怎样学会解数学题

[illegible]·费里德曼 等著

吉林教育出版社

Zenyang Xuehui Jie Shuxue Ti

怎样学会解数学题

〔苏〕Л·М·弗里德曼 等著

迟志敏 李国相 李浩明译

吉 林 教 育 出 版 社

怎样学会解数学题

〔苏〕Л·M·费里德曼 等著
迟志敏 李国相 李浩明 译

*

吉林教育出版社出版吉林省新华书店发行
辉南县印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 7.5印张 2插页 162,000字
1985年3月第1版 1985年3月第1次印刷
印数：1—23,000册
统一书号：7375·3 定价：0.82元

序　　言

解答习题在数学教学中占有重要的位置，因此，人们对于训练解答习题都非常重视。但到目前为止，大概这种训练的唯一方法就是示范解答一定类型的习题，并根据所掌握的方法作大量的、有时是很费力的练习。所以，为学生编写的所有解题参考书都是采用习题集的形式（附有答案或对习题做一些提示）。

近年来，出现了许多参考书，就关于解题和寻求这些习题的解法阐述了一些一般的提示或建议（启发法）。这方面首先有Д. Пойя 的书，还有一些适合报考大学的复习参考书。但是，这些参考书对于解答数学习题的问题阐述得不够充分，缺乏必要的系统性，没有考虑到学生解题所遇到的实际困难。

训练解题这个问题在心理学上的研究表明，学生没有形成一般的本领和技能的根本原因就在于：解题时缺乏经常亲自动手进行分析，没有从中归纳出一般的运算方法及其理论根据。

于是，产生了为学生编写这样一些关于解题的参考书的必要性。这些书最好能帮助学生克服在解答数学习题时防碍形成本领和技能的种种因素。

本书也许是创作这种参考书的第一次尝试，它是否合适，请读者鉴别。

作者向对本书的创作提过有益意见的 Б. А. Виколу,

В. С. Крамору和Т. К. Шабашов表示感谢。作者向对本书的意见寄给出版社的所有人们表示感谢。

作　　者

目　　录

第一篇　习题及其解答

第二篇　解题方法

第一篇　习题及其解答

第一章　习题的组成

1.1　解题从何处着手？

假如你要解题，你从何处着手呢？

可能有人以为这个问题没有什么特殊的意义．因为事情很清楚，希望解题，就必须从某种尝试开始．应该指出，确实有许多学生这样做：一接到题目，立刻开始做解题的某种尝试。

著名的苏联心理学家П．Я．葛利佩林把人们这样的思想行为准确地叫做《布朗运动》，即混乱的思想行为．这些人们急于做解题的某种赏试，像通常所说的那样，先做一种尝试。当尝试已被证实是错误的时候，他们立刻就做第二种尝试，结果又一次错了，然后再来第三种．就这样，直到或者放弃所有的解题的尝试，或者往往是偶然地找到了正确的解法．最主要的是，这样的解答缺乏深入的和全面的分析习题．解题应该总是从分析习题开始．于是，让我们就从对习题进行分析开始学起吧！

1.2　习题的条件和要求

接到习题后，自然我们要仔细地阅读。

习题 1　在直角三角形中，内切圆的切点把斜边分割成长分别为5厘米和12厘米的两条线段，求三角形两条直角边。

在阅读这个习题时，我们首先可以看出以下事实：这个习题有确定的论断和要求。题的论断是："在直角三角形中，内切圆的切点把斜边分成长分别为5厘米和12厘米的两部分"。题的要求是："求三角形的两条直角边"。

习题常常要求用问题的形式来表述，但是，每个问题都是以要求找出这个问题的答案为前提。所以，每个问题都可以用要求来代替。

习题 2　旅行者在江上乘船航行了90公里，又步行了10公里，其中步行用的时间比乘船少用4小时。如果旅行者用他乘船那么多时间步行，而用他步行那么多时间乘船航行，那么这两段距离是相等的。试问他步行和乘船航行各用了多少小时？

这个习题的问题可以用这样的要求来代替：求出旅行者步行的时间和乘船航行的时间。

可以看出，任何习题的表述都是由若干个论断和要求组成的。习题的论断叫做习题的条件①。

由此可见，在分析习题时，首先要做的就是把习题的表

① 注意，有时把习题的所有条件和要求一同叫做习题的表述。

述划分为条件和要求两部分．我们知道，一个习题通常不只是有一个条件，而是有几个独立的基本的（即不能再分的）条件．习题中的要求或许也不只一个．因此，必须把习题的所有论断和要求划分成个别的基本条件和要求．

在习题1中，可以划分为下列的基本条件：

1）习题中所说的三角形是直角三角形；

2）在这一三角形中有一内切圆；

3）圆切斜边的切点把斜边分成两条线段；

4）这两条线段中的一条的长为5厘米；

5）另一条线段的长为12厘米．

这个习题的要求可分成以下两条基本要求：

1）求三角形一条直角边的长度；

2）求三角形另一条直角边的长度．

习题2的论断可分成下列几个条件：

1）旅行者在江上乘船航行了90公里；

2）他步行了10公里；

3）他步行比在江上乘船航行少用了4小时；

4）如果旅行者用乘船航行那么多时间步行，则所走的距离设为S_1；

5）如果他用步行那么多的时间乘船航行，则所航行的距离设为S_2；

6）距离S_1与S_2相等．

从这个习题的要求中可分出以下两点要求：

1）求旅行者步行的时间；

2）求他乘船航行的时间．

把习题的表述划分成条件和要求一般不总是容易做到的．在许多情况下，为此需要把习题分开来理解，并对习题

加以改编。例如：

习题 3 数2^{100}含有几位数（在十进位制中）？

这个习题的表述由一个问题组成，但是，对于这个问题深入思考一下，我们就可以从中划分出这样的条件：

1）2^{100}是自然数；

2）在十进位制中，按照通常的方式可以把它写成多位数的形式。

那么，这个习题的要求是：求出这个多位数含多少位。

习题 4 解方程$ax^4-x^3+a^2x-a=0$。

这个习题的表述是由一个要求组成，但是分析这个要求，使我们能从中分出条件和要求。条件：$ax^4-x^3+a^2x-a=0$是一个方程；要求：解这个方程。

当然，不能到此停止了，还要继续分析下去。我们指出，方程中含有两个字母：a与x。这里字母a是参数，即在本习题范围内当作常量；字母x是变量，它的变化区域是数集，比如是实数集（这通常在习题中事先约定）。此外，回想一下方程表示什么是有益的。

那么，这个习题的条件就是这样的：

1）a是参数；

2）x是变量，其变化区域是实数集；

3）$ax^4-x^3+a^2x-a=0$是带有变量x的命题。

那么这个习题的要求可以这样说：在变量x的变化区域中，求出一切使命题成立的x的值。

习题的分析还可以再延续下去。可以问：在给定的条件下，求出变量x的值意味着什么？找到了这个问题的答案，就能使得习题的要求明确化。习题的要求就会采取这样的形式：求出x用参数a表示的表达式，当参数a取一切可以允

许的值时，所得到的x的值代入给定的命题中的x，使得这个命题成立。

正如我们所看到的那样，习题的分析，习题的条件与要求的划分可以进行到不同的深度。分析的深度主要看所给的习题类型和解答这些习题的一般方法我们是否熟悉来决定。如果熟悉，那么我们把给定的习题归结为确定的类型进行简单地分析就足够了。如果不熟悉，那么为了寻求习题的解法，必须进行更深入的分析。

练　习　1

分析下列习题，指出其中每个习题所有的基本条件和要求：

1.1　当x取什么值时，命题$2^x>4$为真？

1.2　设$A(-1,2)$，$B(2,3)$，$C(1,1)$，$D(3,5)$，作向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$的和。

1.3　一列火车以每小时72公里的速度从A地开往B地。经过45分钟后，另一列火车以每小时75公里的速度从B地开往A地。A地与B地之间的距离为348公里。问在离B地多远的地方列车相遇？

1.4　立方体的边长为a，立方体各边间的距离是多少？

答　案：

1.1　条件：1）$2^x>4$是带变量x的命题；2）变量x的变化区域是集合R。要求：求出集$X\subset R$，使得对所有的$x_0\in X$时，命题$2^{x_0}>4$为真。

1.2 条件：1）点A的坐标是（$-1,2$）；2）点B的坐标是（2，3）；3）点C的坐标是（1，1）；4）点D的坐标是（3，5）；5）向量$\overrightarrow{AB}$的起点是A，终点是B；向量$\overrightarrow{CD}$的起点是C，终点是D。要求：作一向量，使之等于$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$之和。

1.3 条件：1）由A地开往B地的列车行驶的速度为72公里/小时；2）由B地开往A地的列车行驶的速度为75公里/小时；3）第一列火车从A地开出以后经过45分钟，第二列火车从B地开出；4）A地与B地之间的距离为348公里。要求：求出由B地到两列火车相遇的地点之间的距离。

1.4 条件：1）已知一个立方体；2）立方体的边长为a。要求：1）求出立方体同一平面上的对边之间的距离；2）求出立方体不在同一平面上的平行边之间的距离；3）求出立方体交错边之间的距离。

1.3 分析习题的方向

回到习题3．分析这个题，我们划分出的条件是：1）2^{100}是自然数；2）按着通常的方式，可以把它写成多位数的形式。

为什么从习题的表述中恰好划分出这两个条件呢？事实上，可以划分出另外的条件，比如：2^{100}是2自乘100次的积或者2^{100}是数等等．但是，为什么我们划分出的不是这些条件，而是前面所说的那两条呢？

一切问题在于对习题进行分析，从习题的表述中划分出它的条件．我们任何时候都应该使这种分析适合习题的要求，就好像经常在回顾习题的要求．换句话说，分析习题始终要注意到习题的要求。

实际上，在习题3中，我们需要知道的是数2^{100}含有多少位数。当然，这必须以下述两个条件为前提：第一认为这

个数是自然数（因为一般在其他类型的数的写法中，数的位数无法计算，而在这里由幂的定义可知它是自然数）；第二这个自然数按通常的方式可以写成多位数的形式。这两个条件我们在分析习题时就划分出来了。下面，我们再来研究一些例子。

习题 5 汽艇在江上顺水和逆水各航行了20公里。汽艇通过全程比它在静水中航行40公里所需要的时间是多、是少、还是一样呢？

初步分析这个习题，可以划分出的条件是：

1）汽艇顺水航行了20公里；

2）汽艇逆水也航行了20公里；

3）汽艇在静水中航行了40公里。

但是，把习题的这些条件与要求相对照：汽艇在顺水航行的路程和逆水航行的路程所用的时间合在一起与它在静水中航行的路程所用的时间进行比较，要判断出是多、是少、还是一样，我们发现所进行的分析是不够充分的。这种不充分性表现在，虽然在条件里关于时间什么也没说，但是习题的要求却在于比较时间的间隔。因此，必须继续进行分析。为此，我们必须深入思考习题的要求。应当把汽艇在江上顺水与逆水航行的时间与这只汽艇在静水中航行的时间加以比较。这个时间取决于什么呢？显而易见，取决于汽艇自己的速度，江水的速度以及汽艇走过的距离。但是，如果说汽艇所走过的距离在习题的表述中已经给出，那么汽艇的速度和江水的速度却连提也没有提到。怎么办呢？在这种情况下，把没有它就不能解题的这些量当作不确定的参数。比如，假设汽艇本身的速度为 v 公里/小时，而江水的流速为 a 公里/小时。现在我们可以划分出这样一些条件：

1）汽艇本身的速度为 v 公里/小时；

2）江水的流速为 a 公里/小时；

3）汽艇顺水航行了20公里；

4）它逆水航行了20公里；

5）汽艇在江上往返全程共用了 t_1 小时；

6）汽艇在静水中航行了40公里；

7）在静水中航行的路程它用了 t_2 小时。

习题的要求：比较 t_1 与 t_2 并确定它们是相等还是不相等，如不等，那么哪个大。

习题 6 从体积一定的所有圆柱体中，找出全表面积最小的圆柱体。

这个习题的条件（"从体积一定的所有圆柱体中"）可以当作圆柱体的集合来理解，这些圆柱体的体积设为数 V（这里 V 是参数）。习题的要求是，从给定的圆柱体的集合中求出全表面积最小的圆柱体。

我们把这个要求同所指出的条件联系起来，明显地，所研究的圆柱体的全表面积作为变量出现的，应当求出这个变量的最小值。为此，显然这个变量可表成另一个变量的函数。比如，可以取圆柱体的底半径 r 作为另一变量。因此，我们需要求出具有这种性质的 r（在参数 V 给定的条件下），使得 $S(r)$ 取最小值，这里 $S(r)$ 是底半径为 r 的圆柱体全表面积的函数。

于是，习题 6 的条件就是：

1）所研究的是体积为 V（V 是参数）的圆柱体的集合；

2）这些圆柱体的底半径是变量 r；

3）这些圆柱体的全表面积 S 是某个函数 $S(r)$。

习题的要求：

1） 求出函数$S(r)$；

2） 求出具有这样性质的r，使得$S(r)$取最小值。

考虑习题要求的分析方向还在于，必须阐明习题要求的实质，要特别注意明确习题中需要求什么和做什么。

习题 7 证明表达式

$$\frac{b+1}{b}+\frac{c+1}{c}-\frac{b+c}{bc}$$

的值的集合由一个元素组成。

这个习题的条件是明显的：$\frac{b+1}{b}+\frac{c+1}{c}-\frac{b+c}{bc}$是依赖于变量 b 与 c 的表达式。

但是，习题的要求的实质是什么呢？证明给定的表达式的值的集合是由一个元素组成的，这是什么意思？

显而易见，这可以这样理解：已给定的表达式依赖于变量 b 与 c ，变量 b 与 c 的变化区域是除 0 以外的实数（因为 b 与 c 作为分母不能为 0）。所以，表达式值的集合是无限集，但需证明这个集是由一个元素组成的。这怎么能办到呢？这可能只有这样一种情况，如果已给定的表达式所有的值彼此都相等，即表达式所有的值都是同一个数（集合的元素）。因此，这个习题的要求是：证明已给表达式所有的值都等于一个确定的数。

引导分析习题的例子暂举到此。今后我们将会遇到各种分析习题的例子，因为分析习题、理解习题实质的本领在解题的一般本领中是主要的。

练 习 2

分析下列各题，指出每个题所有的条件和要求：

2.1　底为正方形的无盖水槽需要容纳液体V公升。做这样的水槽时，表面积多大用的材料最少？

2.2　已知两个弓形ϕ_1与ϕ_2，且$\phi_1 \overset{k}{\sim} \phi_2$，$\phi_2 \overset{k}{\sim} \phi_1$。根据这些已给的条件能否求出$k$值？

2.3　两个点沿着周长为60米的圆周向着同一方向做匀速运动。其中一个点绕一周比另一个点快5秒，并且每一分钟都能追上另一个点。确定这两个点的速度。

答案：

2.1　条件：1）无盖水槽的形状是长方体；　2）这个长方体的底是正方形；　3）正方形的边长为x（变量）；　4）长方体的高为y（变量）；　5）长方体的体积为V（参数）；　6）$S(x,y)$是长方体的侧面积与下底面积之和。要求：求出具有这样性质的x，y（在参数V一定的条件下），使$S(x,y)$取最小值。

2.2　条件：1）ϕ_1与ϕ_2是两个弓形；2）$\phi_1 \overset{k}{\sim} \phi_2$；3）$\phi_2 \overset{k}{\sim} \phi_1$。要求：1）确定能否根据所给的条件求出$k$，比如，建立关于$k$的方程；2）如果能，那么求$k$（求出这个方程的根）。

2.3　条件：　1）两个点沿着圆周运动；　2）圆的周长为60米；3）两个点作匀速运动；4）它们沿同一方向运动；　5）第一个点绕一周比另一个点快5秒；　6）第一个点一分钟比第二个点多绕一周。要求：1）求出第一个点的速度；2）求出第二个点的速度。

1.4　习题的条件是如何给出的？

对于某些更复杂的习题来说，上面所研究的对习题的分析（把习题划分为各别的条件和要求），还要适当地继续下去。就是说，要确定所划分出的条件是如何给出的（由什么