

即 $p'-\frac{2}{x}p=\frac{1}{x^2}p^2$，这是贝努利方程，令 $z=p^{-1}$，则化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}z=-\frac{1}{x^2}$$

其通解

$$z=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left[\int-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1\right]$$

$$=\frac{1}{x^2}(-x+C_1)=\frac{C_1-x}{x^2}$$

即

$$(y')^{-1}=\frac{C_1-x}{x^2}$$

$$y'=\frac{x^2}{C_1-x}=-(C_1+x)+\frac{C_1^2}{C_1-x}$$

积分得

$$y=-\frac{1}{2}(C_1+x)^2-C_1^2\ln|x-C_1|+C_2$$

此即为原方程之通解.

注：在遇到高阶微分方程时，一定要区分是可降阶的还是高阶线性的，若是可降阶的，又要区分是哪一种类型；因为对不显含 y 的二阶微分方程，只需令 $y'=p$，$y''=p'$ 即可降阶；而对不显含 x 的二阶微分方程，需令 $y'=p$，$y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$ 方可降阶，至于对既不显含 x，又不显含 y 的微分方程，既可视为第二种类型的，也可视为第三种类型的，但一般按不显含 y 的类型处理，其降阶可能更方便些.

例 4 求微分方程 $y''-y'-2y=3$ 的通解.

解 特征方程 $r^2-r-2=0$ 的根为 $r_1=2$，$r_2=-1$，故方程对应的齐次方程的通解为

$$\bar{y}=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-x}$$

设方程的一个特解为 $y^*=Ax+B$，代入所给方程中，求得 $A=-\frac{3}{2}$、$B=\frac{3}{4}$，故有

$$y^*=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$$

于是得通解为

$$y=\bar{y}+y^*=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-x}-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$$

例 5 求微分方程 $y''-y'=x\sin^2x$ 的通解.

解 特征方程 $r^2-r=0$ 的根为 $r_1=0$、$r_2=1$，方程对应的齐次方程的通解是

$$\bar{y}=C_1+C_2\mathrm{e}^x$$

方程的右端可写为 $x\sin^2x=x\frac{1-\cos2x}{2}=\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\cos2x$.

设方程 $y''-y'=\frac{1}{2}x$ 特解为 $y_1^*=Ax^2+Bx$ 代入方程，可得 $A=-\frac{1}{4}$，$B=-\frac{1}{2}$，故

$$y_1^*=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$$

又设方程 $y''-y'=-\frac{x}{2}\cos2x$ 的一个特解为

$$y_2^*=(Ax+B)\cos2x+(Cx+D)\sin2x$$

代入方程中，可求得 $A=\frac{1}{10}$、$B=\frac{13}{200}$、$C=\frac{1}{20}$、$D=-\frac{2}{25}$，故有

$$y_2^*=\left(\frac{x}{10}+\frac{13}{200}\right)\cos2x+\left(\frac{x}{20}-\frac{2}{25}\right)\sin2x$$

于是得原方程的通解为

$$y=C_1+C_2\mathrm{e}^x-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\left(\frac{x}{10}+\frac{13}{200}\right)\cos2x+\left(\frac{x}{20}-\frac{2}{25}\right)\sin2x$$

【常规练习题】

第一节 微分方程的基本概念

一、判断题.

1. $(y')^2+xy+y^2=1$ 是二阶微分方程. ( )
2. $y=C_1\sin 2x+C_2\sin x\cos x$ 是方程 $y''+4y=0$ 的通解，其中 C_1，C_2 为任意常数. ( )
3. 微分方程的通解包含了该微分方程的所有特解. ( )
4. 所有的微分方程都存在通解. ( )

二、填空题.

1. $(y')^2+2\sin y'''=2y$ 的阶数为__________.
2. $(x^2-y^2)\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y=0$ 的阶数为__________.
3. 设 $f(x)$ 是可微函数，满足方程 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\int_0^x[f(t)]^2\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 的微分方程__________.

三、指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解.

1. $(x+y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$，$y=\dfrac{C^2-x^2}{2x}$.

2. $y''+y=0$，$y=3\sin x-4\cos x$.

3. $x(y')^2-1=0$，$y^2-4x=0$.

4. $y''+a^2y=\mathrm{e}^x$，$y=C_1\sin ax+C_2\cos ax+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$.

5. $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0$，$y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2}$.

四、写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程.

1. 曲线在点 (x, y) 处的切线斜率等于该点横坐标的三次方.

2. 曲线上点 (x, y) 处的法线与 x 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 y 轴平分.

第二节 可分离变量的微分方程

一、判断题.

1. 在解代数方程时，可能因将方程变形导致丢根，但用分离变量法对微分方程进行变形时，不会丢解. ( )

2. 对可分离变量的微分方程 $g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$，通过两边积分 $\int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x$ 得 $G(y) = F(x) + C$，其中 $G(y)$、$F(x)$ 分别是 $g(y)$、$f(x)$ 的原函数，则这样得到的原微分方程的解是错误的，因为左边是对 y 积分，而右边是对 x 积分. ( )

二、填空题.

1. 微分方程 $y\mathrm{d}x + (x^2 - 4x)\mathrm{d}y = 0$ 的通解为________________.

2. 已知曲线 $y = f(x)$ 过点 $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$，且其上任一点 (x, y) 处切线的斜率为 $x\ln(1 + x^2)$，则 $f(x) =$________________.

三、选择题.

设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解，若 $f(x_0) > 0, f'(x_0) = 0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 ( ).

(A) 取得极大值　　(B) 取得极小值

(C) 某邻域内单调增　　(D) 某邻域内单调增

四、求下列微分方程的解.

1. $y' = 2xy + xy^2$

2. $y' = 1 - x + y^2 - xy^2$，满足条件 $x = 0$，$y = 1$ 的解.

3. $3e^x \tan y dx + (2 - e^x)\sec^2 y dy = 0$

五、设连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^1 f(tx)\,dt = nf(x)\,(n \neq 1)$，求 $f(x)$.

六、设函数 $f(u)$ 与 $g(u)$ 连续，证明方程 $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$ 经过代换 $u(x) = xy$ 可化为可分离变量的微分方程.

第三节　齐　次　方　程

一、填空题.

齐次方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 作变换 $u =$ ________ 化为可分离变量的微分方程 ________，进而求得原齐次方程的通解为 ________.

二、选择题.

微分方程设 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\tan\left(\frac{y}{x}\right)$ 的通解为（　）.

(A) $\sin\frac{y}{x}=\frac{C}{x}$　　(B) $\sin\frac{y}{x}=x+C$

(C) $\sin\frac{y}{x}=cx$　　(D) $\sin\frac{x}{y}=C$

三、求下列微分方程的通解.

1. $x\frac{dy}{dx}-y=x\tan\frac{y}{x}$　　*2. $\frac{dy}{dx}=\frac{4-2x-y}{x+y-1}$

3. $(1+2e^{\frac{x}{y}})dx+2e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$　　*4. $dy+(2y-4x)dx=0$

第四节 一阶线性微分方程

一、填空题.

1. 已知 $y^*(x)$ 是微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的一个特解，$y(x)$是该方程对应的齐次线性方程 $y'+P(x)y=0$ 的通解，则该非齐次线性方程的通解为____________.

2. 设 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 为一阶非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的两个不同的解，则该方程的通解用 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 可表示为____________.

二、判断题.

1. 一阶非齐次线性方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的任意两解之差必为其对应的齐次方程 $y'+P(x)y=0$ 的解. ( )

2. 一阶非齐次线性方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的解与其对应的齐次方程的解之和必为该非齐次方程的解. ( )

三、求下列微分方程的通解.

1. $x\frac{dy}{dx}+y=x^3$　　2. $\cos y\frac{dy}{dx}-\sin y=e^x$