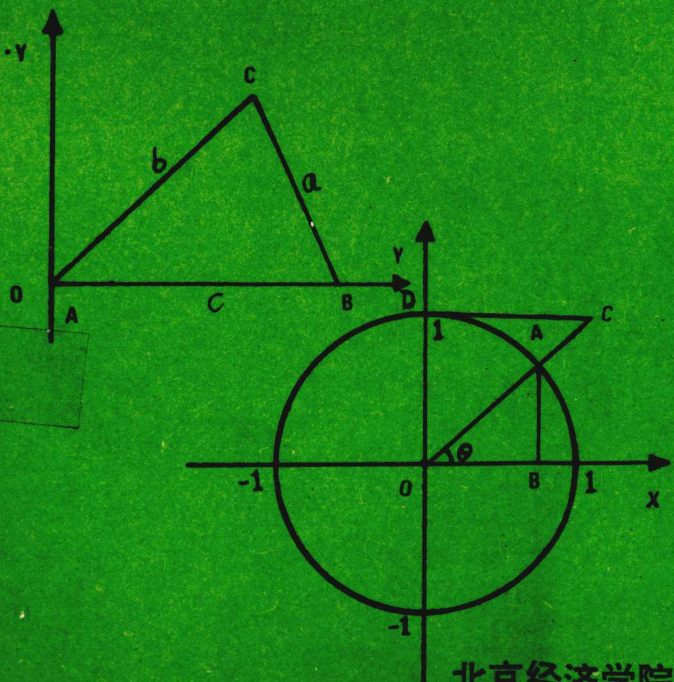
高中数学解题方法与技巧



北京经济学院出版社

高　中　数　学

解题方法与技巧

烟台市数学会编

北京经济学院出版社

一九九二年·七月

(京)新登字211号

高中数学解题方法与技巧

*

北京经济学院出版社出版
(北京市朝阳区红庙)
北京怀柔东晓印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

*

787×1092毫米　32开本　14.875印张　330千字
1993年7月第1版　1993年7月第1次印刷
印数1—15400
ISBN7-5638-0339-4/G·52
定价:7.60元

说　　明

为进一步开发青年学生的智力与能力，熟悉、掌握、深化一些初等数学专题知识及其解题方法与技巧，使学得的初等数学知识更加系统化，以达到提高广大青年学生的文化素质之目的，我们编写了高中数学《解题方法与技巧》，它将成为青年学生自学、深造的良师益友。

我们将初等数学知识分列为15个大专题，每个专题独立成章，每章又按知识体系和解题方法分成单元或节，每节中精选了富有典型性的例题，并做了思路分析、解答过程、技能技巧说明、方法小结。在单元（或节）后有一组少量练习题，章末附解答与提示。在例题的解答过程中，尤其注重思路、方法、技巧的训练和创造性思维的训练。所以，例题和习题的选择都有一定的难度和技巧性，有些例题还从不同角度给出了多种解法，因此，这也是一份很好的数学竞赛辅导材料。

如果《解题方法与技巧》能为广大青年学生开阔数学视野，激发学习兴趣，拓宽解题思路，提高数学水平，我们将感到无比欣慰！

由于水平有限，缺点与错误在所难免，恳切希望广大读者提出宝贵意见。

烟台市数学会

1992年7月1日

编委及撰稿人名单

主　编　杨培谊　于鸿鹄

主　审　杨培谊　于鸿鹄　柳光通　丛远滋

编　委　李钟春　范北辰　逄春楼　路文东　陈国范
柳光通　丛远滋　刘立业　秦宝钱　陈向东
綦希孟　黄正强　尉云臻

撰稿人　刘立业　柳光通　邵美兰　杨培谊　陈向东
秦宝钱　范北辰　逄春楼　丛远滋　于鸿鹄
李钟春　綦希孟　李树常　叶允上　黄正强
徐建敏　尉云臻　于元凯　郭世斌　胡安礼
刘其良　高天亨　高玉香　藏芷荃

目 录

第一章　函　　数

本章主要研究集合与映射、函数的定义域和值域、函数的几个重要性质：单调性、奇偶性、周期性，以及函数的图象。

1.1　集合与映射

例 1　设 m、n 为自然数，且集合 $A=\{1,2,\cdots,m\}$，$B=\{1,2,\cdots,n\}$.

（1）A 的子集共有多少个？（2）满足 $B\cap C\neq\phi$ 的 A 的子集 C 共有多少？

解：（1）含 A 的 r 个元素的子集个数为 C_m^r，故 A 的子集个数是 $C_m^0+C_m^1+\cdots C_m^m=2^m$

（2）当 $m\leqslant n$ 时，对于 A 的非空子集 C，都有 $B\cap C\neq\phi$，故所求的子集 C 的个数是 2^m-1；

当 $m>n$ 时，只仅有由 $n+1$，$n+2$，…，m 中的自然数组成的 A 的子集 C 才满足 $B\cap C=\phi$，因这种子集的个数是 2^{m-n}，故所求子集 C 的个数是 2^m-2^{m-n}。

例 2　设 $A=\{(a,\ b)|(a-1)^2+(b-1)^2<2,\ a,\ b\in z\}$，$B=\{z\,|\,z=a+bi,\ a,\ b\in\overline{Z^-}$ 且 $|z|\leqslant\sqrt{5}\}$，f：$(a,\ b)\to a+bi$ 是 A 到 B 的对应关系，试判断 f 是不是从 A 到 B 的映射？

解：将集合 A、B 用列举法表示，得 $A=\{(0,\ 1),(1,\ 0),(1,\ 1),(1,\ 2),(2,\ 1)\}$，$B=\{1+2z,\ 2+z,\ 1+z,\ 1,\ 2,\ z,\ 2z\}$，由对应法

则 f $(a, b) \to a+bi$ 知：对 A 中任何一个元素，在 f: 作用下，都有 B 中唯一的元素与之对应。由映射定义知，f 是 A 到 B 的映射。

说明：对一些用描述法给出的有限集合，若有较为明显的特征。则可将集合中的元素一一列举出来，然后找出解题方法。

例 3　已知 $A=\{(x, y) \mid |x|+|y| \leqslant 1\}$，$B=\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$，$C=\{(x, y) \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$。那么 A、B、C 之间是什么关系？

分析：A、B、C 可看成平面上的点集，因此可画出文氏图，从文氏图分析它们之间的包含关系。

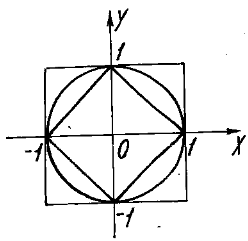


图 1-1

解：由图看出，集合 B 是以原点为圆心，以 1 为半径的圆周及其内部的点集；集合 A 是圆内接正方形的边界及其内部的点集；集合 C 是圆外切正方形的边界及其内部的点集。

$\therefore A \subset B \subset C$。

例 4　试指出集合 $\{x \mid x=2k+1, k \in Z\}$ 和 $\{y \mid y=4m \pm 1, m \in Z\}$ 间的关系。

分析：前一个集合是奇数集，后一个不太熟悉，要确定二者关系，应当从一个集合中的元素与另一个集合间的关系分析起。设 $\alpha \in \{x \mid x=2k+1, k \in Z\}$，则 α 是个奇数，$\alpha=2k+1$，$k' \in Z$，当 $k'=2m$，$m \in Z$ 时，$\alpha=4m+1$；当 $k'=2m-1$，$m \in Z$ 时，$\alpha=4m-1$。即 $\alpha=4m+1$ 或 $\alpha=4m-1$，$m \in Z$。可见 $\alpha \in \{y \mid y=4m \pm 1, m \in Z\}$。因此，$\{x \mid x=2k+1, k \in Z\} \subseteq \{y \mid y=4m \pm 1, m$

$\in Z\}$。另一方面，设 $\beta\in\{y|y=4m\pm1,\ m\in Z\}$，则 $\beta=4m+1$ 或 $\beta=4m-1$，$m\in Z$。可见 β 为奇数，$\beta\in\{x|x=2k+1,\ k\in Z\}$，于是有 $\{y|y=4m\pm1,\ m\in Z\}\subseteq\{x|x=2k+1,\ k\in Z\}$。

$\therefore\{x|x=2k+1,\ k\in z\}=\{y|y=4m\pm1,\ m\in Z\}$。

例 5 设方程 $x^2-ax+b=0$ 两根为 α,β，方程 $x^2-bx+c=0$ 的两根为 δ、γ。又 α、β、δ、γ 互不相等，设 $M=\{\alpha,\ \beta,\ \delta,\ \gamma\}$，$S=\{x|x=\mu+v,\mu\in M,\ \nu\in M$ 且 $\mu\neq v\}$，$P=\{x|x=\mu v,\ \mu\in M\ \nu\in M,\ \mu\neq v\}$，又 $S=\{5,7,8,9,10,12\}$，$P=\{6,10,14,15,21,35\}$，求 a，b，c 的值。

解：将集合 S，P 用列举法表示为 $S=\{\alpha+\beta,\ \alpha+\delta,\ \alpha+\gamma,\ \beta+\delta,\ \beta+\gamma,\ \delta+\gamma\}$，$P=\{\alpha\beta,\ \alpha\delta,\ \alpha\gamma,\ \beta\delta,\ \beta\gamma,\ \delta\gamma\}$，其中 $\alpha+\beta=a$，$\alpha\beta=b$，$\delta+\gamma=b$，$\delta\gamma=c$。

显然，$3(\alpha+\beta+\delta+\gamma)=3(a+b)=5+7+8+9+10+12=51$

$\therefore a+b=17$ ①

又 $\because(\alpha\beta\delta\gamma)^3=(bc)^3=6\times10\times14\times15\times21\times35=210^3$

$\therefore bc=210$ ②

又 $\because b$ 是 S、P 的公共元素，$\therefore b=10$ 代入①、②解得 $a=7$，$c=21$。

小结：（1）在研究集合与集合的关系，元素与集合的关系时，要弄清子集、真子集的概念，并要注意空集的概念。

(2) 对于映射，在给出集合 A、B 和对应法则 f 下判断是否是映射。已知集合 A、B，从 A 到 B 的映射为 m^n（A 是 n 个元素，B 是 m 个元素）。

(3) 在研究集合与集合之间的关系时，除证明法外，可用文氏图和列举法，文氏图比较直观，列举法可使求解问题明朗化。

例 6 已知 $A=\{x|x^2-px-2=0\}$，$B=\{x|x^2+qx+r=0$，$A\bigcup B=\{-2,1,5\}$，$A\bigcap B=\{1\}$，求 p、q、r 的值。

分析：由 $A\bigcap B=\{1\}$ 可知，1 既是方程 $x^2-px-2=0$ 的解，又是方程 $x^2+qx+r=0$ 的解。因此可得 $p=-1$，$q+r+1=0$.$\therefore A=\{x|x^2+x-2=0\}=\{-2.1,\}$。又 $A\bigcup B=\{-2,1,5\}$，$\therefore 5\in B$，从而得出 q、r 的又一关系式 $5q+r+25=0$，进而可求出 q、r。

解：$\because A\bigcap B=\{1\}$ $\therefore 1\in A$ 且 $1\in B$

$\therefore 1^2-p-2=0$，$1^2+q+r=0$

即 $p=-1$，$q+r=-1$ 则 $A=\{x|x^2+x-2=0\}=\{-2,1\}$

$\because A\bigcup B=\{-2,1,5\}$，$\therefore 5\in B$，即 $5q+r=-25$。

解方程组 $\begin{cases} q+r=-1 \\ 5q+r=-25 \end{cases}$

得 $q=-6$，$r=5$

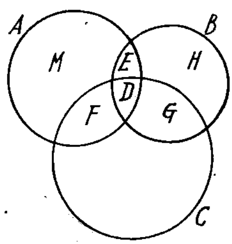


图 1-2

例 7 某年级举行数理化三科竞赛，报名参加数学竞赛的有 106 人，报名参加竞赛的有 95 人，报名参加化学竞赛

的有 78 人，其中参加数学、物理两科的有 55 人，参加数学、化学两科的有 46 人，参加物理、化学两科的有的有 42 人，参加三科竞赛的有 30 人。试求全年级报名参加竞赛的总人数。

解: 画文氏图（图 1－2），设报名参加数学竞赛的同学集合为 A，报名参加物理竞赛的同学集合为 B，报名参加化学竞赛的同学集合为 C，又设 $A\bigcap B$ 为 $D\bigcup E$，$A\bigcap C$ 为 $D\bigcup F$，$B\bigcap C$ 为 $D\bigcup G$。由题意可知 $n(D)=30$，$n(E)=55-30=25$，$n(F)=46-30=16$，$n(G)=42-30=12$，$n(M)=106-(30+25+16)=35$，$n(H)=95-(30+25+12)=28$。全年级报名参加竞赛的总人数为:

$$n(C)+n(M)+n(E)+n(H)=78+35+25+28=166$$

例 8 设全集 $I=R$，$A=\{x|x^2-2x>0，x\in R\}$，$B=\{x|x^2-ax+b<0，x\in R\}$，$C=\{x|x^3+x^2+x=0，x\in R\}$，又 $\overline{A}\bigcap\overline{B}=C$，$A\bigcap B=\{x|2<x<4\}$，求 a、b 的值。

分析: 数集问题借助数轴分析，这种方法特别有利于解一类含参数的问题。

解: 由已知 $A=(-\infty，0)\bigcup(2，+\infty)$，$C=\{0\}$ 设 $B=(x_1,x_2)$（其中 x_1,x_1 是 $x^2-ax+b=0$ 的两根）从图可知，要使 $\overline{A}\bigcap\overline{B}=C$ 即 $\overline{A\bigcup B}=C$，必须 $x_1=0$ 且 $x_2>0$；要使 $A\bigcap B=(2，4)$，必须 $2\geqslant x_1\geqslant 0$ 且 $x_2=4$，$\therefore x_1=0,x_2=4$，故 $a=x_1x_2=4$，$b=x_1x_2=0$

例 9 已知集合 $A=\{z||z-2|\leqslant 2\}$ 和 $B=\{z|z=\frac{z_1}{2}i+b,\overline{z_1}\in A,b\in R\}$。

(1) 若$A\bigcap B=\phi$，求b的范围；

(2) 若$A\bigcap B=B$，求b的值。

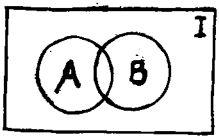


图 1－3

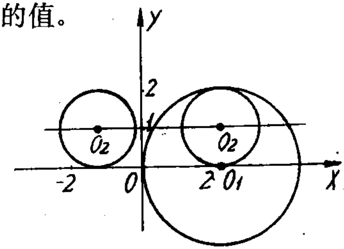


图 1－4

解：由$z=\frac{z_1}{2}i+b$得

$z_1=-i(2z-2b)$,

$\because z_1\in A$,

$\therefore |-i(2z-2b)-2|\leqslant 2$,

即$|z-b-i|\leqslant$

$\therefore B$ 为圆心在 $Y=1$ 上，半径为 1 的圆面，而 A 为圆心在 (2,0), 半径为 2 的圆面。

(1) 若 $A\bigcap B=\phi$，圆面 A 与圆面 B 相离，则 $|o_1o_2|>r_1+r_2$, 即

$(b-2)^2+1>9$, $\therefore b<2-2\sqrt{2}$ 或 $b>2+2\sqrt{2}$。

(2) 若 $A\bigcap B=B$，即圆面 A 包含圆面 B,

$|o_1o_2|\leqslant r_1-r_2$, 即$(b-2)^2+1\leqslant 1$, $\therefore b=2$。

说明：有些集合问题，单纯从数量关系去解决，较为繁难，若注意数形结合则能化难为易。

小结：有关集合的综合题的解法，除一般方法外，多用结合数轴、文氏图、几何图形等方法发掘隐含条件，寻求解题途径，有时也可以通过命题转换使问题得到解决。

练 习 一

1. 已知集合 A、B，全集 $I=A\bigcup B$；

(1) 当集合 A、B 满足什么条件时，$\overline{A}\subseteq B,\overline{A}\subset B,\overline{A}=B$？

(2) 写出$\overline{A},\overline{B}$ 与$\overline{A\bigcap B}$ 的关系。

2.I是全集，A，B是I的两个子集；

(1)若$A\subseteq B$,那么$\overline{A}$与$\overline{B}$的关系如何？

(2) 若$\overline{A}=B$,那么A与$\overline{B}$的关系如何？

3. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\},B=\{4,13,7,10,16,19\}$, 试建立一个能用解析式表达 A 到 B 上的映射f，写出这个解析式。

4.$A=\{x|5-x\geqslant\sqrt{2x-2}\}$,$B=\{x|x^2=ax\leqslant x-a\}$,若 $A\supseteq B$, 求 a 的取值范围。

5. 已知 $A=\{\alpha|\alpha=\cos\dfrac{5m\pi}{12},m\in Z\}$,$B=\{\beta|\beta=\cos\dfrac{n\pi}{12},n\in Z\}$,证明：$A=B$

6. 以实数为元素的两个集合 $A=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$ ，$B=\{-4,a+3,a^2-2a+2,a^3+a^2+3a+7\}$, 且 $A\bigcap B=\{2,5\}$ ，求：(1) a 的值； (2) $A\bigcup B$。

7.已知三个不等式$x^2-x-6<0,x^2+2x-8>0$,
$x^2-4ax+3a^2<0$的解集分别为A、B、C。

(1)试确定a的取值范围,使$C\supseteq A\bigcap B$;

(2)试确定a的取值范围,使$C\supseteq\overline{A}\bigcap\overline{B}$。

8. 有两个集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$ 和 B $\{a,b,c\}$ ，从 A 到 B 的映射使 B 中的每一个元素都有 A 中的元素和它对

应，这样的映射共有多少种?

9. 设 $P_1=\{z|z\bar{z}+3z(\bar{z}-z)+5=0,z\in c\}$，$P_2=\{w|w=2iz,z\in P_1\}$，若 $z_1\in P_1,z_2\in P_2$，试求 $|z_1-z_2|$ 的最大值和最小值。

10. 设 a、b 是两个实数，$A=\{(x,y)|x=n,y=na+b,n\in z\}$，$B=\{(x,y)|x=m,y=3m^2+15,m\in z\}$，$C=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 144\}$ 是平面 XOY 内的点的集合。试问是否存在 a 和 b 使得 (1) $A\cap B\neq\phi$；(2) $(a、b)\in C$ 同时成立。

1.2 函数的定义域与值域

例 1 求函数 $y=x^4-5+\dfrac{1}{x^2-4}+\dfrac{1}{x-\frac{1}{x}}$ 的定义域.

分析: $\dfrac{1}{x^2-4}$ 要求 $x^2-4\neq 0$，$\dfrac{1}{x-\frac{1}{x}}$ 要求 $x\neq 0$ 和 $x-\dfrac{1}{x}\neq 0$.

解: $\{x|x^2-4\neq 0\}\cap\{x|x\neq 0\}\cap\{x|x-\dfrac{1}{x}\neq 0\}=\{x|x\neq\pm 1,\ x\neq 0,\ x\neq\pm 2\}$.

小结: (1) 若干个分式函数的和的定义域是每一个分式函数定义域的交集;

(2) 繁分式函数，例如 $f(x)=\dfrac{1}{x-\frac{1}{x}}$ 的定义域，不等于

化简后的分式函数 $g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ 的定义域，而应从原繁分式的每一个分母不等于零中求得。

例 2　求函数 $y=4\sqrt{\sqrt{x+1}+1}+\dfrac{1}{\sqrt[6]{1-\sqrt[4]{x+2}}}$ 的定义域。

分析: $\sqrt[4]{\sqrt{x+1}+1}$ 要求 $\sqrt{x+1}+1\geqslant 0$,

$\dfrac{1}{\sqrt[6]{1-\sqrt[4]{x+2}}}$ 要求 $1-\sqrt[4]{x+2}>0$。

解: 原函数的定义域为 $\{x|\sqrt{x+1}+1\geqslant 0\}\cap\{x|1-\sqrt[4]{x+2}>0\}=\{x|x\geqslant -1\}\cap\{x|-2\leqslant x<-1\}=\phi$ 。

小结: (1) $y=\sqrt[2n]{f(x)}(n\in N)$ 的定义域是 $\{x|f(x)\geqslant 0\}$ ；(2)在特殊情况下函数的定义域可以是空集。

例 3　求函数 $y=\dfrac{(\sqrt{x^2}-1)^0}{\log_{(2x+1)}(32-4^x)}$ 的定义域。

解: 函数有意义的条件是

$$\begin{cases}\sqrt{x^2}-1\neq 0\\ 0<2x+1\neq 1\\ 32-4^x>0\\ \log_{(2x+1)}(32-4^x)\neq 0\end{cases}\quad \text{即}\begin{cases}x\neq\pm 1\\ -\dfrac{1}{2}<x\neq 0\\ x<\dfrac{5}{2}\\ x\neq\dfrac{\lg 31}{2\lg 2}\end{cases}$$

所以函数的定义为

$$\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}\text{且}x\neq 0,x\neq 1\right\}.$$

例 4　求函数 $y=\sqrt{1-\log_a(x+a)}$ 的定义域，（a 是大于零，不等于 1 的常数）。

分析：$\sqrt{1-\log_a(x+a)}$

要求$1-\log_a(x+a)\geqslant 0$,

$\log_a(x+a)$要求$x+a>0$。

解：原不等式的定义域为

$\{x|1-\log_a(x+a)\geqslant 0\}=\{x|\log_a(x+a)\leqslant 1\}$

当$a>1$时,$\{x|x+a\leqslant a\}\bigcap\{x|x+a>0\}$

$=\{x|x\leqslant 0\}\bigcap\{x|x>-a\}=\{x|-a<x\leqslant 0\}$;

当$0<a<1$时，$\{x|x+a\geqslant a\}\bigcap\{x|x+a>0\}$

$=\{x|x\geqslant 0\}\bigcap\{x|x>-a\}=\{x|x\geqslant 0\}$.

于是,当$a>1$时,原函数的定义域为$\{x|-a<x\leqslant 0\}$;

当$0<a<1$时,原函数的定义域为$\{x|x\geqslant 0\}$.

小结：$y=\log_a f(x)$ 的定义域，应分 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两种情况求解；$(\sqrt{x^2}-1)^0$ 要求$\sqrt{x^2}-1\neq 0$.

例 5　求函数 $y=\mathrm{tg}\left(\frac{x}{7}+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{ctg}\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域.

分析：$\mathrm{tg}\left(\frac{x}{7}+\frac{\pi}{4}\right)$ 要求$\frac{x}{7}+\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$,

$\mathrm{ctg}\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 要求 $-2x+\frac{\pi}{3}\neq k\pi(k\in Z)$.

解：原函数有意义的条件是

$$\begin{cases}\frac{x}{7}+\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\\ -2x+\frac{\pi}{3}\neq k\pi\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}x\neq 7k\pi+\frac{7\pi}{4}\\ x\neq -\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

$\therefore$ 原函数的定义域是 $\{x|x \neq 7k\pi + \frac{7\pi}{4}, x \neq -\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, k \in Z$

例 6 求函数 $\frac{\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}}{\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}$ 的定义域.

分析: $\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}$ 要求 $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$,

$\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}$ 要求 $\operatorname{tg} x > 1$.

解法1: 如图1－5.

$2k\pi + \frac{\pi}{4} < x \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{3}$.

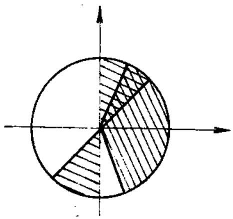


图1－5

解法2: 由 $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$,

得 $x \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3}\right]$ ①

由 $\operatorname{tg} x > 1$

得 $x \in \left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi - \frac{\pi}{2}\right)$

$\bigcup \left(2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ ②

由①、②得 $x \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{3}\right)]$

小结: (1) 函数式中含有切和弦时，都应用 $2k\pi$.

(2) $y = \operatorname{tg}[f(x)]$ 或 $y = \operatorname{ctg}[g(x)]$ 的定义域为 $\left\{x|f(x) \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$ 或 $\{x|g(x) \neq k\pi, k \in Z\}$，然后再