医科实用数学学习指南及习题全解

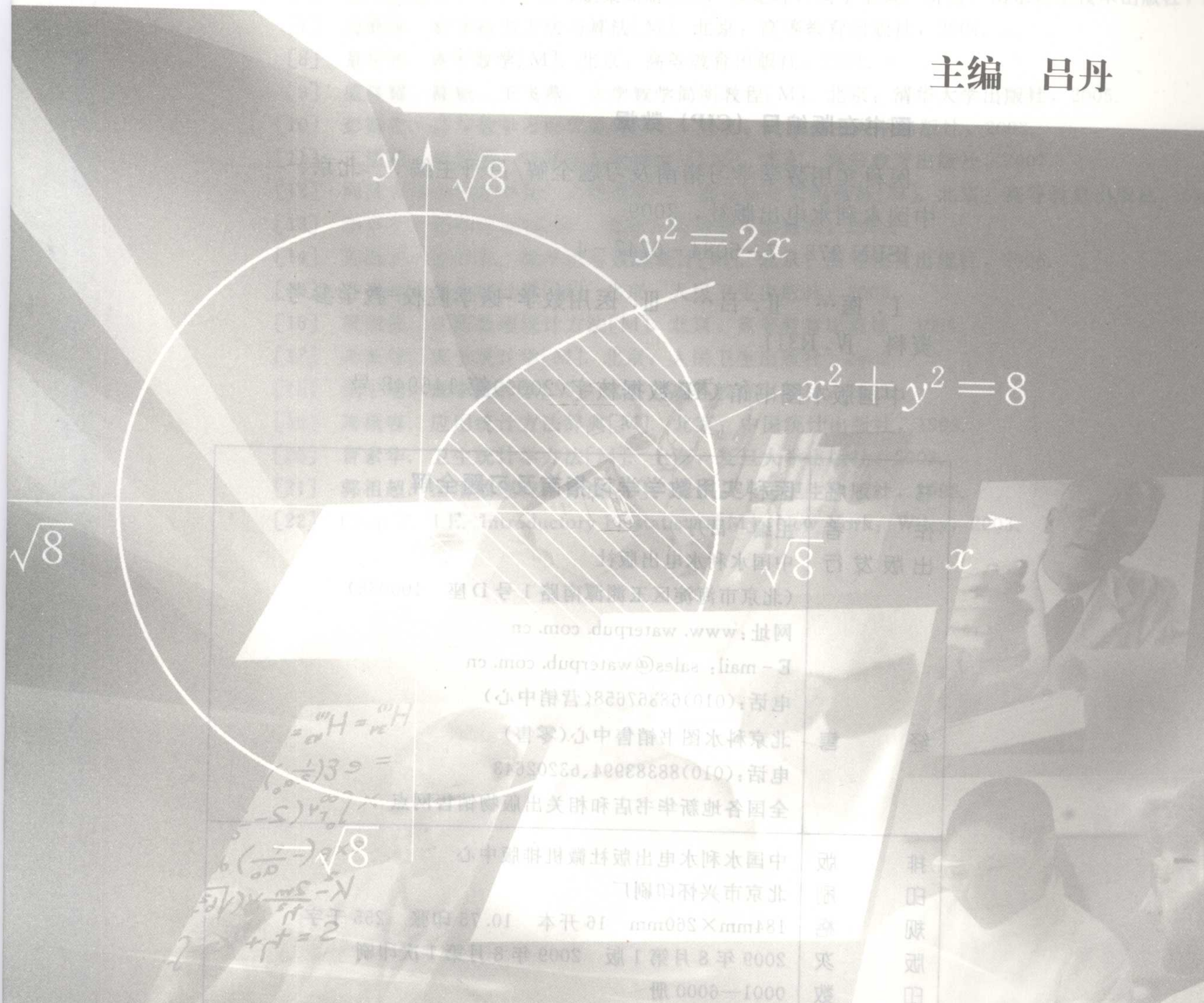
主编　吕丹

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

医科实用数学学习指南及习题全解

医科实用数学学习指南及习题全解

主编　吕丹



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 简 介

本书为2008年7月由人民卫生出版社出版的《医科实用数学》（吕丹主编）教材的配套辅导书，内容包括：函数与极限，微分学，积分学，微分方程，概率论，数理统计及其应用等。意在通过学习要求的简介、主要内容的概述、典型题例的演示、课后习题的全解和每章阶段测验的巩固，达到初步建立数学思想，逐渐掌握数学方法，了解必要数学知识，提高解题能力之目的。

本书既可以作为医用高等数学的教学参考书，也可以作为医药卫生科研人员提高进修的学习辅导用书。

图书在版编目（CIP）数据

医科实用数学学习指南及习题全解/吕丹主编．—北京：中国水利水电出版社，2009

ISBN 978-7-5084-6747-4

Ⅰ．医… Ⅱ．吕… Ⅲ．医用数学-医学院校-教学参考资料 Ⅳ．R311

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第146948号

书　　名	**医科实用数学学习指南及习题全解**
作　　者	主编　吕丹
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038) 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：(010)68367658(营销中心)
经　　售	北京科水图书销售中心(零售) 电话：(010)88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　　刷	北京市兴怀印刷厂
规　　格	184mm×260mm　16开本　10.75印张　255千字
版　　次	2009年8月第1版　2009年8月第1次印刷
印　　数	0001—6000册
定　　价	**25.00**元

《医科实用数学学习指南及习题全解》

编　委　会

主　编： 吕　丹

副主编： 王利超　刘　婷

编　委：（以姓氏笔画为序）

王利超　吕　丹　刘　婷　陆晓东

施红英　胡晓晓　韩艳敏　鲁胜强

前言

高等数学是医科学生和医药卫生科研人员必须具备的基础知识，但是高等数学又是一门高度抽象难学的课程。为了使广大学习者能够充分有效地提高学习效率，根据2008年7月由人民卫生出版社出版的《医科实用数学》（吕丹主编）教材，特编写了这配套辅导书，其内容包括：函数与极限，微分学，积分学，微分方程，概率论，数理统计及其应用等。书中所选编的内容既丰富全面，又精练扼要，理论叙述既注重概念表达的科学性，又注重理论知识的实用性；意在通过学习要求的简介、主要内容的概述、典型题例的演示、课后习题的全解和每章阶段测验的巩固，达到初步建立数学思想，逐渐掌握数学方法，了解必要数学知识，提高解题能力之目的。

本教材的特点是精练实用，既注重理论又联系实际，既注意内容的广度和系统性，又兼顾知识的深度和科学性，力求形式新颖，深入浅出。

各章的执笔人分别是：第一章鲁胜强、韩艳敏和胡晓晓，第二章刘婷，第三章吕丹，第四章吕丹和陆晓东，第五章王利超，第六章施红英，全书由主编吕丹统稿。其间，还得到了一些专家教授的指点，并参考了大量的资料文献，在此一并谨向他们和文献的作者们致以诚挚的谢意。

本书既可以作为医用高等数学的教学参考书，也可以作为医药卫生科研人员提高进修的学习辅导用书。

由于编写任务重，时间紧迫，书中难免存在一些瑕疵，敬请读者批评指正。

编者

2009年3月

目录

第一章　函数与极限

一、学习要求

（1）理解一元函数与多元函数的概念，了解基本初等函数、复合函数、分段函数、初等函数的定义及空间直角坐标系和简单的空间曲面，掌握函数复合与分解的方法.

（2）理解一元函数极限（包括单侧极限）的描述性定义，了解二元函数极限的概念，会求二元函数的极限，掌握极限的运算法则.

（3）了解无穷小的概念，了解无穷小量与无穷大量的关系，掌握无穷小量的性质.

（4）了解两个重要极限 $\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}\right)$，会利用两个重要极限、无穷小量的性质及初等方法计算各种函数的极限.

（5）理解一元函数与二元函数连续的概念.

二、主要内容

（一）一元函数的概念

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，变量 x 在数集 D 中取值. 若对 x 取 D 中的每个值，变量 y 按照一定的规律有确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的**函数**，记作

$$y=f(x),x\in D$$

其中 x 称为**自变量**，而 y 称为**因变量**. 因变量与自变量之间的对应规律称为**函数关系**. 集合 D 称为函数的**定义域**；如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的定义域中的一点，也称函数 $f(x)$ **在 x_0 点有定义**. 与自变量的值相对应的因变量的值称为**函数值**，而所有函数值的集合称为函数的**值域**.

函数的两大要素是：定义域及对应规律. 一般的，函数的定义域由数学上函数有无意义来确定；当函数关系由实际问题给出时，定义域应由实际问题来确定.

单值函数　$y=f(x)$对定义域内每一确定的 x 值，只有唯一的 y 值与其对应，称此函数为**单值函数**，否则就称为**多值函数**.

分段函数　一个函数在自变量的不同范围内用不同的解析式表示，这样的函数叫做**分段函数**.

2. 函数的表示方法

函数常用的表示方法有解析法、图像法和列表法等. 即函数关系可以用解析式表示，也可以用图像表示，还可以用表格表示.

3. 函数的几种简单性质

函数的有界性

若存在某个正数 M，使得不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

对于函数 $f(x)$的定义域（或 D）内的一切 x 值都成立，则称函数 $f(x)$在定义域（或 D）内是**有界**的［或称 $f(x)$为**有界函数**］. 如果这样的正数 M 不存在，则称 $f(x)$在定义域（或 D）内是**无界**的.

函数的单调性

若函数 $f(x)$在区间 (a,b) 内随着 x 的增大而增大（或减少），即对于区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$ ［或 $f(x_1)>f(x_2)$］ 成立，则称函数 $f(x)$在区间 (a,b) 内**单调增加**（或**单调减少**），而区间 (a,b) 称为函数 $f(x)$的**单调增加区间**（或**单调减少区间**）.

单调增加与单调减少函数统称为**单调函数**，单调增加区间与单调减少区间统称为**单调区间**. 单调增加（或单调减少）的函数的图形是沿横轴正向上升（或下降）.

函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是**偶函数**；如果 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是**奇函数**.

奇函数的图形关于原点中心对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的常数 L，使得对于任意一个 $x\in D$ 有 $(x\pm L)\in D$，且 $f(x\pm L)=f(x)$恒成立，则称此函数为**周期函数**. L 称为函数 $f(x)$ 的周期（通常，周期函数的周期是指它的最小正周期）.

4. 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 W. 因为 W 是函数值组成的数集，所以对于任意 $y_0\in W$，必定有 $x_0\in D$ 使得 $f(x_0)=y_0$ 成立，这样的 x_0 可能不止一个. 一般地，对于任意数值 $y\in W$，D 上至少可以确定一个数值 x 与 y 对应，这个数值 x 适合关系 $f(x)=y$，这里如果把 y 看作自变量，x 看作因变量，按函数概念，就得到一个新的函数，这个新的函数称为函数 $y=f(x)$的**反函数**，记作 $x=\varphi(y)$. 这个函数的定义域为 W，值域为 D，相对于反函数 $x=\varphi(y)$，原来的函数 $y=f(x)$称为直接函数.

习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 表示. 只要对应规律不变，自变量和因变量的字母变数无关紧要. 故如果函数 $x=\varphi(y)$是函数 $y=f(x)$的反函数，则 $y=\varphi(x)$ 也是 $y=f(x)$的反函数.

函数 $y=f(x)$和他的反函数 $y=\varphi(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称.

5. 复合函数

若 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，当 x 在某一区间上取值时，相应的 u 值可使 $y=f(u)$都有定义，则称 y 是 x 的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$. 其中，u 称为中间变量.

复合函数不仅可由两个函数，而且可由多个函数复合而成，但不是任何两个函数都能

够复合成一个复合函数.

6. 基本初等函数及初等函数

基本初等函数

常数函数：$y=c$（c 为常数）.

指数函数：$y=a^x(a>0,\ a\neq1)$.

对数函数：$y=\log_a x(a>0,\ a\neq1)$.

幂函数：$y=x^\alpha$（α 为实常数）.

三角函数：如 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 等.

反三角函数：如 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 等.

初等函数

能由基本初等函数通过有限次四则运算和有限次的函数复合而成，且仅用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

（二）多元函数的概念

1. 空间直角坐标系

取相互垂直并交于一点 O 的三条数轴 Ox、Oy、Oz 为坐标轴，分别称为 **x 轴**、**y 轴**、**z 轴**或**横轴**、**纵轴**、**竖轴**，统称为**坐标轴**. 交点 O 称为**坐标原点**（或**原点**）. 每两条坐标轴所决定的平面 xOy、yOz、zOx 称为**坐标面**. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线；它们的正向通常符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，这样就构成了**空间直角坐标系** $Oxyz$.

设 P 为空间任一点，过 P 点分别作垂直于三个坐标轴的平面，且交坐标轴 Ox、Oy、Oz 于 A、B、C 三点，它们在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标值分别是 x、y、z，这样，空间任意一点 P 就唯一确定了一个有序数组 $\{x, y, z\}$；反之，任一有序数组 $\{x, y, z\}$ 也唯一确定了空间的一个点 P. 我们把这个有序数组称为点 P 的**坐标**，记为 $P(x, y, z)$，其中 x、y、z 分别称为点 P 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**.

三个坐标面把空间划分成八个部分，每一部分称为卦限，由 x 轴、y 轴与 z 轴正半轴确定的那个卦限称为第一卦限，其他第二、第三、第四卦限，在 xOy 坐标面的上方，按逆时针方向确定，第五至第八卦限，在 xOy 坐标面的下方，由第一卦限之下的第五卦限，按逆时针方向确定，这八个卦限分别用字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示.

2. 空间两点间的距离公式

空间两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

3. 二元函数的定义

设有三个变量 x、y 和 z，如果变量 x、y 在允许的范围内任意取定一对值时，变量 z 按照一定的规律，总有唯一确定的值与它们对应，则变量 z 称为变量 x、y 的**二元函数**，记作

$$z=f(x,y)$$

其中 x，y 称为**自变量**，而 z 称为**因变量**.

4. 二元函数的几何意义

二元函数 $z=f(x, y)$ 在空间直角坐标系中一般表示一个曲面.

(三) 极限的概念

1. 数列的极限

数列 $\{x_n\}$ 的通项随着项数 n 的无限增大而无限趋近于某一个常数 a，则称数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，称 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限（limit），或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a \ (n\to\infty)$$

如果数列 $\{x_n\}$ 的通项 x_n，当项数 n 无限增大时，不存在上述常数 a，就称数列 $\{x_n\}$ 没有极限，或数列 $\{x_n\}$ 是**发散**的.

2. 函数的极限

(1) $x\to x_0$ 时函数的极限.

设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某一邻域内（但 x_0 点可以除外）有定义，如果当 x 无论从大于 x_0 的方向趋近于 x_0，还是从小于 x_0 的方向趋近于 x_0，函数值会无限地接近于一个确定的常数 A，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时有极限，常数 A 就是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限（limit），或者说函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时收敛于 A，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

(2) $x\to\infty$ 时函数的极限.

如果自变量 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

(3) 左极限与右极限.

如果 x 从 x_0 的左侧（$x<x_0$）无限趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**左极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0-0)=A$$

如果 x 从 x_0 的右侧（$x>x_0$）无限趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**右极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0+0)=A$$

左极限和右极限统称为**单侧极限**. 函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限和右极限同时存在且相等，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

(四) 极限的运算法则

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在自变量 x 的同一变化过程中极限分别为 A 和 B，即

$$\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$$

则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$.

特别地

$$\lim[kf(x)] = k\lim f(x) = kA\ (k\ \text{为常数})$$

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}(B \neq 0)$.

(4) 设函数 $y=f[\varphi(x)]$是由函数 $y=f(u)$与函数 $u=\varphi(x)$复合而成的，$y=f[\varphi(x)]$在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x \to x_0}\varphi(x) = u_0$，$\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$，且存在 $\delta_0 > 0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $\varphi(x) \neq u_0$，则

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = A$$

推论 1　$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n = A^n$（$n$ 为正整数）.

推论 2　$\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)} = \sqrt[n]{A}$（$n$ 为正整数，当 n 为偶数时，$A \geqslant 0$）.

（五）两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；

(2) $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{u \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^{u}=\mathrm{e}$，其中 $\mathrm{e} \approx 2.71828$ 是一个无理数.

（六）无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量与无穷大量的概念

无穷小量　若 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限为零，则称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的**无穷小量**，简称**无穷小**.

无穷大量　当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，若函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的**无穷大量**，简称**无穷大**，记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$（或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$）.

当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，若 $f(x)$ 保持正值且无限增大，则称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的**正无穷大量**，记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$（或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$）. 同样，若 $f(x)$ 保持负值但绝对值无限增大，则称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的**负无穷大量**，记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$（或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$）.

2. 无穷小量的性质

性质 1　有限个无穷小量的和、差、积以及常数与无穷小量的乘积仍为无穷小量.

性质 2　有界变量与无穷小量的乘积仍为无穷小量.

3. 无穷小与极限、无穷小与无穷大的关系

无穷小与极限的关系　函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是在自变量的同一变化过程中的无穷小量.

无穷小与无穷大的关系　若函数 $f(x)$ 为无穷大量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小量；反之，若 $f(x)$（$f(x) \neq 0$）是无穷小量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

4. 无穷小量的阶

设 α 与 β 是在自变量的同一个变化过程中的两个无穷小量，在此过程中，如果

(1) $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$，则称 α 是比 β **高阶的无穷小量**，记为 $\alpha = o(\beta)$.

(2) $\lim \frac{\alpha}{\beta} = k(k \neq 0)$，则称 α 与 β 是**同阶无穷小量**；特别地，若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$，则称 α 与 β 是**等价无穷小量**，记为 $\alpha \sim \beta$.

(3) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$，则称 α 是比 β **低阶的无穷小量**.

(4) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta^q} = k(k \neq 0)$，则称 α 是**关于 β 的 q 阶无穷小量**.

（七）函数的连续性

1. 函数在点 x_0 处连续的定义

设函数 $y=f(x)$在 x_0 的某一点邻域内有定义，如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限存在，而且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续.

2. 左连续与右连续

如果 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 **左连续**；如果 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 **右连续**.

$f(x)$ 在 x_0 连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 既左连续又右连续.

3. 函数在区间连续

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 是 (a, b) 内的**连续函数**；如果 $f(x)$ 在 a 点右连续，b 点左连续，则称 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

一元初等函数在其定义域内连续，其图形是一条连续不断的曲线.

（八）多元函数的极限与连续

1. 二元函数的极限

设二元函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一邻近区域内有定义（在点 P_0 可以无定义），如果点 $P(x, y)$ 以任何方式趋于定点 $P_0(x_0, y_0)$ 时，函数 $f(x, y)$ 都趋于常数 A，则称 A 是函数 $f(x, y)$ 在点 P_0 的**极限**，记作

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A \text{ 或 } \lim_{\rho \to 0} f(x,y) = A$$

这里，$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

2. 二元函数的连续性

设二元函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的邻近区域内有定义，且

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ **连续**.

如果函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内的每点都连续，则称函数 $f(x, y)$ 在 D 内**连续**.

二元初等函数在其定义域内连续，其图形是一个无孔隙、无裂缝的曲面.

三、典型题例

例 1 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求：

(1) $y=f(3x+1)$ 的定义域； (2) $y=f(\sin x)$ 的定义域.

解题提示 本题其实是对一个复合函数 $f[\varphi(x)]$求定义域，已知 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，函数 $y=f(u)$ 的定义域，即中间变量 u 的范围；则我们可以根据函数关系 $u=\varphi(x)$求出 x 的范围.

解：(1) 由 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，即 $y=f(u)$ 的定义域为 $[0,1]$，$u=3x+1$，知 $0\leqslant 3x+1\leqslant 1$，解得 $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 0$，故 $y=f(3x+1)$ 的定义域为$\left[-\frac{1}{3},0\right]$；

(2) 同 (1) 有，$0\leqslant\sin x\leqslant 1$，解得 $2k\pi\leqslant x\leqslant (2k+1)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，$y=f(\sin x)$ 的定义域为$\bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty}[2k\pi,(2k+1)\pi]$.

评注 将以上过程推广到多重复合的函数，解题思路是一样的.

例 2 设 $g(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ x & x>0\end{cases}$，及 $f(x)=\begin{cases}x & x\leqslant 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}$，求 $f[g(x)]$及 $g[f(x)]$.

解题提示 对分段函数求复合函数，关键是自变量和中间变量的取值范围.

解：由题意得 $f[g(x)]=\begin{cases}g(x) & g(x)\leqslant 0\\ -g^2(x) & g(x)>0\end{cases}$，而 $g(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ x & x>0\end{cases}$，故

$f[g(x)]=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}$；$g[f(x)]=\begin{cases}0 & f(x)\leqslant 0\\ f(x) & f(x)>0\end{cases}$，而由 $f(x)=\begin{cases}x & x\leqslant 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}$ 知道 $f(x)\leqslant 0$，所以 $g[f(x)]=0$.

评注 本题也可以先划分自变量 x 的范围，再根据不同范围对应不同的函数表达式来求出复合函数的函数解析式.

例 3 将下列复合函数分解成基本初等函数或简单函数

(1) $y=\sin^2\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$； (2) $y=\ln(\tan e^{x^2+2\sin x})$.

解题提示 (1) 复合函数的复合过程是由里到外，函数套函数而成的，分解复合函数，是采取由外到内层层分解的办法，从而拆成若干基本初等函数或基本初等函数的四则运算；

(2) 基本初等函数经有限次四则运算所得到的函数称为简单函数.

解：(1) 最外层是二次方，即 $y=u^2$；次外层是正弦，即 $u=\sin v$；从外向里第三层是幂函数，即 $v=w^{-\frac{1}{2}}$；最里层是多项式，即 $w=x^2+1$；所以，分解得

$$y=u^2,\ u=\sin v,\ v=w^{-\frac{1}{2}},\ w=x^2+1;$$

(2) 最外层是对数，即 $y=\ln u$；次外层是正切，即 $u=\tan v$；从外向里第三层是指数函数，即 $v=e^w$；最里层是简单函数，即 $w=x^2+2\sin x$；所以，分解得

$$y=\ln u,\ u=\tan v,\ v=e^w,\ w=x^2+2\sin x.$$

评注 复合函数的分解，是我们后面学习复合函数求导的关键.

例 4 计算下列数列的极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n})$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-4)^n+6^n}{5^{n+1}+6^{n+1}}$.

解题提示 (1) 当数列的形式复杂时，我们可以将其分解后利用四则运算来计算数列极限；

(2)、(4) 利用一般结论

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_mn^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1n+a_0}{b_kn^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1n+b_0}=\begin{cases}\frac{a_m}{b_k}, & m=k\\ \infty, & m>k\\ 0, & m<k\end{cases}$$

其中 $a_m\neq0$，$b_k\neq0$；

(3) 利用无穷小量乘以有界量仍为无穷小量.

解：(1) 因为 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)=\dfrac{1-\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1-\frac{1}{2^4}}{1-\frac{1}{2^2}}\cdots\dfrac{1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}}{1-\frac{1}{2^{2^n}}}=\dfrac{1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}}{1-\frac{1}{2}}$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)=2$；

(2) 因为分子，分母中 n 的最高幂次均为 $\frac{1}{2}$，所以得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}}=1$；

(3) 用有理化方法得到

$$\lim_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}2\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}$$

因为 $\left|\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\right|<1$，所以 $\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}$ 是有界量，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\xlongequal{\text{有理化}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}=\sin0=0$$

故

$$\lim_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n})=0;$$

(4) 分子，分母同除以式子中最大项 6^{n+1}，得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-4)^n+6^n}{5^{n+1}+6^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{-4}{6}\right)^n\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}+1}=\frac{1}{6}.$$

评注 数列的问题往往不是孤立的，一个数列极限的计算可能要使用几种方法，所以

读者在学习时要培养综合运用能力，不要将知识点割裂得太碎.

例 5 已知 $f(x)=\begin{cases}1-2x & x\leqslant 0\\ \dfrac{\sin x}{x} & x>0\end{cases}$，求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解题提示 这是分段函数求分段点处的极限，应分别计算左、右极限；根据函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时函数极限存在的充要条件是左极限和右极限同时存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

解：$x\to 0$ 时，$f(x)$的左极限和右极限分别是

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1-2x)=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sim}x}{x}=1$$

故

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1.$$

评注 当点 $x=0$ 处左、右极限不相等，则函数在该点处的极限是不存在的.

例 6 计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$； (2) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$.

解题提示 (1) 利用恒等变形；

(2) 带有根号，且出现$\infty-\infty$，$0-0$ 型的极限，多使用分子（分母）有理化，或者做个变量替换令 $x=\dfrac{1}{t}$；

(3) 利用变量替换，和重要公式$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x+1-3}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2+x+1)}$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2+x+1}=-3;$$

(2) 先有理化，再进行恒等变形.

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to +\infty}x^{\frac{3}{2}}\left[\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)\right]\\
&=\lim_{x\to +\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\right)\\
&=\lim_{x\to +\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)}\\
&=\lim_{x\to +\infty}\frac{-2x^{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}\\
&=\lim_{x\to +\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}=-\frac{1}{4};
\end{aligned}$$