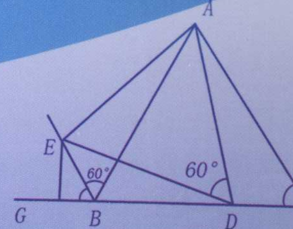
教师教育资源系列丛书



SHUXUE
XINGQUYUCHUANGZAOLI

数学
兴趣与创造力

丛书主编　季杜宇
本册主编　周沛耕

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

教师教育资源系列丛书

数学

兴趣与创造力

丛书主编　李杜宇
本册主编　周沛耕

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

图书在版编目（CIP）数据

数学·兴趣与创造力／周沛耕主编. —北京：中国石化出版社，2010.1
ISBN 978－7－5114－0195－3

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①周… Ⅲ. ①数学课－中学－教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 229222 号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街 58 号
邮编:100011　电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com.cn
北京科信印刷厂印刷
全国各地新华书店经销

*

850×1168 毫米 32 开本 8 印张 191 千字
2010 年 1 月第 1 版　2010 年 1 月第 1 次印刷
定价:15.00 元

教师教育资源系列丛书

编 委 会

序 言

在众多教育工作者的期待中，《数学·兴趣与创造力》与您见面了，这是中国教育学会“十一五”教育科研规划课题《数学资优生思维能力培养的实践研究》的又一重要成果。

周沛耕老师是北京大学附属中学数学特级教师，曾荣获全国十佳教师称号，是享受国务院特殊津贴的有突出贡献专家之一。他是国家奥林匹克集训队教练、北京队主教练、国家教委全国理科实验班授课教师，是多届国际奥林匹克数学竞赛金奖获得者的辅导老师。他的“激发式”教学风格，注重开发学生的智力，调动学生的积极性；其主讲的数学新题、综合题从大处着眼，系统阐明各类数学综合题的命题实质，每一道例题都从不同侧面观察，从多方入手，用不同但又综合了多种数学知识的思路解决问题，在国内“堪称一绝”。

周老师认为数学有两个功能，首先能锻炼人的思维，同时又是一切自然科学的基础。只要数学学好了，无论哪个自然学科都能学好。数学的学习能有效拓宽学习思路，培养抽象思维，扩展发散思维，激发创造思维，对日后的深造和一生的发展都是一种积累。现在，一些孩子不喜欢数学不是因为本身没有天赋，而是感觉听不懂，学习效果不佳，因此产生了失落感。认知心理学告诉我们，要站在孩子的角度，注重引导孩子以积极、愉快、平静、正常的心态研究问题，才会避免出现知识不消化的障碍。有了信心，才有兴趣，才能主动去学去钻，使自己的头脑逐渐“强

大”，再多难题也能迎刃而解。

周老师编写的这本书，娓娓道来的数学推理，为我们打开了一扇通往数学王国的大门。他重视拟定解题策略的多样性，鼓励探寻不同的解题方法，引导孩子更自由、自主地运用自己的想象去作答。本书深入浅出而又循循善诱，让你感受数学世界的轻松与快乐，享受数学学习的乐趣！这就弥补了学校课堂教学中的不足，为孩子提供了一个充分发挥个人潜能、培养自己的创造与创新精神的舞台。

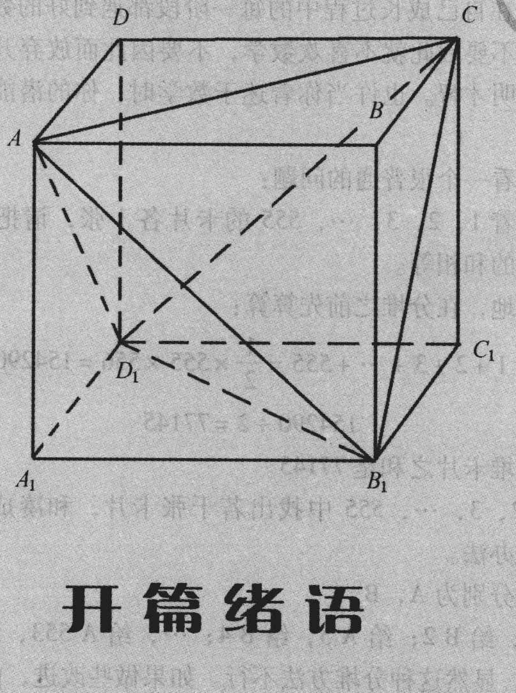
通过寓教于乐的课堂教学，使孩子从学习中体验到快乐，体验到成功，树立起自信心，达到“乐学”的境界。温州嘉一才艺学校为《数学资优生思维能力培养的实践研究》做了大量积极的探索，也为本书的出版做了许多工作，这无疑是有益的。相信这本书一定会给广大教育工作者、学生、家长以新的启发。

中国教育学会常务副会长

郭永福

2009.7.9

目　　录



开篇绪语

有的人喜欢数学，有的人不怎么喜欢它。

喜欢数学的人最早是由兴趣开始的。不少年龄较小的孩子对数学的兴趣正是得益于他们在小学、中学遇到的善于激发孩子们思维积极性和创造性的优秀数学教师。

成功的数学教师不仅要教给学生重要的数学概念、法则、原理的来龙去脉，更重要的是应当让学生们学会用数学与哲学的眼光看世界，学会思考，学会探究，学会创新。

一个人在自己成长过程中的每一阶段都遇到好的数学老师是很难得的。你不要因此就不喜欢数学，不要因此而放弃开发本来属于你自己的聪明才智。也许当你着迷于数学时，你的潜能会极大地释放出来。

让我们看一个很普通的问题：

分别写着 1，2，3，…，555 的卡片各 1 张，请把它们分成两堆，使每堆的和相等。

很自然地，在分堆之前先算算：

$$1+2+3+\cdots+555=\frac{1}{2}\times555\times556=154290$$

$$154290\div2=77145$$

看来每堆卡片之和是 77145。

从 1，2，3，…，555 中找出若干张卡片，和凑成 77145 不容易，要另想办法。

设两堆分别为 A，B。

给 A 1，给 B 2；给 A 3，给 B 4；…，给 A 553，给 B 554；还剩 1 张 555。显然这种分堆方法不行。如果做些改进，由 2 张 1 轮改成 4 张 1 轮，即是给 A 1，4，给 B 2，3；给 A 5，8，给 B 6，7；…，每发出 4 张卡片，两堆的临时和是相等的。继续这样发下去，最后给 A 549，552，给 B 550，551；还剩下 553，554，555。如果不考虑 553，554，555 这 3 张卡片，A、B 两堆的和是相等的。但是剩下的 3 张卡片怎么分？

不要灰心，要看到自己的思维层次是在进步。这时最好重新审

视一下曾经想过的办法，吸收其中比较合理的部分。

$1+2=3$。如果按上述分法把4，5，6，…，555发下去，最后剩下1，2，3。事情就好办了！

分法可以是

A组：$4k$，$4k+3$　　($k=1$，2，…，138)，

B组：$4k+1$，$4k+2$　　($k=1$，2，…，138)。

最后再给A 1，2，给B 3。

当你经过努力找出了卡片分堆的方法之后，最好再给自己提些新的问题，例如：

(1) 前面提到的4张1轮，剩下553，554，555的分法真的行不通吗？(解题途径的思考)

(2) 如果不是分成和相等的两堆，而是3堆，4堆，5堆，…，可行吗？(问题的变式思考)

(3) 把1，2，3，…，555分成和相等的K组($K>1$)，K究竟有几种可取值？(问题本质的思考)

……

不管你是否能解决这些问题，只要善于提出问题，就是思维范畴的突破和创新，在研究新问题的过程中你或许能得到更多的收获。

先考虑问题(1)。4张1轮的分法是

A：	1	4	5	8	9	12	……	277	280	……	549	552
B：	2	3	6	7	10	11	……	278	279	……	550	551

，

还剩下553，554，555三张卡片。

把553，555给一堆，554给另一堆，产生了差$(553+555)-554=554$。这样分当然不行。调整一下呢？注意到$554\div 2=277$，按前面4张1轮的方法277分到A堆。为使A、B两堆卡片中数的和相等，可以把553，555分到A堆，把554分到B堆，再把A堆中已分得的277调到B堆。这说明4张1轮再适当调整的方法也能成功。

在这种调整的启发下，重新考查两张1轮的分配方式(当初这种分配方式曾经被放弃过)：

A：1　3　5　…　553，

B：2　4　6　…　554。

还剩1张555。除去这张555外，B堆和比A堆和多553。容易看出，只要把555放入A堆，把A堆中已分到的1调入B堆即可。

再看问题(2)中的“分成和相等的3堆”的情形。

$154290 \div 3 = 51430$

如果能分成和相等的3堆，每堆和应当是51430。设三堆为A，B，C。受分两组时4张卡片为1轮的分堆方式的启发，可按6张卡片为1轮，发出92轮共552张卡片：

A：$6k+1$，$6k+6$，

B：$6k+2$，$6k+5$，

C：$6k+3$，$6k+4$。　($k=0$，1，2，…，91)

还剩下553，554，555三张卡片。如果暂不考虑这3张卡片，A、B、C三堆的和是相等的。最后可把555放在A组，554放在B组，553放在C组，再把A组中的“1”调入C组就行了。

因为$555=3\times185$。从平均数目的意义上看每堆可平均分得185张卡片。上面分成和相等的3堆虽然完成了任务，但是各堆分得的卡片张数不同(A堆184张，B堆185张，C堆186张)。如果进一步要求“三堆卡片的和相等，且卡片张数相等”也不难办到。例如先按上述方案分出552张卡片后再把553分到A组，555分到B组，554分到C组，最后把A组中的“1”与B组中的“2”互换即可。

把这些卡片分成和相等的4堆办不到，因为总和154290不是4的整数倍。

分成和相等的5堆可以实现，自己试试，不仅可分成和相等的5堆，还可以要求各堆卡片张数相等。

至于问题(3)，则多少带有一点理论性，一般结论是：

设m为正奇数，$n\geqslant2$，n是正整数。那么总可以把分别写1，2，3，…，mn的$m\cdot n$张卡片分成m堆，使每堆卡片上所写数之和相等，且每堆恰有n张卡片。

第30届国际数学奥林匹克(IMO)的第1题实际上就是这种“卡片分堆”问题，该题的意思是“把分别写有1，2，3，…，1989的

1989 张卡片分成 117 堆，使每堆卡片所写数之和相等，且各堆卡片数目也相等”。

由此看来，普通的问题经过认真推敲后也能显出一定的品味。

数学研究的是现实世界中事物的数量关系、空间形式以及哲理意义上的逻辑关系。为了培养自己的空间想象能力，可以经常考虑一些基本几何模型，例如正四面体模型。

用 4 块全等的正三角形纸片可以拼合成一个正四面体，如图 1。正四面体有 4 个面，4 个顶点和 6 条棱。图中 $\triangle ABC$，$\triangle ACD$，$\triangle ADB$，$\triangle BCD$ 是全等的正三角形，A，B，C，D 叫做正四面体 $ABCD$ 的顶点，AB，AC，AD，BC，CD，DB 叫做正四面体的棱，其中 AC 与 BD，AD 与 BC，AB 与 CD 是 3 组异面对棱。

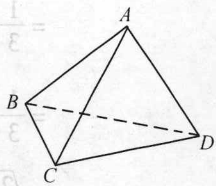


图 1

（1）对正四面体几何模型的认识

一张正三角形纸片以它的 3 条中位线为折痕同向折叠，当原三角形三顶点重合时便形成一个正四面体(图 2)。2002 年全国高考文理合卷考区数学试卷的最后一题的第(1)问就考查了对正四面体的这种认识。

正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，去掉 4 个正三棱锥 $B-ACB_1$，$D-ACD_1$，$A_1-AB_1D_1$，$C_1-CB_1D_1$ 后剩下的空间图形是一个正四面体 AB_1CD_1(见图 3)。对同一个正方体，这样制作的正四面体共有两个。

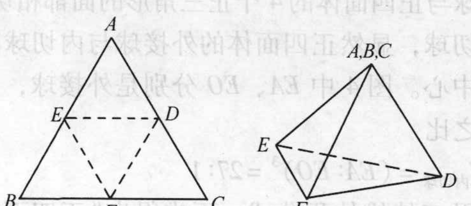


图 2

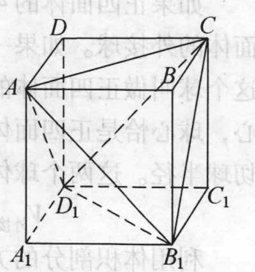


图 3

(2) 正四面体的基本几何性质

1) 棱长为 a 的正四面体体积

如图4,作 AO 垂直面 BCD 于 O,O 是正$\triangle BCD$ 的中心,$BO=\frac{\sqrt{3}}{3}a$。

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{ABCD}} &= \frac{1}{3}\cdot AO\cdot S_{\triangle \mathrm{BCD}} \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{AB^2-BO^2}\cdot S_{\triangle \mathrm{BCD}} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{12}a^3
\end{aligned}
$$

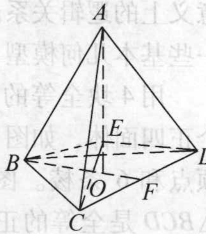


图4

正四面体体积公式也可由图3中正方体体积与4个正三棱锥体积之差求得。因为 $AC=a$ 时,$AB=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,所以

$$
V_{AB_1CD_1}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^3-4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3
$$

设 E 为正四面体体心,$EA=EB=EC=ED$。由对称性知 E 在图4中 AO 上。$V_{E-BCD}=V_{E-ACD}=V_{E-ABD}=V_{E-ABC}=\frac{1}{4}V_{ABCD}$,由此得

$$
\frac{EO}{AO}=\frac{V_{E-BCD}}{V_{ABCD}}=\frac{1}{4}
$$

如果正四面体的4个顶点都在同一个球面上,这个球叫做正四面体的外接球。如果一个球与正四面体的4个正三角形的面都相切,这个球叫做正四面体的内切球,显然正四面体的外接球与内切球同心,球心恰是正四面体的中心。图4中 EA、EO 分别是外接球,内切球半径。这两个球体积之比

$$
V_{外接球}:V_{内切球}=(EA:EO)^3=27:1
$$

利用体积剖分的方法及三棱锥体积公式,不难得出"正四面体内任一点到正四面体4个面距离之和是定值"的结论。

如图 5，在棱长为 a 的正四面体 $ABCD$ 的棱 AB，AC，AD 上分别有 L，M，N 三点，$AL=x$，$AM=y$，$AN=z$。

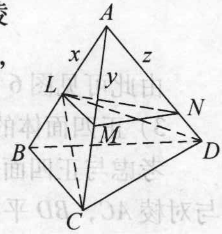


图 5

容易求出

$$\frac{V_{ALMN}}{V_{ABCD}}=\frac{V_{ALMN}}{V_{LACD}}\cdot\frac{V_{LACD}}{V_{BACD}}$$

$$=\frac{yz}{a^2}\cdot\frac{x}{a}=\frac{xyz}{a^3}$$

2）正四面体中的一些角

如图 6，设 E 是正四面体 $ABCD$ 的体心，显然 $\angle AEB=\angle AEC=\angle AED=\angle BEC=\angle CED=\angle DEB$。在等腰 $\triangle EAD$ 中，不难求出

$$\cos\angle AED=\frac{EA^2+ED^2-AD^2}{2EA\cdot ED}$$

$$=\frac{\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}a\right)^2+\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}a\right)^2-a^2}{2\cdot\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}a\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{3}$$

$$\angle AED=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$$

设 P 为棱 AC 的中心，连结 PB，PD。$\angle BPD$ 是正四面体相邻两个面所成的二面角的平面角。

$$\cos\angle BPD=\frac{BP^2+DP^2-BD^2}{2\cdot BP\cdot DP}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-a^2}{2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}$$

$$=\frac{1}{3}$$

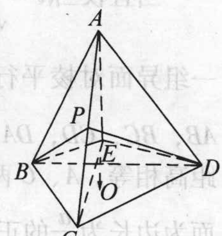


图 6

$$\angle BPD = \arccos \frac{1}{3}$$

由此可见图 6 中 $\angle BPD = \angle OED$。

3）正四面体的一些特殊截面

考虑与正四面体一组异面对棱平行的截面。图 7 中截面 $EFGH$ 与对棱 AC，BD 平行。

设 $AB = a$，$AE : EB = t(t > 0)$，$EFGH$ 是矩形。

$$EF = \frac{AC \cdot BE}{AB}$$

$$= a \cdot \frac{\frac{1}{t}}{\left(1 + \frac{1}{t}\right)}$$

$$= \frac{a}{1 + t},$$

$$EH = \frac{BD \cdot AE}{AB}$$

$$= a \cdot \frac{t}{(1 + t)},$$

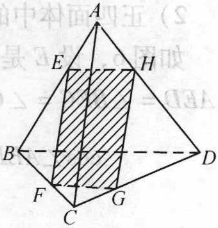


图 7

$$S_{EFGH} = EF \cdot EH = \frac{t}{(1 + t)^2} a^2 = \frac{a^2}{t + \frac{1}{t} + 2} = \frac{a^2}{\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 + 4}$$

$$\leqslant \frac{a^2}{4}$$

当且仅当 $\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} = 0$，即 $t = 1$ 时，$S_{EFGH} = \frac{a^2}{4}$。这表明与正四面体一组异面对棱平行的截面面积的最大值为 $\frac{a^2}{4}$，面积最大的截面过 AB，BC，CD，DA 的中点。正四面体的顶点 A，B，C，D 与该截面距高相等。A、C 两点在该截面一侧，B、D 两点在另一侧。此时截面为边长为 $\frac{a}{2}$ 的正方形。这样的截面有 3 个。它们分别与 3 组异面

对棱平行。

图 8 所示的截面 LMN 是过 AB，AC，AD 中点 L，M，N 的，四顶点 A，B，C，D 与平面 LMN 的距离也相等。这样的截面有 4 个。它们分别与正四面体的 4 个面平行。

给定正四面体后，其 4 个顶点与平面 α 距离相等，这样的平面 α 的数目有 7 个，它们两两相交。

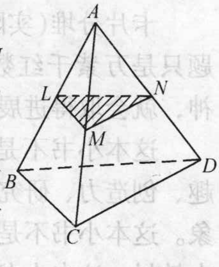
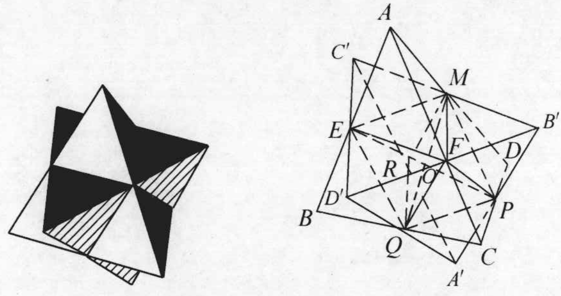


图 8

(3) 关于体心成中心对称的两个正四面体

设正四面体 $ABCD$ 的体心为 O，正四面体 $ABCD$ 关于 O 对称的正四面体为 $A'B'C'D'$，它们形成图 9(a)、图 9(b) 的样子，二者拼合成 24 面体。

如图 9(b)，对于正四面体 $ABCD$ 而言，O 为体心，E，F，M，P，Q，R 为各棱中心，A'，B'，C'，D' 是关于 O 对称的另一个正四面体的顶点，则 O，A'，B'，C'，D'，E，F，M，P，Q，R 这 11 个点，是(2) -3 中提到的 7 个平面中至少 3 个平面交点的集合。



(a)　　　　　　　　(b)

图 9

看起来很简单的正四面体，还有许多有趣的性质，很值得探讨一下。仅利用“正四面体内任一点到它的 4 个面的距离之和为定值”以及“正四面体各面正三角形的中心为顶点的四面体是正四面体”这两个性质，不难解答第 8 届 IMO 的第 3 题：

试证明：一个正四面体的外接球心到四个顶点距离之和小于空

间中其它任何一点到四个顶点距离之和。

卡片分堆（实际上是整数分组）、正四面体性质的研究这两个问题只是万紫千红数学园地中的两朵小花。只要有兴趣，有研究精神，就会取得进展，提升自己的能力。

这本小书不是一般意义下的科普读物。因为本书强调的是兴趣、创造力、研究与发现。而不是介绍一些平凡的科普知识和现象。这本小书不是教辅类读物，因为本书所读内容不依赖于任何一本教材。这本小书对读者没有过多要求，大体上不限年龄，不限职业，只要对数学有兴趣者都可以读，这本小书更不是茶余饭后消遣的“闲书”，真正读懂它除了认真的态度外，还要费一点气力，这是一本面对教师、学生、学生们的家长以及对数学有兴趣的广大读者的益智的书。

希望这本小书能引起你的数学兴趣，希望这本小书能刺激你主动地去学更多的数学知识。