21世纪普通高等教育基础课规划教材

大学物理实验

第2版

University Physics Experiment

■ 北京工商大学物理教研室　编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21 世纪普通高等教育基础课规划教材

大学物理实验

第 2 版

北京工商大学物理教研室　编

机 械 工 业 出 版 社

本教材是参照教育部高等学校物理基础课程教学指导分委员会编制的最新《理工科类大学物理实验课程教学基本要求》，借鉴国内外面向21世纪物理实验教学改革的成果，结合北京工商大学多年教学实践经验编写而成的。全书共分七章，将基础性实验、综合性实验、设计性实验和研究性实验各设为一章，以便学生在完成一定数量的基础性实验和综合性实验后，能逐步学会独立进行实验设计和开展具有研究性内容的实验工作，从而培养学生的独立实验能力、分析与研究能力和创新能力。

本书为高等院校工科类专业和应用物理专业的基础物理实验教学用书，也可作为其他专业基础物理实验的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理实验/北京工商大学物理教研室编．—2版．—北京：机械工业出版社，2009.10

21世纪普通高等教育基础课规划教材

ISBN 978－7－111－28458－1

Ⅰ．大…　Ⅱ．北…　Ⅲ．物理学－实验－高等学校－教材　Ⅳ．04-33

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第179527号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
责任编辑：李永联　责任校对：程俊巧
封面设计：张　静　责任印制：乔　宇
北京京丰印刷厂印刷
2010年1月第2版·第1次印刷
184mm×260mm·15.25印张·373千字
标准书号：ISBN 978－7－111－28458－1
定价：25.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：（010）88361066
销 售 一 部：（010）68326294
销 售 二 部：（010）88379649
读者服务部：（010）68993821

网络服务
门户网：http：//www.cmpbook.com
教材网：http：//www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版

前　　言

本书是在北京工商大学物理教研室编写的《大学物理实验》（第1版）的基础上，参照教育部高等学校物理基础课程教学指导分委会最新制定的《理工科类大学物理实验课程教学基本要求》修订而成的。本书在修订过程中保持了原书的特色，把实验分为基础、综合、设计和研究四个层次，增加了“波尔共振实验”、“半导体热电特性综合实验”、“半导体光电特性的研究”、“光栅光谱仪原理及其应用”、“太阳能电池伏-安特性的研究”、“光速的测定”、“干涉测量系列实验的研究”、“高温超导材料特性的测试和低温温度计”和“扫描隧道显微镜的原理和应用”等9个实验，改编了“金属弹性模量的测定”、“热电偶的原理与应用”和“用模拟法测绘静电场”等7个实验，删除了原书的“灵敏电流计的研究”、“物质折射率的测定”和“利用气垫导轨验证机械能守衡定律”等6个实验，同时，还增加了计算机处理数据的内容和附录D，更加注重对学生能力和素质的培养。

参加本书编写的人员及分工为：李宝河编写绪论、第1章、实验4.10、实验4.11、实验5.8、实验7.1以及附录；黄英群编写第2章的2.1～2.4节和2.6、2.7节；赵慈编写第2章的2.5节、实验5.2和实验5.7；马廷钧编写第3章和实验4.6；刘漪编写实验4.1、实验4.2和实验4.4；王秀娥编写实验4.5、实验4.12、实验4.13、实验4.14、实验4.15、实验5.4、实验5.6、实验6.3和实验7.7；赵佳编写实验4.7、实验5.3、实验6.5和实验7.5；胡蓉编写实验4.8和实验7.4；李壮编写实验4.9；陈晓白编写第6章引言、实验5.5、实验6.2和实验6.4；李熊编写实验6.1、实验6.6和实验7.8；耿爱丛编写实验7.2和实验7.6；徐登辉编写实验4.3、实验5.1和实验7.3。

本书由北京工商大学物理教研室组织编写。陈晓白教授、马廷钧教授和李宝河教授参加了对第2版稿件的初审，陈晓白教授负责全书的统稿。

本书为高等学校理工科类大学物理实验课程的教材，也可供相关专业选用和社会读者阅读。

编　者

目　　录

绪　论

1. 物理实验课的地位、作用和任务

物理学是研究物质的基本结构、基本运动形式、相互作用及其转化规律的学科，它的基本理论渗透在自然科学的各个领域，应用于生产技术的许多部门，是自然科学和工程技术的基础。物理学是一门实验科学，物理实验是科学实验的先驱，体现了大多数科学实验的共性，在实验思想、实验方法以及实验手段等方面是各学科科学实验的基础。

物理实验课是高等理工科院校对学生进行科学实验基本训练的必修基础课，是本科生接受系统实验方法和实验技能训练的开端。

物理实验的内容覆盖面广，具有丰富的实验思想、方法和手段。学习物理实验，对学生进行基本实验技能训练，是培养学生科学实验能力、提高科学素质的基础，同时可以培养学生实事求是的作风和创新意识。

本课程的具体任务是：

1）培养学生基本的物理实验技能，提高学生的基本素质，使学生初步掌握物理实验的思想和方法，提高学生的分析能力、动手能力和创新能力。

2）培养学生理论联系实际和实事求是的科学作风、认真严谨的科学态度、积极主动的探索精神、遵守纪律和团结协作以及爱护公物的优良品德。

2. 物理实验课的教学环节

（1）实验预习　认真阅读实验教材，对实验内容作全面了解。理解与实验有关的概念、原理及物理过程，明确实验目的，了解实验仪器的构造原理、操作规程、读数方法及注意事项，拟订实验步骤，设计数据记录表格等。在实验课前写好预习报告。

（2）实验过程　实验操作是整个实验教学中最重要的环节。按实验要求，独立进行仪器的安装和调整，认真做好实验的每一步，仔细观察各种实验现象，认真记录测量的数据。注意先观察后测量，通过实验学习和掌握实验的基本知识和方法，提高实验技能，学会提出问题、做出分析和判断。实验中要遵守各项规章制度，注意安全。

（3）实验报告　实验报告是对实验工作的全面总结，应做到用词确切、字迹整洁、数据完整、图表规范、结果明确。实验报告包括以下内容：

1）实验名称、实验目的。

2）所用仪器设备的型号、规格、参数等。

3）简要的实验原理，包括基本公式、必要的电路图、光路图。

4）实验内容及简要步骤。

5）实验数据记录表格。原始数据在教师审核、签字后有效，必须将原始数据附在实验报告中。

6）数据处理，包括利用各种方法如列表法、作图法、逐差法或最小二乘法处理实验数据，计算实验结果及计算测量不确定度。最后要给出实验结论。

7）分析讨论，包括对实验误差的分析、实验方法的改进与建议、实验后的体会等。

实验报告的标准格式请参考附录 C。

第 1 章　测量误差与实验数据处理

1.1　测量的基本概念

1.1.1　测量和误差

测量是物理实验的基础。所谓测量就是确定被测量的量值的一组操作。通过测量所得到的被测量的值称为测量结果。任何一个测量结果都由数值和单位两部分组成，单位用来确定被测量的特性，没有单位的测量结果是没有物理意义的。

在国际单位制（SI 制）中，米（m）、千克（kg）、秒（s）、安培（A）、开尔文（K）、摩尔（mol）、坎德拉（cd）为基本单位，其他物理量的单位均由基本单位导出。我国制定了以 SI 制为基础的《中华人民共和国法定计量单位》，并已于 1991 年 1 月 1 日开始执行，废除其他各种非法定计量单位。测量结果必须选用我国法定的计量单位。

测量一般分为**直接测量**和**间接测量**。直接由仪器仪表的指示器读出被测量值的测量称为直接测量，如用游标卡尺测量物体的长度。利用直接测量的结果，根据被测量与直接测量的关系求出被测量的值，这类测量称为间接测量。例如：测量铜圆柱体的密度，先直接测量圆柱体的质量 m、直径 d 和高 h，然后根据公式 $\rho=\dfrac{4m}{\pi d^2 h}$ 计算出铜的密度。

一个量的真实大小称为真值，测量的目的是为了获得被测量的真值，但由于测量方法不够完善、测量仪器不够精密、环境条件不够稳定、实验人员技术水平不够熟练等原因，使得测量不可能获得被测量的真值，只能得到与真值有一定差异的近似值。测量误差就是测量值与被测量真值之差。

误差自始至终存在于一切实验过程中，任何测量结果都有误差。测量误差的大小反映了测量结果的准确度。

测量误差可用**绝对误差**表示，也可用**相对误差**表示。

$$\text{绝对误差}=\text{测量结果}-\text{真值}$$

$$\text{相对误差}=(\text{绝对误差}\div\text{真值})\times 100\%$$

按误差性质，一般测量误差又分为系统误差和随机误差。

1. 系统误差

在相同条件下，对同一物理量进行多次测量时，误差的大小和符号保持不变，或在条件变化下时，误差按一定规律变化，这类误差称为系统误差。相同条件包括：相同的测量程序、相同的观测者、在相同条件下使用相同的测量仪器、在相同地点、在短期内重复测量等。系统误差等于多次测量的平均值减去被测量的真值。设被测量的真值为 $x_{真}$，多次测量的算术平均值为 $\bar{x}$，每次测量结果为 x_i，则系统误差

$$\delta_{系统}=\bar{x}-x_{真}$$

按对系统误差掌握的程度可分为**已定系统误差**和**未定系统误差**。如外径千分尺的零点读数为已定系统误差，而电压表的基本误差允许极限为未定系统误差。按系统误差出现的规律分为**定值系统误差**和**变值系统误差**。定值系统误差的符号和绝对值保持不变，如外径千分尺的零点读数、伏安法测电阻的方法误差等。变值系统误差的符号和绝对值按一定规律变化。

产生系统误差的原因有：

1）仪器误差：仪器制造上的缺陷、仪器未经校准、没有按规定条件使用等产生的误差。如仪器标尺分度不均匀、仪器零点未校准等。

2）理论误差：测量所依据的实验理论、实验方法及实验条件不合要求而引起的误差。如用伏安法测电阻时电表内阻的影响。

3）观测误差：观测者生理或心理特点所导致的误差，如标尺读数习惯偏左或偏右等。

4）环境误差：在测量过程中，由于温度、湿度、气压、振动、电源电压和电磁场等外界条件按一定规律变化所产生的误差。

对系统误差要进行正确的分析，尽量消除已知的系统误差，提高测量结果的可靠程度。而测量不确定度的评定，是在对已知的系统误差进行修定后进行的。

2. 随机误差

在同一条件下，多次测量同一物理量，误差的大小和符号以不可预定的方式变化，称这类误差为**随机误差**（或**偶然误差**）。随机误差等于测量结果减去多次测量的平均值，即随机误差

$$\delta_{随机} = x_i - \bar{x}$$

随机误差一般由影响量的随机时空变化所引起，这种随机效应导致重复观测中的分散性。

产生随机误差的原因有：

1）仪器误差：测量仪器准确度的起伏产生的误差。

2）人员误差：观测者感觉器官的灵敏度无规律的微小变化引起的误差。

3）环境误差：温度、湿度、气压及电磁场等外界条件的起伏产生的误差。

4）被测量本身的起伏和不稳定性。

随机误差就个体而言是不确定的，但其总体服从一定的统计规律。可以通过多次重复测量求平均值的方法来尽量减小随机误差对测量结果的影响。

不论是系统误差还是随机误差，都无法完全消除，可以通过误差分析，选择合理的实验方法，改进实验措施，选择合适的实验仪器等来减小误差。

1.1.2　有效数字

有人用米尺（分度值为 1mm）测量某长度，分别读出 8.26cm、8.27cm、8.28cm，前两位是从米尺刻度直接读出来的，是**可靠数字**，第三位是由观测者估计出来的，它是有误差的，称为**存疑数字**。尽管估读结果因人而异，但它是有效的。测量结果中可靠的几位数字加上一到两位有误差的数字称为**有效数字**。计量学上所给出的数字从第一位非零数字起后面的所有数字均为有效数字。如上述测量结果为 3 位有效数字。测量结果的有效数字位数的多少与被测量的大小有关，与所用仪器的准确度有关，还与所用的测量方法有关。有效数字与所采用的单位、小数点位置、数值所附乘的 10 的幂无关。如将测量结果表示为 0.0826m、8.26cm、82.6mm，有

效数字都为 3 位。在中间计算过程中，原则上应保证不丢失有效数字。

1. 数值修约规则

对尾数采用“四舍六入五凑偶”的原则进行处理。例如将 8.2949cm、8.285cm、8.2750cm 保留三位有效数字，数字修约后分别为 8.29cm、8.28cm、8.28cm。

2. 有效数字的运算规则

1）几个数作加减运算时，运算结果的有效数字位数以参加运算的各数中最大的存疑数的位置为准取齐。如 2.34mm + 102mm = 104mm；32.5V + 0.75V = 33.2V。

2）几个数作乘除运算时，运算结果的有效数字位数与参加运算的各数中有效数字位数最少者相同。例如：在测量电桥的灵敏度时，$R = 990.8\Omega$，$\Delta n = 5.6\text{mm}$，$\Delta R = 2.3\Omega$，则灵敏度 $S = \dfrac{\Delta n}{\Delta R/R} = \dfrac{5.6}{2.3/990.8}\text{mm} = 2.4\times10^3\text{mm}$。

3）数 x 的平方根的有效数字位数与 x 的相同。如 $4.567^2 = 20.86$；$\sqrt{0.002} = 0.04$。

4）函数运算，如对某数取对数 $\lg x$、指数 e^x、10^x 等运算时，运算结果的有效数字一般需要通过微分公式先求出误差，再由误差所在位确定有效数字的最后一位。

例 1.1-1 确定 lg1.983 的有效数字。

【解】 由于 $d(\lg x) = d(\ln x \cdot \lg e) = 0.43\dfrac{dx}{x} = 0.43\dfrac{0.001}{1.983} = 0.0002$

所以，$\lg 1.983 = 0.2973$

例 1.1-2 确定 $e^{2.78}$的有效数字。

【解】 由于 $d(e^x) = e^x dx = e^{2.78}\times 0.01 = 0.2$

所以，$e^{2.78} = 16.1$

例 1.1-3 确定 sin22°38′的有效数字。

【解】 由于 $d(\sin x) = \cos x dx = \cos 22°38' \times \dfrac{1}{60}\times\dfrac{\pi}{180} = 3\times10^{-4}$

所以，$\sin 22°38' = 0.3848$

5）一般认为，公式中常数系数的有效数字位数为无穷多。

为了防止中间计算过程损失有效数字，在上面的有效数字运算规则下可以多取一位有效数字。

1.1.3 正态分布

随机误差就个体而言是不确定的，但总体服从一定的统计分布，因此可以用统计的方法来估计随机误差对测量结果的不确定度的影响。随机误差的分布可以有正态分布、学生分布（t）分布、矩形分布等。正态分布为连续随机变量的一种概率分布，是随机误差的一种重要分布。对于连续随机变量 x，正态分布的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

式中 σ——测量次数 $n\to\infty$ 时的标准差；

μ——x 的期望值。

用随机误差 δ 代替变量 x，用 δ 的期望值 0 代替方程中的 μ，当测量次数 n 足够大时，用 s 代替 σ，方程可简化为

$$f(\delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,s}\mathrm{e}^{-\frac{\delta^2}{2s^2}} \tag{1.1-1}$$

式中　δ——随机误差；

s——标准差。

服从正态分布的随机误差概率密度分布曲线如图 1.1-1 所示，标准差越大，随机误差的分布范围越宽，测量结果的分散性越大；反之，标准差越小，随机误差分布在 0 值附近很小的范围内，测量结果的分散程度小。

通过积分计算得

$$\int_{-s}^{s}f(\delta)\,\mathrm{d}\delta = 0.6827$$

$$\int_{-2s}^{2s}f(\delta)\,\mathrm{d}\delta = 0.9545$$

$$\int_{-3s}^{3s}f(\delta)\,\mathrm{d}\delta = 0.9973$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\delta)\,\mathrm{d}\delta = 1$$

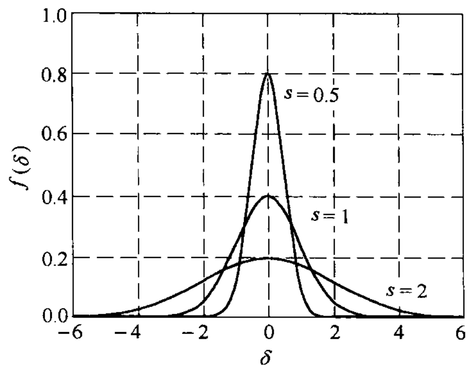

图 1.1-1　不同 s 值的正态分布曲线图

标准差与随机误差具有完全不同的性质，不能混为一谈。标准差不是测量列中任何一个测量结果的随机误差，也不是误差范围，它表示测量列中任一个测量结果的随机误差有 68.3% 的可能性在（$-s$，s）区间内。

服从正态分布的随机误差有以下几个特征：

1）单峰性——绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大。

2）有界性——绝对值很大的误差出现的概率近乎零。

3）对称性——绝对值相等的正误差和负误差出现的概率相等。

4）抵偿性——误差的算术平均值随着测量次数的增加而趋于零。

1.2　测量不确定度的评定与表示

测量条件的不完善及人们的认识不足，使被测量的值不能被确切测定，测量值以一定的概率分布落在某个区域内。所以，必须对测量结果的质量给出定量的说明，以确定测量结果的可靠程度。

对测量结果的误差估计有多种方法，常用的有**最大误差法**、**标准偏差法**和**不确定度法**。不同领域往往选用不同的误差处理方法，最大误差法常用于工程技术，在科技文件中常用标准偏差。表征被测量值分散性的参数是测量不确定度，有时称为测量结果的不确定度，简称不确定度。利用不确定度对测量结果的质量进行定量评定，可以反映对测量结果的不可信程度或对测量结果有效性的怀疑程度。

一切测量结果都不可避免地具有不确定度，正确表述测量不确定度具有重要的意义。测

量不确定度的定量表示是计量学的一个较新的概念，它的应用具有广泛性和普遍性。测量不确定度表示方法的统一是国际贸易和技术交流所不可缺少的，它可使各国进行的测量和得到的结果进行相互比对，取得相互承认和共识。我国根据国际《测量不确定度表示指南》(Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement，GUM）的原则，在1999年制定了《测量不确定度评定与表示》规范（中华人民共和国国家计量技术规范JJF1059—1999)。本书采用此规范处理测量数据，给出测量结果的不确定度评定。

1.2.1 测量不确定度

测量不确定度是与测量结果相关联的参数，表征合理地赋予被测量测量值的分散性。此参数可以是标准差（标准不确定度）或其倍数（扩展不确定度)，或说明置信水准区间的半宽度。例如：U_{95}表示测量结果落在$(-U_{95},U_{95})$，区间的概率为95%。不确定度恒为正值。

测量不确定度的分类：

测量不确定度根据其数值评定方法的不同分为A类不确定度和B类不确定度。用统计方法评定的不确定度为**A类不确定度**（用u_A表示)；用非统计方法评定的不确定度为**B类不确定度**（用u_B表示)。

使用中，根据表示的方式不同，测量不确定度有三种不同术语：

1）标准不确定度　以标准差表示的测量不确定度。

2）合成标准不确定度　将标准不确定度的A类分量和B类分量按照一定的规则合成起来得到的总标准不确定度。对于间接测量，当测量结果是由若干个其他量的值求得时，应首先得到各个直接测量量的合成标准不确定度，然后利用间接测量的传播律求得间接测量结果的合成标准不确定度。

3）扩展不确定度　规定测量结果区间的量，可期望该区间包含了合理赋予的被测量的值分布的大部分。扩展不确定度等于合成不确定度的k倍，k称为包含因子。

不论是标准不确定度还是扩展不确定度，均可用它们的相对大小表示：

$$相对标准不确定度=(标准不确定度\div 被测物理量之值)\times 100\%$$

1.2.2 测量不确定度的来源

测量不确定度的可能来源主要表现在以下几个方面：

1）被测量的定义不完整。例如，定义被测量是一根标称值为1m长的钢棒的长度。如果要求测到微米量级，该被测量的定义就不够完整，因为被测的钢棒受温度和压力的影响已经比较明显，而这些条件没有在定义中说明，由于定义的不完整使测量结果引入温度和压力影响的不确定度。

2）被测量定义值的实现不理想，即在测量时没有完全在被测量定义所规定的条件下进行，由此必然引起测量结果的不确定度。

3）被测量的样本可能不完全代表定义的被测量，即在抽样测量时，如果选取的样本不能完全代表所定义的被测量，会引起测量结果的不确定度。

4）对环境条件的影响认识不足或环境条件不完善。

5）测量人员对模拟式仪器的读数产生偏差。

6）测量仪器的分辨力或鉴别力不够。

7）测量标准（包括标准装置、标准器具、实物量具和标准物质）给定值的不确定度。测量通常是将被测量与测量标准的给定值进行比较而实现的，因此，标准器的不确定度直接引入测量结果中，如用天平测质量时，测得的质量的不确定度中包括了砝码的不确定度。

8）在数据处理时所引用的常数及其他参数的不确定度。

9）测量方法、测量系统和测量程序引起的不确定度。例如被测量的表达式的近似程度、自动测试程序的迭代程度等引起的不确定度。

10）被测量的各种随机影响，使测量时重复观测值随机变化。

测量过程中的随机效应及系统效应均会导致测量不确定度，数据处理中的修约也会导致不确定度。这些是从产生不确定度的原因上所作的分类，与评定方法上所作的 A、B 类不确定度的分类之间不存在任何联系。

1.2.3 测量不确定度与测量误差的区别

误差与不确定度是两个不同的概念，不能混淆或误用。按照误差的定义，对同一被测量，不论其测量程序、条件如何，相同测量结果的误差相同，不同测量结果的误差肯定不相等。但是，在重复条件下，不同测量结果可有相同的不确定度；由于测量条件不同，相同的测量结果可能有不同的不确定度。例如：第一次用分度值为 0.05g 的物理天平，测量得到某铜块的质量为 45.20g，第二次用分度值为 0.02g 的物理天平测得该铜块的质量仍为 45.20g，假定铜块的真实质量为 45.19g，则两次测量的误差均为 0.01g，但这两次测量的结果显然具有不同的不确定度。

测量误差是客观存在的，由于无法获得被测量的真值，所以测量误差的真实大小也无法知道。测量不确定度是人们对被测量认识不足的程度，是可以定量评定的量。测量不确定度中不包括已确定的修正值和异常值。例如，某力的未修正结果为 1000.00N，用高一级标准装置校准得到该力值的修正值为 2.30N，由于标准装置的校准不准引起的修正值的不确定度为 0.01N。若其他因素引起的不确定度可以忽略，则该力的修正结果为 1002.30N，其不确定度为 0.01N，修正值本身不包括在不确定度之内。在测量中，由于粗心大意、仪器的使用不当、突然故障或突然的环境条件变化（如突然冲击或振动、电源电压突变等）等都会产生异常的测量值，经判别确为异常的数据应剔除，不应包括在测量值内，因此，不确定度的评定中不应包括异常值。

1.2.4 直接测量结果的不确定度评定

对已认识到的可定系统误差，必须先对测量结果进行系统误差修正，对多次测量出现的明显偏离正常值的异常测量数据，应预先剔除，然后再进行测量结果的不确定度评定。

1. 多次测量量的 A 类不确定度

在进行多次重复测量后，利用计算器或计算机软件（Excel、Origin 等）算出测量列的平均值和测量列的实验标准差。

设在相同条件下对某物理量 x 作了 n 次独立测量，得到一测量列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

测量列的算术平均值

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

通常以独立观测所得的测量列的平均值 $\bar{x}$ 作为测量结果，测量列的实验标准差

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \tag{1.2-1}$$

式（1.2-1）又称为**贝塞尔公式**，计算器或统计表格软件中一般都有计算 s 的功能。s 表示测量列中任一次测量结果的标准差。

平均值的实验标准差为

$$s(\bar{x})=\frac{s}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

当用 $\bar{x}$ 作为测量结果时，利用统计分析的方法（A 类评定方法）给出的标准不确定度为

$$u_{\mathrm{A}}(\bar{x})=s(\bar{x})=\frac{s}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

2. 仪器基本误差允许极限引起的 B 类不确定度

测量工具或仪器的基本误差允许极限 Δ 是未定系统误差，必须进行记录。可通过查阅相应仪器的说明书或国家标准得到 Δ。物理实验常用仪器的基本误差允许极限在本书的附录 B 中列出。

仪器的基本误差允许极限 Δ 表示：任意一次测量结果 x_i 落在 $x_i-\Delta$ 至 $x_i+\Delta$ 的概率为 100%，并且当测量结果满足矩形分布（均匀分布）时，B 类评定方法确定的标准不确定度

$$u_{\mathrm{B}}(x)=\frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

在无其他信息情况下，本书采用这种方法给出不确定度的 B 类评定。当我们对仪器厂家给出的信息了解得更多时，应采用更为准确的方法计算 B 类不确定度。更加详尽准确的计算方法参考相应国家规范（JJF1059—1999）。

合成标准不确定度为

$$u_{\mathrm{C}}=\sqrt{[u_{\mathrm{A}}(x)]^2+[u_{\mathrm{B}}(x)]^2}$$

测量结果表示为

$$x\pm u_{\mathrm{C}}$$

注意：u_{C} 并不表示误差或误差范围。当 x 的分布为正态分布，同时有效自由度 ν_{eff}（其定义见后）可以估计不太小时，u_{C} 表示测量结果落在（$x-u_{\mathrm{C}}$，$x+u_{\mathrm{C}}$）区间的概率为 2/3。由于时间所限，物理实验课一般要求学生重复测量 5 ~ 6 次，不满足 ν_{eff} 不太小的条件，所以一般我们不用标准不确定度表示一定概率的置信区间，只是用它表示测量结果的分散性，给出测量结果的一种评价方式。

标准差及标准不确定度最多取 2 位有效数字。本书约定，测量结果的合成标准不确定度只取一位有效数字，测量结果的最佳估计值应修约到合成标准不确定度所在的那一位。相对标准不确定度一般取 2 位有效数字。

为了得到一个较高置信概率区间的量，在合成标准不确定度确定后，乘以包含因子 k，结果即为扩展不确定度，即

$$U = ku_C$$

可以期望在 $x-U$ 至 $x+U$ 的区间内包含测量结果可能值的较大部分。k 值一般取 2～3，在大多数情况下 $k=2$，当取其他值时，应说明其来源。当 x 作正态分布，同时有效自由度 ν_{eff} 可以估计不太小时，$U=2u_C$，约是置信概率近似为 95% 的区间的半宽。当测量结果的分布不是正态分布时，不能用 $k=2\sim3$ 来计算 U。较准确地计算扩展不确定度，需要用到等效自由度和 t 分布的概念。

自由度 ν：重复（或组合）测量时计算实验标准偏差所用的独立残差个数。n 个值 y_i 的残差 $v_i=y_i-\bar{y}$ 中有 $n-1$ 个独立，自由度为 $\nu=n-1$。自由度反映相应实验标准差的可靠程度，用于在评定扩展不确定度 U_P 时计算包含因子 k_P。

t 分布（或称学生分布）：指连续随机变量 t 的概率分布。t 分布的概率密度函数为

$$p(t,\nu)=\frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}\frac{\Gamma\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{\nu}{2}\right]}\left[1+\frac{t^2}{\nu}\right]^{-(\nu+1)/2}$$

其中 Γ 为伽玛函数，当自由度 $\nu\to\infty$ 时，t 分布趋于正态分布。

有效自由度 ν_{eff}：指套用正态分布均指置信区间的规律、计算 t 分布下 t 因子所需的等效参量。

$$\nu_{\text{eff}}=\frac{u_C^4}{\left[\frac{u_A^4}{\nu_A}+\sum_j\frac{u_{jB}^4}{\nu_{jB}}\right]}$$

其中，$\nu_A=n-1$，ν_B 约定取为 20（在误差落在 $\pm U_B$ 内的概率很高，当 U_B 对应的误差分布未知时，$u_B=\frac{U_B}{\sqrt{3}}$的对应的自由度 ν_B 一般取 20）。

对于扩展不确定度 U_P，其中 P 为置信概率，如 $P=95$，表示测量结果 x 落在$(x-U_P, x+U_P)$内的概率为 95%，则

$$U_P=k_p u_C$$

其中，

$$k_P=t_P(\nu_{\text{eff}})$$

根据等效自由度 ν_{eff}的值，通过查表（见附录 D）可获得 $t_P(\nu_{\text{eff}})$的值，从而可以计算 U_P。由于扩展不确定度 U_P 的计算较复杂，本书大部分实验测量结果只采用合成标准不确定度进行评定。

例 1.2-1　用分度值为 0.01mm、零点读数 $d_0=0.006$mm 的外径千分尺测某钢球直径 6 次，其读数分别为 12.014mm、12.012mm、12.013mm、12.015mm、12.011mm、12.014mm，计算标准不确定度，并写出测量结果。

【解】 钢球直径的平均值

$$\bar{d} = \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{6} d_i$$

$$= \frac{12.014\text{mm} + 12.012\text{mm} + 12.013\text{mm} + 12.015\text{mm} + 12.011\text{mm} + 12.014\text{mm}}{6} = 12.013\text{mm}$$

测量结果的修正值为 $d = \bar{d} - d_0 = 12.013\text{mm} - 0.006\text{mm} = 12.007\text{mm}$

标准不确定度 A 类分量 $u_A(\bar{d}) = s_{\bar{d}} = \dfrac{s_d}{\sqrt{n}} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2}{n(n-1)}} = 0.0006\text{mm}$

分度值为 0.01mm 的外径千分尺的基本误差允许极限 $\Delta = 0.004\text{mm}$,所以

标准不确定度 B 类分量 $u_B(d) = \dfrac{\Delta}{\sqrt{3}} = \dfrac{0.004\text{mm}}{\sqrt{3}} = 0.0023\text{mm}$

合成标准不确定度 $u_C(d) = \sqrt{u_A^2(\bar{d}) + u_B^2(d)} = 0.002\text{mm}$

测量结果为 $d \pm u_C(d) = (12.007 \pm 0.002)\text{mm}$

若用扩展不确定度评定测量结果，则进行如下的计算：

$$\nu_A = n - 1 = 5, \nu_B = 20$$

则，

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u_C^4}{\left(\frac{u_A^4}{\nu_A} + \sum_j \frac{u_{jB}^4}{\nu_{jB}}\right)} = \frac{0.0024^4}{\left(\frac{0.00060^4}{5} + \frac{0.0023^4}{20}\right)} = 22$$

通过查表（附录 D），

$$t_{95}(\nu = 22) = 2.1$$

所以

$$U_{95} = t_{95} u_C = 2.1 \times 0.0024\text{mm} = 0.0050\text{mm}$$

测量结果的完整表述为

$$d = (12.007 \pm 0.005)\text{mm}$$

式中，正负号后的值为扩展不确定度 $U_{95} = k_{95} u_C$，而合成标准不确定度 $u_C(d) = 0.0024\text{mm}$，自由度 $\nu = 22$，包含因子 $k_p = t_{95}(22) = 2.1$，从而具有约 95% 概率的置信区间。

为了尽量减少由于数字修约带来的计算误差，中间过程中各个标准不确定度的值需保留 2 个或 2 个以上的有效数字。

有的量不能重复测量或无需重复测量，只测量了一次，我们称为单次测量。单次测量不能用统计的方法给出不确定度 A 类分量。因此，单次测量的合成不确定度只能用不确定度的 B 类分量来表示。单次测量的不确定度置信概率小于多次测量的。

例 1.2-2 用分度值为 0.02mm 的游标卡尺单次测得金属圆柱的直径 $d = 23.24\text{mm}$，计算标准不确定度，并正确表示测量结果。

【解】 单次测量的标准不确定度

$$u_C(d) = u_B(d) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} = \frac{0.02\text{mm}}{\sqrt{3}} = 0.01\text{mm}$$

测量结果为

$$d \pm u_C(d) = (23.24 \pm 0.01)\mathrm{mm}$$

1.2.5　间接测量结果的不确定度评定

设间接测量结果 Y 与若干相互独立的直接测量结果 x_i（$i=1, 2, \cdots, n$）的函数关系为

$$Y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{1.2-2}$$

各直接测量结果的合成标准不确定度分别为

$$u_C(x_1), u_C(x_2), \cdots, u_C(x_n) \tag{1.2-3}$$

间接测量结果的合成标准不确定度

$$u_C(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u_C^2(x_i)} \tag{1.2-4}$$

上式称为不确定度传播律，其中 $c_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 称为灵敏系数，即

$$u_C(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 u_C^2(x_i)} \tag{1.2-5}$$

灵敏系数可以通过实验来确定，即通过变化第 i 个 x，而保持其他量不变，测定 y 的变化量，从而确定 c_i。

在 x_i 彼此独立的条件下，若函数 f 的形式为

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}$$

由式（1.2-4）知，相对不确定度传播公式为

$$\frac{u_C(y)}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{p_i u_C(x_i)}{x_i}\right]^2} \quad (y \neq 0, x_i \neq 0) \tag{1.2-6}$$

式中，p_i 为直接测量量 x_i 的幂指数。故 $u_C(y) = \dfrac{u_C(y)}{y} y$。对这种情况，先计算相对不确定度，再求不确定度较方便。表 1.2-1 列出了常用间接测量的不确定度传播公式。

表 1.2-1　常用函数的标准不确定度传播公式

函数表达式	标准不确定度 $u_C(y)$	相对标准不确定度 $\dfrac{u_C(y)}{y}$
$y = x_1 \pm x_2$	$\sqrt{u_C^2(x_1) + u_C^2(x_2)}$	$\sqrt{\dfrac{u_C^2(x_1) + u_C^2(x_2)}{(x_1 \pm x_2)^2}}$
$y = x_1 x_2$	$\sqrt{x_2^2 u_C^2(x_1) + x_1^2 u_C^2(x_2)}$	$\sqrt{\left[\dfrac{u_C(x_1)}{x_1}\right]^2 + \left[\dfrac{u_C(x_2)}{x_2}\right]^2}$
$y = \dfrac{x_1}{x_2}$	$\sqrt{\dfrac{u_C^2(x_1)}{x_2^2} + \dfrac{x_1^2 u_C^2(x_2)}{x_2^4}}$	$\sqrt{\left[\dfrac{u_C(x_1)}{x_1}\right]^2 + \left[\dfrac{u_C(x_2)}{x_2}\right]^2}$
$y = kx$（k 为常数）	$k u_C(x)$	$\dfrac{u_C(x)}{x}$