普通高等教育"十一五"国家级规划配套教材

教育部国家级精品课程配套教材

Mathematics

大学数学讲练教程

（第二版）

DAXUE SHUXUE JIANGLIAN JIAOCHENG

仉志余 主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划配套教材
国家级精品课程配套教材

大学数学讲练教程

（第二版）

主　编　仇志余

副主编　刘秀连　赵适红

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本教材是根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育人才培养目标及规格》，总结多年来参与高职高专教学改革和国家级精品课程建设与研究的经验，与现行的普通高等教育"十一五"国家级规划教材《大学数学应用教程（第二版）》（北京大学出版社）相配套，由山西省高职高专数学课程教学指导委员会组织部分教师代表编写而成的。本教材共分五篇十六章，内容包括微积分、线性代数和概率论，每章又设内容提要、基本要求、释疑解难、方法指导、同步训练等模块。

本教材适合高职高专工程类、经贸类、医药类和部分文科类专业的教学和自学提高之用。

图书在版编目（CIP）数据

大学数学讲练教程（第二版）/仉志余主编．—北京：北京大学出版社，2009.9
（普通高等教育"十一五"国家级规划配套教材）
ISBN 978-7-301-13254-8

I．大… II．仉… III．高等数学—高等学校—教材 IV．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 196128 号

书　　名：大学数学讲练教程（第二版）
著作责任者：仉志余　主　编
责 任 编 辑：黄庆生　李　旭
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-13254-8/O・0744
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62765013　出版部 62754962
网　　址：http://www.pup.cn
电 子 信 箱：xxjs@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：北京飞达印刷有限责任公司
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787 毫米×980 毫米　16 开本　21 印张　450 千字
2008 年 6 月第 1 版　2009 年 9 月第 2 版第 1 次印刷
定　　价：35.00 元

第二版前言

《大学数学讲练教程》2008年由北京大学出版社出版一年来，配合教育部“十一五”国家级规划教材《大学数学应用教程》（上、下）（北京大学出版社，2005），在山西省高职高专数学课程教学指导委员会的组织指导下，通过全省有影响的高职高专院校组织教学，均发挥了应有的课内外补充作用。随着高职高专大学数学课程教学改革的推进，先进的教学思想不断形成，新的教学理念逐步被接受，教学改革的成果不断被吸收。所有这些便促成了《大学数学应用教程》第二版的形成。因此，与之相配套的《大学数学讲练教程》也应作相应的修订。

本次修订，首先是保留和提炼了原版的特色和精华，准确了部分内容的表述，删除了部分跨度较大的例题习题，使本书更具备自学性。

第二是重构了课程的内容体系。根据多数高职高专院校教学时数不足的实际，适当删除了原版部分章节的内容。例如第二篇的无穷级数和数值计算方法两章，第四篇的相似矩阵和二次型一章，第五篇的二维随机变量、大数定律和中心极限定理两章。当然，这些内容都是相当有用的，尤其对于有专升本愿望的同学，可以通过参考《大学数学应用教程》（本科第二版）（北京大学出版社）等相关教材加以弥补。

第三，仍由仉志余教授担任主编。赵适红同志仔细阅读了原版全书并修正了多处错误和不妥之处。原版的责任执笔相应地变为第一章刘秀连（晋中职业技术学院），第二章田慧琴（山西警官高等专科学校），第三章王大宽（山西生物应用职业技术学院），第四章高栓虎（山西管理职业学院），第五章田毅（山西财贸职业技术学院），第六章李戟（太原理工大学轻纺美院），第七章张汉清（山西财政税务专科学校），第八章张秀萍（山西机电职业技术学院），第九章田云霞（山西工程职业技术学院），第十章陈从科（山西交通职业技术学院），第十一章马金亭（吕梁高等专科学校），第十二章王青梅（山西水利职业技术学院），第十三章赵适红（晋城职业技术学院），第十四章朱美玲，第十五章王爱武（阳泉职业技术学院），第十六章施泱（太原电力高等专科学校）。

此外，省课委会副主任王玉清教授、王庆云副教授、阎慷副教授、杨兆强副教授、富伯亭副教授和王建军副教授给予了大力支持，在此一并致谢！

编　者

2009年6月

前　　言

本教材是根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育人才培养目标及规格》,总结多年来参与高职高专教学改革和国家级精品课程建设与研究的经验，与现行的教育部“十一五”规划教材《大学数学应用教程（上、下)》(北京大学出版社）相配套，由山西省高职高专数学课程教学指导委员会组织部分教师代表编写而成的。

大学数学是高职高专类院校各专业重要的基础课之一，它不仅是学习后继课程及在各专业领域中进行科学研究和工程实践的必要基础，而且对学生综合能力的培养起着重要作用，如何更好地指导学生学好这门课程，加深学生对所学内容的理解和掌握，提高综合运用知识解决实际问题的能力，是我们编写本教材的目的。本教材共分五篇、二十余章，内容包括微积分、线性代数和概率论，每章又设内容提要、基本要求、释疑解难、方法指导、同步训练等模块。

“内容提要”和“基本要求”概括出本章的内容要点和要求掌握的程度，利于学生总结梳理重点.“释疑解难”部分对于本章易于混淆的概念和解题过程中容易出现的错误作简要清晰的说明，帮助学生克服难点。“方法指导”目的是使学生通过本部分的练习，加强对基本概念、基本方法的理解和掌握；强调解题方法，特别是通过提供一题多解，启发学生掌握通用方法，学会运用技巧和养成灵活多样、举一反三的科学素质。“同步训练”分为 A、B 两级，A 级是对基本要求进行强化训练，B 级是综合提高部分。内容编排上力求突出新课程体系的高职特色，以及“以应用为目的”和数学建模的思想。

本教材适合高职高专工程类、经贸类、医药类和部分文科类专业的教学和自学提高之用。本教材突出强调高职高专教学的“讲”与“练”两个环节，且以“练”为主，以“讲”为辅。本教材既为教师讲授习题课、辅导课准备了翔实的资料，又为学生的课外阅读训练提供了丰富的内容。特别是，在课内学时较紧的情况下，学生通过阅读“内容提要”、“释疑解难”和“方法指导”等部分可以大大提高自己的数学能力和素养。

本教材由仉志余教授任主编，负责制订编写方案、组织协调、统稿定稿工作。各章的责任执笔是：第一至第三篇，第一章刘秀连（晋中职业技术学院），第二章田慧琴（山西警官高等专科学校），第三章王大宽（山西生物应用职业技术学院），第四章高栓虎（山西管理职业学院），第五章田毅（山西财贸职业技术学院），第六章李戟（太原理工大学轻纺美院），第七章张汉清（山西财政税务专科学校），第八章王建军（太原工业学院），第九章孙立群（太原城市职业技术学院），第十章张秀萍（山西机电职业技术学院），第十一章田云

霞（山西工程职业技术学院），第十二章陈从科（山西交通职业技术学院）；第四篇，第一章马金亭（吕梁高等专科学校），第二章王青梅（山西水利职业技术学院），第三章赵适红（晋城职业技术学院），第四章赵琳（山西建筑职业技术学院）；第五篇，第一章朱美玲，第二章王爱武（阳泉职业技术学院），第三章刘方（吕梁高等专科学校），第四章施泱（太原电力高等专科学校），第五章王玉清（阳泉职业技术学院）。初稿总联系人王建军副教授，以及第一至第五篇初稿联系人徐荣辉副教授、王爱武副教授、张秀萍副教授、王青梅讲师和施泱副教授等，均为本教材成书做了大量的基础性工作。此外，省课委会副主任王玉清教授、阎慷教授、杨兆强副教授、王庆云副教授和富伯亭副教授也给予了大力支持，在此一并致谢！

编　者

2007 年 10 月

目　　录

第一篇　一元微积分

第二篇　一元微积分的应用

第三篇　多元微积分及其应用

第四篇 线性代数

第五篇　概率论

第一篇　一元微积分

第一章　函数、极限与连续

一、内容提要

1．函数的概念；单调函数、有界函数、奇偶函数、周期函数；基本初等函数；反函数；复合函数；初等函数（不含双曲函数与反双曲函数）；分段函数；建立函数关系．

2．数列极限的概念；收敛数列的性质；函数极限的概念与性质；左、右极限及其与极限的关系；无穷小与无穷大的概念及关系；无穷小的性质（有限个无穷小之和是无穷小，有界函数与无穷小乘积是无穷小，无穷小与极限的关系）；无穷小阶的比较；极限运算法则；两个重要极限；极限存在准则（夹逼准则，单调有界准则）；数列极限与函数极限的关系．

3．函数在一点的连续性；函数在一点左连续和右连续；函数在区间上的连续性；函数的间断点及其类型；连续函数的和、差、积、商的连续性；连续函数的反函数的连续性；连续函数的复合函数的连续性；基本初等函数与初等函数的连续性；闭区间上连续函数的性质．

二、基本要求

1．理解函数的概念，掌握函数的两要素，并会判断两个函数是否为相等函数．

2．了解函数的基本性态，会判断给定函数的单调性、有界性、奇偶性和周期性．

3．理解反函数的概念，能判断已知函数是否存在反函数，并会求其反函数．

4．理解复合函数的概念，能将几个基本初等函数复合成一个初等函数或将一个复合函数分解为几个简单（基本初等）函数．

5．熟悉基本初等函数的性质及图形．

6．能列出简单实际问题的函数关系．

7．理解极限的概念，掌握极限的四则运算法则．

8．了解极限存在的两个准则（夹逼准则和单调有界准则），掌握两个重要极限的运用．

9．理解无穷小、无穷大的概念，能进行无穷小阶的比较．

10．理解函数在一点连续的概念，并能够运用函数连续的概念判断一个函数在某点处

是否连续.

11．会求函数的间断点并判断其类型.

12．了解初等函数的连续性，知道闭区间上连续函数的性质.

三、释疑解难

1．任意两个函数都能复合为一个函数吗？

答 不一定．在复合函数的定义中特别强调，在函数复合过程中，内层函数的值域与外层函数的定义域之交集必须为非空集，故，对于不满足这个条件的两个函数就不能复合为一个复合函数了.

例如：$y=\ln u, u=-\sqrt{x}$，因为对于$u=-\sqrt{x}$其值域$U=(-\infty,0]$，而对于$y=\ln u$来说，其定义域$Y=(0,+\infty)$，而$U\cap X=\varnothing$，所以这两个函数不能复合为一个函数.即$y=\ln(-\sqrt{x})$无意义.

2．$y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$与$y=\ln(1+x)-\ln(1-x)$是否为相等的函数？

答 首先比较两个函数的定义域是否相同．因为$y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$的定义域为$(-1,1)$，$y=\ln(1+x)-\ln(1-x)$的定义域为$(-1,1)$，故这两个函数的定义域相同.

再比较这两个函数的对应法则．因为$y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$，它们的对应法则也相同.

所以这两个函数是相同的函数.

3．证明 $f(x)=\sin x^2$不是周期函数.

分析 用定义去找周期T，经过运算，最后找出的T与变量x有关，而不是一个常数，与定义矛盾，因而确定该函数为非周期函数.

证明 假设存在与x无关的正数T，使得$\sin(x+T)^2=\sin x^2$，则$\sin(x+T)^2-\sin x^2=0$．把方程中的T看作待求量来求方程的非零解．即：

$$2\cos\frac{1}{2}[(x+T)^2+x^2]\sin\frac{1}{2}(2xT+T^2)=0$$

所以
$$\cos\frac{1}{2}(2x^2+2xT+T^2)=0 \qquad ①$$

或
$$\sin\frac{1}{2}(2xT+T^2)=0 \qquad ②$$

由①得，$2x^2+2xT+T^2=4k_1\pi\pm\pi \quad (k_1\in Z^+)$ 解得$T=T_1(x)$，

由②得，$2xT+T^2=2k_2\pi \quad (k_2\in Z^+)$ 解得$T=T_2(x)$.

故 $f(x)=\sin x^2$ 不是周期函数.

4．当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{x\sin x}$ 是无穷小吗？

答　不是．因为对任意 $m>0$，可取 $2n\pi\in(m,+\infty)$．此时，$\dfrac{1}{x\sin x}$ 在 $x=2n\pi$ 处无定义，故 $\dfrac{1}{x\sin x}$ 在 $x\to+\infty$ 时的极限不存在.

5．下列解法正确吗？

$$\lim_{x\to0}x\arctan\frac{1}{x}=\lim_{x\to0}x\cdot\lim_{x\to0}\arctan\frac{1}{x}=0\cdot\lim_{x\to0}\arctan\frac{1}{x}=0\text{ .}$$

答　不正确．因为 $\lim\limits_{x\to0}\arctan\dfrac{1}{x}$ 不存在，不可运用四则运算法则.

正确解法应是：当 $x\to0$ 时，x 是无穷小，而 $|\arctan\dfrac{1}{x}|\le\dfrac{\pi}{2}$，即 $\arctan\dfrac{1}{x}$ 是有界函数，据无穷小的性质知，$x\arctan\dfrac{1}{x}$ 也是无穷小．故 $\lim\limits_{x\to0}x\arctan\dfrac{1}{x}=0$.

6．有界数列是数列收敛的充要条件，这种说法对吗？

答　不对．我们知道，若数列收敛，则该数列必有界，但反过来，若数列有界，则该数列未必收敛．如：数列 $\{x_n\}=(-1)^n$ x_n 是有界数列，但 x_n 在 $n\to\infty$ 时，无极限，是发散的．所以我们说一个数列有界是该数列收敛的必要条件，而非充分条件.

7．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)<a$，$f(b)>b$，如何证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=\xi$.

分析　运用零点存在定理来完成．因而应设法构造一个函数，使它满足零点存在定理的条件.

证明　设 $g(x)=f(x)-x$，因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $g(x)=f(x)-x$ 在 $[a,b]$ 上也连续．又

$$\because f(a)<a \qquad \therefore g(a)=f(a)-a<0$$
$$f(b)>b \qquad g(b)=f(b)-b>0$$

故 $g(x)$ 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $g(\xi)=0$，即 $f(\xi)-\xi=0$，所以 $f(\xi)=\xi$.

8．一切初等函数在其定义域内都是连续的，这种说法对吗？

答　不对．所谓定义区间就是包含在定义域内的区间，有些初等函数的定义域就是区间，而有些函数的定义域是一些孤立的点．例如：$y=\sqrt{\sin x-1}$ 是初等函数，其定义域为 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（$k\in z$），它是孤立的点，不构成区间，从而该函数在定义域内不连续，正确的说法是：一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

四、方法指导

（一）关于函数的求解

例 1 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{1+x}$，求 $f(x),f(3x),f[f(x)]$．

解 $\because f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{1+x}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$ $\quad\therefore f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，

$$\therefore f(3x)=\frac{1}{1+3x},\qquad f[f(x)]=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}=\frac{1+x}{2+x}.$$

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\geq 0\\ 3x-1 & x<0\end{cases}$，求 $f(x)$ 的定义域，$f(-x),f[f(x)]$．

解 显然，$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup[0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$，

$$\because f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x>0\\ 1 & x=0\\ 3x-1 & x<0\end{cases}$$

$$\therefore f(-x)=\begin{cases}-3x-1 & -x<0\\ 1 & x=0\\ (-x)^2+1 & -x>0\end{cases}=\begin{cases}-3x-1 & x>0\\ 1 & x=0\\ x^2+1 & x<0\end{cases}=\begin{cases}-3x-1 & x>0\\ x^2+1 & x\leq 0\end{cases}$$

$$f[f(x)]=\begin{cases}(x^2+1)^2+1 & x\geq 0\ \ (\text{与之对应}f(x)=x^2+1>1)\\ 3[(3x-1)]-1 & x<0\ \ (\text{与之对应}f(x)=3x-1<-1)\end{cases}=\begin{cases}x^4+2x^2+2 & x\geq 0\\ 9x-4 & x<0\end{cases}$$

例 3 判断函数 $f(x)=\begin{cases}1-x & x\leq 0\\ 1+x & x>0\end{cases}$ 的奇偶性．

解 因为 $f(x)=\begin{cases}1-x & x<0\\ 1 & x=0\\ 1+x & x>0\end{cases}$

所以 $f(-x)=\begin{cases}1-(-x) & -x<0\\ 1 & -x=0\\ 1+(-x) & -x>0\end{cases}=\begin{cases}1+x & x>0\\ 1 & x=0\\ 1-x & x<0\end{cases}=\begin{cases}1-x & x\leq 0\\ 1+x & x>0\end{cases}=f(x)$

故，该函数是偶函数．

例 4　设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=e^x$，求 $f(g(x))$，$g(f(x))$．

解　$\because$ 当$x>0$时，$|g(x)|>1$

当$x=0$时，$|g(x)|=1$

当$x<0$时，$|g(x)|<1$

$$\therefore f(g(x))=\begin{cases}+1 & |g(x)|<1 & x<0\\ 0 & |g(x)|=1 & x=0\\ -1 & |g(x)|>1 & x>0\end{cases}=\begin{cases}1 & x<0\\ 0 & x=0\\ -1 & x>0\end{cases}$$

$$g(f(x))=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1 & |x|<1\\ e^0 & |x|=1\\ e^- & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}e & |x|<1\\ 1 & |x|=1\\ \dfrac{1}{e} & |x|>1\end{cases}.$$

例 5　设 $f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x & x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}$，

试证明 $f(f(x))=f(x)$，$g(f(x))=g(x)$．

证明　$f(f(x))=\begin{cases}0 & f(x)=0 & x\le 0\\ f(x) & f(x)>0 & x>0\end{cases}=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x & x>0\end{cases}=f(x)$．

$$g(f(x))=\begin{cases}0 & f(x)=0 & x\le 0\\ -(f(x))^2 & f(x)>0 & x>0\end{cases}=\begin{cases}0 & x\le 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}=g(x)\cdot$$

（二）关于极限的求解

1．依据极限定义及法则求极限，特别是对于分段函数求极限，要先求左、右极限．

例 6　设 $f(x)=\begin{cases}3x+2 & x\le 0\\ x^2+1 & 0<x\le 1\\ \dfrac{2}{x} & x>1\end{cases}$，分别讨论 $x\to 0$，$x\to 1$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在？

解　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3x+2)=2$　　$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1)=1$

于是　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，　故　$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在．

又 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+1)=2$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2}{x}=2$

故 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$.

2．利用结论“初等函数在定义区间内的任一点处连续”求极限.

即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0}g(x))$.

例 7 求 $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-2}{x^4+x^2+1}$.

解
$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-2}{x^4+x^2+1}=\frac{3-2}{9+3+1}=\frac{1}{13}.$$

例 8 求 $\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解
$$\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln\mathrm{e}=1.$$

3．对有理函数，当 $x\to\infty$ 时，用 x 的高次方项去除分子、分母所得结论求极限.

即
$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & m=n\\ 0 & m>n\\ \infty & m<n\end{cases}.$$

（例略）

4．因式分解，约去使分母极限为零的因式（消零因子）.

例 9 求 $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x})$.

解 $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x})=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3-(1+x+x^2)}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)(2+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2+x}{1+x+x^2}=1$.

例 10 若 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x+k}{x-3}=4$，求 k 的值.

解 $\because\lim\limits_{x\to3}(x-3)=0$ $\therefore x^2-2x+k$ 必定可分解为 $(x-3)(x+b)$，这样 $\lim\limits_{x\to3}(x+b)=4$
$\therefore b=1$

又 $\because(x-3)(x+b)=x^2-2x+k$ 即 $(x-3)(x+1)=x^2-2x+k$，

由此得 $k=-3$.

5．分子和分母同乘以共轭根式，约去使分母极限为零的公因式.

例 11 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1.$$

6. 利用无穷小的定义或性质求极限.

例 12 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$，因为 $1-\cos x$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小量，所以它的极限为 0.

7. 利用无穷大与无穷小的倒数关系.

例 13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\sqrt{1+x^2}}=\infty$.

（因为 $(1-\sqrt{1+x^2})$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小）

8. 利用等价无穷小代换法求极限.

一般常用的等价无穷小有，当 $x\to 0$ 时，
$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x,$$
$$x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1,$$
$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1).$$

例 14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$，
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

9. 利用两个重要极限求极限.

例 15 求 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\pi-x}{\sin x}$ 的极限.

解 $$\lim_{x\to\pi}\frac{\pi-x}{\sin x}=\lim_{x\to\pi}\frac{\pi-x}{\sin(\pi-x)}=\lim_{\pi-x\to 0}\frac{\pi-x}{\sin(\pi-x)}\overset{t=\pi-x}{=}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}=1.$$

例 16 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$.