高等数学疑难分析与解题方法（下）

大学数学学习方法丛书

基本内容归纳提炼
学习方法疑难分析
典型例题解答技巧
考研知识总结升华

含同济六版《高等数学》习题全解
附硕士研究生入学考试试题解答

孙清华 孙昊

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

大学数学学习方法丛书

高等数学
疑难分析与解题方法
（下）

孙清华　孙　昊

华中科技大学出版社
中国·武汉

内容简介

本书是学习高等数学课程的一本很好的辅导书.本书与同济大学《高等数学》第六版同步,下册内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数.

本书的特点是着重数学思想、方法的理解与应用,在疑难分析中,对概念理解与方法运用中可能产生的问题都作了详细的阐述与诠释.在解题方法中,不仅对“同济六版”中的全部习题作了详尽的解答,还补充了相当数量的例题,对高等数学的解题方法作了精彩的演绎、归纳、评点,相信读者通过学习本书,将完全掌握高等数学的思想与方法.

本书还附有历年研究生入学考试题的分析解答,对读者考研复习与把握考研方向非常有益.

欢迎读者选用本书与本系列丛书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学疑难分析与解题方法(下)/孙清华 孙 昊.-2版.—武汉:华中科技大学出版社,2009年3月

ISBN 978-7-5609-3297-2

Ⅰ.高… Ⅱ.①孙… ②孙… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第010771号

高等数学疑难分析与解题方法(下) 孙清华 孙 昊

责任编辑:徐正达 封面设计:潘 群

责任校对:刘 竣 责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉金翰林文化有限公司

印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:710mm×1000mm 1/16 印张:16.75 字数:437 000

版次:2009年3月第2版 印次:2009年3月第3次印刷 定价:24.50元

ISBN 978-7-5609-3297-2/O·337

前　言

高等数学是高等学校一门非常重要的数学基础课程，也是一切专业课程的基础．学习高等数学，不只是学习高等数学的知识与掌握解题方法，更重要的是领会理解问题的数学思想与分析问题的数学方法，它将在我们终生的事业中起到十分重要的、积极的作用．为了帮助大家学习高等数学的知识、方法与思想，我们编写了本书，希望它能成为大家的良师益友．

本书与同济大学《高等数学》第六版同步，下册内容分为空间解析几何与向量代数、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数．

本书的特点是以较大的篇幅对理解概念与掌握方法可能出现的疑难问题作了详细的阐述与诠释，帮助读者理解数学思想的精髓，掌握数学方法的奥妙．在解题方法中，不仅对"同济六版"教材中的全部习题与总习题作了详尽的解答，还补充了部分典型的习题，对高等数学的解题方法作了精彩的演绎、归纳与评点，使读者能完全领受数学方法的精华与技巧．

本书还用相当的篇幅对历年来研究生入学考试试题进行分析、归类、解答，这对读者进行考研复习、把握考研方向是十分有益的．

本书在编写与出版过程中得到了华中科技大学出版社的大力支持，作者在此表示衷心的感谢．

对本书可能存在的不足与问题，热忱希望同行与读者批评指正．

编　者

2008 年 12 月于武汉

目　录

第八章　空间解析几何与向量代数

第一节　向量及其线性运算

主要内容

1. 既有大小，又有方向的量称为**向量**(**或矢量**).

与起点位置无关的向量称为**自由向量**(简称向量). 向量的大小称为向量的**模**，记作$|\boldsymbol{a}|$，$|\vec{a}|$或$|\overrightarrow{AB}|$. 模等于1的向量称为**单位向量**. 模等于零的向量称为**零向量**，记作$\boldsymbol{0}$或$\vec{0}$，方向是任意的.

如果两个向量$\boldsymbol{a}$或$\boldsymbol{b}$大小相等且方向相同，则称$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$**相等**. 两个非零向量如果方向相同或相反，称两个向量平行. 向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行，记作$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 零向量与任意向量平行.

两向量平行，又称两向量**共线**. 对k个向量，如果k个终点与公共起点在一个平面上，则称这k个向量**共面**.

2. 向量的加法可用**三角形法则**或**平行四边形法则**作出. 向量的加法符合以下运算规律：

(1)交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；　(2)结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

与$\boldsymbol{a}$模相同而方向相反的向量称为$\boldsymbol{a}$的**负向量**，记作$-\boldsymbol{a}$. 向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的**差**$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$.

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,\quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

3. 向量$\boldsymbol{a}$与实数λ的乘积记作$\lambda\boldsymbol{a}$，$\lambda\boldsymbol{a}$是一个向量，模$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 它的方向当$\lambda>0$时与$\boldsymbol{a}$相同，当$\lambda<0$时与$\boldsymbol{a}$相反. $\lambda=0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$为零向量. 向量与数的乘积符合以下运算规律：

(1)结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；　(2)分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量相加及数乘向量统称向量的**线性运算**.

4. $\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|=\boldsymbol{e}_a$表示一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

如果向量$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量$\boldsymbol{b}$平行于$\boldsymbol{a}$的充分必要条件是：存在唯一的实数$\lambda$，使得$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

5. 在空间取定一点O和三个两两垂直的单位向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，确定三条以$O$为原点的两两垂直的数轴，依次记为$x$轴、$y$轴、$z$轴，构成一个空间直角坐标系，称为$Oxyz$坐标系. x轴、y轴、z轴的正向由右手规则确定.

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，称为坐标面. 三个坐标平面将空间分为八个卦限.

任给向量$\boldsymbol{r}$，必有坐标分解式$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 向量$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$称为点$M$关于原点$O$的向径. 定义$\boldsymbol{r}$的坐标为$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，它也称点$M$的坐标.

6. 若$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z),\quad \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z),\quad \lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

若$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$且$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，则$\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$.

有向线段$\overrightarrow{AB}$的λ分点M的坐标是$\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$.

7. 向量$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$的模$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，点$A(x_1,y_1,z_1)$到点$B(x_2,y_2,z_2)$的距离为

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

8. 作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,规定$\angle AOB$($\angle AOB=\varphi,0\leqslant\varphi\leqslant\pi$)为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

非零向量与三个坐标轴的夹角称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**. $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**.

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\boldsymbol{e}_r,\quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

9. 设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}_u$ 确定 u 轴,作$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,再作过点 M 与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 M',则向量$\overrightarrow{OM'}$称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的分向量,设$\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}_u$,则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的**投影**.

向量的投影具有与坐标相同的性质:

(1)$(\boldsymbol{a})_u=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$;　　(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_u=(\boldsymbol{a})_u+(\boldsymbol{b})_u$;　　(3)$(\lambda\boldsymbol{a})_u=\lambda(\boldsymbol{a})_u$.

疑难分析

1. 三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 构成三角形的条件是什么?

答　如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 都不是零向量,且不在一条直线上,则由向量加法的三角形法则知,向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$构成一个三角形,因此只要 $\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$或 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 一定能构成三角形.

2. 向量在有向直线上的投影是向量还是数量?两个向量在同一条有向直线上的投影相等,两向量是否相等?

答　向量在有向量直线上的投影是一个带正号或负号的数,不是向量.向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 投影相等,即$|\boldsymbol{a}|\cos\theta_1=|\boldsymbol{b}|\cos\theta_2$,不能得出$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,$\cos\theta_1=\cos\theta_2$,所以两向量不一定相等.

3. 一个向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角是什么?任意三个介于 0 到 π 之间的角 α,β,γ 是否都能作为某个向量的方向角?

答　向量 $\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的三个方向角,三个方向角的余弦 $\cos\alpha$,$\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.一个向量的方向余弦必满足关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

所以,不是任意三个介于 0 到 π 之间的角 α,β,γ 都能作为某个向量的方向角的.

4. 向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的分量与投影有何区别?

答　如第 2 点中所言,投影是数量,分量是向量,这是两者最大的区别.将向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点移到坐标原点,则过 $\boldsymbol{a}$ 的终点分别与三个坐标轴垂直的平面与 x,y,z 轴的交点的坐标 x,y,z 称为 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影.而 $x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 沿三个坐标轴的分量.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与其在三个坐标轴上的投影 x,y,z 形成一一对应关系,故记作 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$,称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示.向量 $\boldsymbol{a}$ 也可用分量表示为 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

典型例题

要求熟悉空间直角坐标系与向量的基本概念,掌握用坐标进行向量线性运算的方法,了解向量的模、方向角与投影.

例 1　$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解　$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

例 2　如果平面上一个四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分且交于点 M(见图 8.1),用向量证明四边形是平行四边形.

证　$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$,$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MB}$,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DC}$,所以 $ABCD$ 是平行四边形.

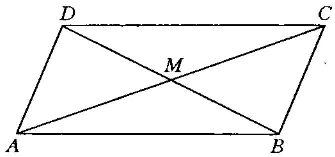

图 8.1

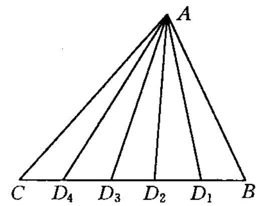

图 8.2

例 3　把$\triangle ABC$的BC边五等分，分点依次为D_1,D_2,D_3,D_4. 再将各分点与点A连接(见图8.2)，试以$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c},\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$表示$\overrightarrow{D_1A},\overrightarrow{D_2A},\overrightarrow{D_3A},\overrightarrow{D_4A}$.

解　因为组成三角形的三向量之和为零，所以

$$\overrightarrow{D_1A}=\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{BA}=-\left(\frac{1}{5}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\right),\quad \overrightarrow{D_2A}=\overrightarrow{D_2B}+\overrightarrow{BA}=-\left(\frac{2}{5}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\right),$$

$$\overrightarrow{D_3A}=\overrightarrow{D_3B}+\overrightarrow{BA}=-\left(\frac{3}{5}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\right),\quad \overrightarrow{D_4A}=\overrightarrow{D_4B}+\overrightarrow{BA}=-\left(\frac{4}{5}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\right).$$

例 4　如图8.3所示，已知$\triangle ABC$三条边的中点依次为D,E,F，记$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，求$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$.

解　因为　$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}/2,\quad \overrightarrow{BE}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}/2,\quad \overrightarrow{CF}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}/2,$

所以　$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\frac{3}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0},$

从而知它们可以构成三角形的三条边.

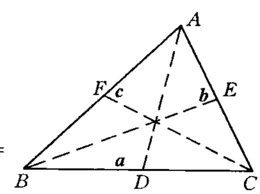

图 8.3

例 5　设$\triangle ABC$的边$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$BC$被点$D$分成$BD:DC=m:n$，$AC$被点$E$分成$AE:EC=m:n$，证明：$\overrightarrow{DE}\,/\!/\,\overrightarrow{BA}$.

证　因为　$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\frac{n}{m+n}\boldsymbol{a}-\frac{n}{m+n}\boldsymbol{b}=\frac{n}{m+n}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),$

所以$\overrightarrow{DE}\,/\!/\,(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$. 又$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 从而$\overrightarrow{DE}\,/\!/\,\overrightarrow{BA}$，且$\overrightarrow{DE}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{BA}$.

例 6　已知点$M_1(0,1,2)$和$M_2(1,-1,0)$，用坐标表示式表示向量$\overrightarrow{M_1M_2}$及$-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

解

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-0,-1-1,0-2)=(1,-2,-2),$$

$$-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2(1,-2,-2)=(-2,4,4).$$

例 7　在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置：

$$A(3,4,0),\quad B(0,4,3),\quad C(3,0,0),\quad D(0,-1,0).$$

解　在Oxy面上的点x,y的坐标不一定为0，z的坐标一定为0；在Oyz面与在Oxz面上点的特征可类推.

在x轴上点x的坐标不一定为0，y,z的坐标一定为0；在y轴、z轴上点的特征可类推.

A在Oxy面上，B在Oyz面上，C在x轴上，D在y轴上.

例 8　已知点(a,b,c)，求：(1)关于各坐标面；(2)关于各坐标轴；(3)关于坐标原点的对称点的坐标.

解　(1)点(a,b,c)关于坐标面的对称点的特征是坐标面所含的两个坐标不变，不含的坐标变为相反数，所以关于Oxy面、Oyz面、Oxz面的对称点分别为$(a,b,-c),(-a,b,c),(a,-b,c)$.

(2)点(a,b,c)关于各坐标轴的对称点的特征是坐标轴所含的坐标不变，不含的两坐标变为相反数，所以关于x轴、y轴、z轴的对称点分别为$(a,-b,-c),(-a,b,-c),(-a,-b,c)$.

(3)点(a,b,c)关于原点的对称点的三个坐标全变为相反数，即$(-a,-b,-c)$.

例 9　自点$P_0(x_0,y_0,z_0)$分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标.

解　各坐标面上的垂足坐标特点是，坐标面所含的两个坐标不变，不含的坐标变为 0；各坐标轴上垂足坐标的特点是，坐标轴所含坐标不变，不含的两个坐标变为 0. 所以 Oxy 面、Oyz 面、Oxz 面上垂足分别为 $(x_0,y_0,0)$，$(0,y_0,z_0)$，$(x_0,0,z_0)$；x 轴、y 轴、z 轴上垂足分别为 $(x_0,0,0)$，$(0,y_0,0)$，$(0,0,z_0)$.

例 10　过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 Oxy 面的平面，在它们上的点的坐标各有什么特点？

解　平行于 z 轴的直线上点的坐标为 (x_0,y_0,z)，平行于 Oxy 面的平面上点的坐标为 (x,y,z_0).

例 11　求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

解　点 M 在各坐标轴上的投影分别为 $(4,0,0)$，$(0,-3,0)$，$(0,0,5)$，所以到各坐标轴的距离分别为

$$d_x=\sqrt{(4-4)^2+(-3-0)^2+(5-0)^2}=\sqrt{34},$$

$$d_y=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41},\quad d_z=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5.$$

例 12　在 Oyz 面上，求与三点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

解　Oyz 面上点 M 坐标为 $(0,y,z)$，依题意，有

$$|MA|=\sqrt{3^2+(y-1)^2+(z-2)^2},\quad |MB|=\sqrt{4^2+(y+2)^2+(z+2)^2},$$

$$|MC|=\sqrt{(y-5)^2+(z-1)^2},\quad |MA|=|MC|,\quad |MB|=|MC|,$$

即

$$\begin{cases}3^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2,\\ 4^2+(y+2)^2+(z+2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2.\end{cases}$$

解得 $y=1,z=-2$，故点 M 坐标为 $(0,1,-2)$.

例 13　证明以点 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证　只需证明有两条边长相等且三边长之间满足勾股定理.

$$|AB|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7,$$

$$|AC|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7,$$

$$|BC|=\sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2}=7\sqrt{2}.$$

可见

$$|AB|=|AC|,\quad |BC|^2=|AB|^2+|AC|^2,$$

所以 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

例 14　设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角(方向角取 $0\sim\pi$).

解

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(3-4,0-\sqrt{2},2-1)=(-1,-\sqrt{2},1),$$

故

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2,$$

$$\cos\alpha=-1/2,\quad \cos\beta=-\sqrt{2}/2,\quad \cos\gamma=1/2,$$

$$\alpha=\frac{2}{3}\pi,\quad \beta=\frac{3}{4}\pi,\quad \gamma=\frac{\pi}{3}.$$

例 15　设向量的方向余弦分别满足 $\cos\alpha=0$，$\cos\beta=1$，$\cos\alpha=\cos\beta=0$，这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何？

解　当 $\cos\alpha=0$ 时，向量垂直于 x 轴，在平行于 Oyz 面的平面上；

当 $\cos\beta=1$ 时，向量与 y 轴正向方向相同，垂直于 Oxz 面；

当 $\cos\alpha=\cos\beta=0$ 时，向量垂直于 Oxy 面，平行于 z 轴.

例 16　设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4，它与轴 u 的夹角是 $60°$，求 $\boldsymbol{r}$ 在轴 u 上的投影.

解　依投影定义

$$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}=4\times\cos 60°=4\times 1/2=2.$$

例 17　一向量的终点是 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影依次为 $4,-4,7$. 求此向量起点 A 的坐标.

解　设起点 $A(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{AB}=(2-x,-1-y,7-z)$. 依题设知

$$2-x=4,\quad -1-y=-4,\quad 7-z=7,$$

得 $x=-2,y=3,z=0$，即点 A 坐标为 $(-2,3,0)$.

例 18　设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解　$$\boldsymbol{a}=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k},$$

故在 x 轴上投影为 13，在 y 轴上分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

例 19　已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$，且 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 不共面，证明：$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{e}_1-9\boldsymbol{e}_2+4\boldsymbol{e}_3$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面.

证　若存在数 λ 与 μ，使得 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 成立，则 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面. 由

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=2(\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_1-3(\lambda-\mu)\boldsymbol{e}_2+(3\lambda+2\mu)\boldsymbol{e}_3=2\boldsymbol{e}_1-9\boldsymbol{e}_2+4\boldsymbol{e}_3,$$

解得 $\lambda=2,\mu=-1$. 故 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面.

例 20　如图 8.4 所示，已知三角形三顶点坐标分别为 $P_1(2,5,0)$，$P_2(11,3,8)$，$P_3(5,1,12)$，求三角形质心的坐标.

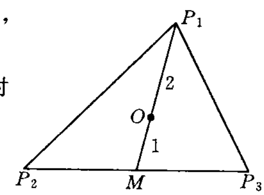

图 8.4

解　三角形质心位于三角形三中线交点处，且到顶点的距离为到对边中点距离的两倍.

因为中点 M 坐标为

$$\left(\frac{11+5}{2},\frac{3+1}{2},\frac{8+12}{2}\right)=(8,2,10),$$

则质心 O 的坐标由定比分点公式得

$$\bar{x}=\frac{8+2\times1/2}{1+1/2}=6,\quad \bar{y}=\frac{2+5\times1/2}{1+1/2}=3,\quad \bar{z}=\frac{10+0\times1/2}{1+1/2}=\frac{20}{3}.$$

故三角形的质心坐标为 $O(6,3,20/3)$.

也可利用质点系质心公式，把三个顶点视作质量为 1 的三个质点，则三角形质心为

$$\bar{x}=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),\quad \bar{y}=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3),\quad \bar{z}=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3).$$

例 21　设 $\boldsymbol{a}=(2,-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,-1)$，$\boldsymbol{c}=(2,-11,7)$，求 x 与 y 的值，使得 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

解　$$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=x(2,-1,1)+y(1,2,-1)=(2x+y,-x+2y,x-y)=(2,-11,7).$$

由

$$\begin{cases}2x+y=2,\\-x+2y=-11,\\x-y=7,\end{cases}\quad 解得\quad \begin{cases}x=3,\\y=-4.\end{cases}$$

第二节　数量积　向量积　混合积

主要内容

1. 对向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，定义运算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，其结果是一个数，等于 $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$ 及它们夹角余弦的乘积. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**，又称为点积，记作

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

又有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2.$$

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

数量积符合下列运算规律:

(1)交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$; (2)分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$;

(3)结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$,$\lambda$ 为数.

两个向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{k}+a_z\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$ 的数量积的坐标表示式为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都不是零向量时,两向量夹角余弦

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

2. 设向量 $\boldsymbol{c}$ 由两个向量按下列方式定义:

(1)$\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,

(2)$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 决定的平面,其指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定,则称 $\boldsymbol{c}$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**,记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. 特别地,有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零向量,则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

向量积符合下列运算规律:

(1)$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$; (2)分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$;

(3)结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ (λ 为数).

若 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的坐标表示式为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.$$

3. 三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,先作向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,再将所得向量与 $\boldsymbol{c}$ 作数量积,得到的数量称为三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的**混合积**,记作$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

混合积的几何意义是:$[\boldsymbol{abc}]$是一个数,其绝对值表示以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体体积. 如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 组成右手系,则$[\boldsymbol{abc}]$取正号;如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 组成左手系,则$[\boldsymbol{abc}]$取负号.

疑难分析

1. 给定向量 $\boldsymbol{a}$,若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,能否肯定 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$? 为什么?

答 不能. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 间夹角为 θ_1,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ 间夹角为 θ_2,则由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,得 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta_1=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\theta_2$,但不能得出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 例如当 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,$\cos\theta_1=1/\sqrt{3}$时,$|\boldsymbol{b}|\cos\theta_1=1$;而当 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}$,$\cos\theta_2=\sqrt{2}/2$ 时,$|\boldsymbol{c}|\cos\theta_2=1$. 显然 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta_1=|\boldsymbol{c}|\cos\theta_2$,但 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$.

2. 给定向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$,如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,能否肯定 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$?

答 能. 如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,则有 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$,且 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$,故 $\boldsymbol{a}/\!/(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$. 又 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$,从而知$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$为零向量(因 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$). 由此得出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

但仅由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$,也不能得出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 例如 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{j}$,则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{k}$. 有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$,但显然 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$.

3. 设有力 $\boldsymbol{F}$,与向量 $\boldsymbol{X}$ 的夹角为 θ,能否说 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{X}$ 方向上的分力为 $\boldsymbol{F}\cos\theta$? 为什么?

答 不能. 因为 $\boldsymbol{F}\cos\theta$ 表示一个与 $\boldsymbol{F}$ 共线的向量,而 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{X}$ 方向上的分力是一个与 $\boldsymbol{X}$ 共线的向量,应为 $|\boldsymbol{F}|\cos\theta\cdot\boldsymbol{e}_X$,其中,$\boldsymbol{e}_X$ 表示 $\boldsymbol{X}$ 正向上的单位向量,所以 $\boldsymbol{F}\cos\theta$ 与 $|\boldsymbol{F}|\cos\theta\cdot\boldsymbol{e}_X$,是两个不同的向量,仅当 $\theta=0$ 时才相等.

4. 怎样求解向量方程? 需要注意哪些问题?

答 由于向量运算与数量运算不同,因此在求解向量方程的过程中,要注意以下问题:

(1)如疑难分析 1、2 所言,向量方程不能使用消去律,即不能由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 得出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,也不能

由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 得出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

(2)向量运算不存在除法运算，所以方程不能除以任一非零向量.

(3)因为两向量的乘法分为数量积(点积)与向量积(叉积)，它们的结果在形式与意义上完全不同，所以对方程施行乘法运算时，要严格区分是点乘还是叉乘，是左乘还是右乘.

(4)向量运算一般不存在结合律，所以在解向量方程时不可随意使用结合律，不可随意加括号.

典型例题

要求熟悉数量积、向量积、混合积的概念与运算性质，并能利用它们求解或证明一些简单的问题、等式或不等式.

例 1　设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求：

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；　(2)$(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$；　(3)$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦.

解　(1)
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3,$$
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}.$$

(2)
$$(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}=-6(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=-18,\quad \boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=10\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+14\boldsymbol{k}.$$

(3)
$$\cos(\hat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{\sqrt{14}\times\sqrt{6}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

例 2　设 $\boldsymbol{e}_a,\boldsymbol{e}_b,\boldsymbol{e}_c$ 为单位向量，且满足 $\boldsymbol{e}_a+\boldsymbol{e}_b+\boldsymbol{e}_c=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{e}_a\cdot\boldsymbol{e}_b+\boldsymbol{e}_b\cdot\boldsymbol{e}_c+\boldsymbol{e}_c\cdot\boldsymbol{e}_a$.

解　由题设条件知，向量 $\boldsymbol{e}_a,\boldsymbol{e}_b,\boldsymbol{e}_c$ 是边长为 1 的等边三角形的三条边，故 $\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{e}_b$，$\boldsymbol{e}_b$ 与 $\boldsymbol{e}_c$，$\boldsymbol{e}_c$ 与 $\boldsymbol{e}_a$ 的夹角均为 $2\pi/3$. 所以
$$\boldsymbol{e}_a\cdot\boldsymbol{e}_b+\boldsymbol{e}_b\cdot\boldsymbol{e}_c+\boldsymbol{e}_c\cdot\boldsymbol{e}_a=3\,|1|\cdot|1|\cos(2\pi/3)=-3/2.$$

例 3　已知 $M_1(1,-1,2)$，$M_2(3,3,1)$ 和 $M_3(3,1,3)$，求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

解　$\overrightarrow{M_1M_2}=(2,4,-1)$，$\overrightarrow{M_2M_3}=(0,-2,2)$，则与 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的向量
$$\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&4&-1\\0&-2&2\end{vmatrix}=6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k},\quad |\boldsymbol{a}|=2\sqrt{17},$$
故所求单位向量
$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(\frac{6}{2\sqrt{17}},-\frac{4}{2\sqrt{17}},-\frac{4}{2\sqrt{17}}\right).$$

例 4　确定 m 的值，使 $2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 与 $3\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 互相垂直.

解　两非零向量相互垂直的充要条件是它们的数量积为零，所以
$$2\times3+(-3)m+5\times(-2)=0\Rightarrow m=-4/3.$$

例 5　证明：向量 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ 互相垂直.

证　注意到 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 都是数，则由非零向量互相垂直与它们的数量积之间关系知
$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}]&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=0,\end{aligned}$$
所以，向量 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ 互相垂直.

例 6　设质量为 100 kg 的物体从点 $M_1(3,1,8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1,4,2)$，计算重力所做的功(长度单位为 m，重力方向为 z 轴负方向).

解　$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(-2,3,-6)$，$\boldsymbol{F}=(0,0,100\times9.8)$，故
$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=(0,0,-980)\cdot(-2,3,-6)=5880\quad \mathrm{J}.$$

例 7　在杠杆上支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处，有与 $\overrightarrow{OP_1}$ 成角 θ_1 的力 $\boldsymbol{F}_1$ 作用着；在点 O 的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处，有一与 $\overrightarrow{OP_2}$ 成角 θ_2 的力 $\boldsymbol{F}_2$ 作用着. $\theta_1,\theta_2,x_1,x_2,|\boldsymbol{F}_1|,|\boldsymbol{F}_2|$ 符合什么条件才能使杠杆保持平衡？

解　使杠杆保持平衡的条件为 $x_1|\boldsymbol{F}_1|\sin\theta_1-x_2|\boldsymbol{F}_2|\sin\theta_2=0$.

例 8　求下列投影：

(1)向量 $\boldsymbol{a}=(4,-3,4)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(2,2,1)$ 上；

(2)向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,1),\boldsymbol{b}=(1,-2,2),\boldsymbol{c}=(3,-4,2)$，向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 上.

解　(1) $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{a}|\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{8-6+4}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=\dfrac{6}{3}=2.$

(2)因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，所以向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 上的投影等于 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{e}_c$，求得

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{e}_c=(3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{29}}\boldsymbol{i}-\frac{4}{\sqrt{29}}\boldsymbol{j}+\frac{2}{\sqrt{29}}\boldsymbol{k}\right)=\frac{1}{\sqrt{29}}(3\times3+4+6)=\frac{19}{\sqrt{29}}.$$

例 9　设 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2),\boldsymbol{b}=(2,1,4)$，$\lambda$ 与 μ 有什么关系，才能使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直？

解　z 轴单位向量 $\boldsymbol{e}_z=(0,0,1)$，由

$$(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{e}_z\Rightarrow(-2\lambda+4\mu)\cdot1=0,$$

得

$$-2\lambda+4\mu=0\Rightarrow\lambda=2\mu,$$

即当且仅当 $\lambda=2\mu$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直.

例 10　利用向量证明直径所对的圆周角是直角.

证　设圆心为 O，直径为 AOB，C 为圆周上一点，要证 $\angle ACB=\pi/2$. 只需证 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\\&=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AO})=\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{AO}^2=|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{AO}|^2=0,\end{aligned}$$

故 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，即 $\angle ACB=\pi/2$.

例 11　设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，计算：

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$；　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；　(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

解　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2+3+3=8$，　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=2+6=8$，　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，　$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$.

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}=8\boldsymbol{i}-16\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}=-8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}$.

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-4&4\\2&-3&3\end{vmatrix}=-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.　(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-1&3\\1&-2&0\end{vmatrix}=2$.

例 12　已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求 $\triangle OAB$ 的面积.

解　向量积 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$ 的模的几何意义是以 OA 和 OB 为边的平行四边形的面积，所以

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&3\\0&1&3\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}|-3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}|=\frac{\sqrt{19}}{2}.$$

例 13　求与 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 所决定的平面平行，且与 $2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 垂直的单位向量.

解　由向量定义知，$\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 与 $3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 的向量积

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&-2\\3&-2&1\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$$

与 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 和 $3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 所决定平面垂直，即所求单位向量与此平面平行，与 $\boldsymbol{a}=(-3,-7,-5)$ 垂直. 又由题设，单位向量与 $\boldsymbol{b}=(2,2,-1)$ 垂直. 从而所求单位向量平行于向量积

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-3&-7&-5\\2&2&-1\end{vmatrix}=17\boldsymbol{i}-13\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}.$$