全国高级技工学校公共课教材

高等数学及应用

第2版

练习册

中国劳动社会保障出版社

本练习册与高级技工学校公共课教材《高等数学及应用（第2版）》配套使用。按照《高等数学及应用（第2版）》的课题顺序，分别给出课后练习题，练习题的题型有填空题、选择题、计算题和解答题等。既注重基础知识的巩固，又强调基本能力的培养。

本练习册由黄莉主编，符广启主审。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学及应用（第2版）练习册/黄莉主编．—北京：中国劳动社会保障出版社，2009.10

ISBN 978-7-5045-8092-4

Ⅰ．高…　Ⅱ．黄…　Ⅲ．高等数学-技工学校-习题　Ⅳ．013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第192505号

中国劳动社会保障出版社出版发行

（北京市惠新东街1号　邮政编码：100029）

出版人：张梦欣

*

北京金明盛印刷有限公司印刷装订　新华书店经销

787毫米×1092毫米　16开本　4.75印张　93千字

2009年10月第1版　2009年10月第1次印刷

定价：12.00元

读者服务部电话：010-64929211

发行部电话：010-64927085

出版社网址：http://www.class.com.cn

ISBN 978-7-5045-8092-4

目 录

模块一　微分及其应用

课题一　导数的概念

填空题

1．观察并写出下列各极限。

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}$ = ____；$\lim\limits_{x \to -\infty} 3^x$ = ____；$\lim\limits_{x \to 0} \sin x$ = ____；$\lim\limits_{x \to 0} \cos x$ = ____。

2．设函数 $y = x^3$，当自变量 x 变到 $x + \Delta x$，函数的增量 Δy = ________，平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = ________，瞬时变化率 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ = ________。

选择题

1．$\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x - 2}$ =（　　）。

A．0；　B．2；　C．∞；　D．$\frac{1}{2}$。

2．$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ =（　　）。

A．$f(x)$；　B．$f'(x)$；　C．$f(\Delta x)$；　D．$\frac{\Delta y}{\Delta x}$。

3．若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的导数 $f'(x_0) = 0$，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f'(x_0))$ 的切线（　　）。

A．平行于 x 轴；　B．平行于 y 轴；

C．是一条斜直线；　D．不存在。

解答题

1．将物体垂直上抛，经过 t（s）后，其上升的高度为 $h(t) = 10t - \frac{1}{2}gt^2$，求：

（1）物体从时刻 t_0 到时刻 $t_0 + \Delta t$ 这段时间内所走过的距离 Δh 及平均速度 $\bar{v}$。

（2）物体在 t_0(s) 秒时的瞬时速度 $v(t_0)$。

（3）若 $g = 9.8\ \text{m/s}^2$，当 $t_0 = 1$ s 时的瞬时速度 $v(1)$。

2. 已知函数 $y = x^3$ 的导数为 $y' = 3x^2$，求曲线 $y = x^3$ 在（1，1）点处的切线方程。

3. 已知函数 $y = \frac{1}{x}$ 的导数为 $y' = -\frac{1}{x^2}$，求双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 在点（$\frac{1}{2}$，2）处的切线方程。

4. 生产某种产品 q 个单位时成本函数为 $C(q) = 200 + 0.05q^2$，求：

（1）生产 90 个单位该产品时的平均成本；

（2）生产 90 个到 100 个单位该产品时，成本的平均变化率；

（3）生产 90 个与 100 个单位该产品时的边际成本各是多少。

（提示：边际成本为 $\frac{\Delta C}{\Delta q}$ 的极限，它表明当产量为 q_0 时，增加单位产量需付出的成本。）

课题二　导数的运算

一、导数的基本公式和四则运算法则

填空题

1. 由导数的基本公式，填写：

（1）$y = x^7$，$y' =$ ______；　（2）$y = \frac{1}{x}$，$y' =$ ______；

（3）$y = \sqrt{x}$，$y' =$ ______；　（4）$y = 2^x$，$y' =$ ______；

（5）$y = e^x$，$y' =$ ______；　（6）$y = \log_2 x$，$y' =$ ______；

（7）$y = \ln x$，$y' =$ ______；　（8）$y = \cos x$，$y' =$ ______。

2. 函数 $f(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$ 的导数是__________

______。

3. 曲线 $y = x^3 - 1$ 在 $x = 1$ 处的切线的斜率 $k =$ ______。

4. 函数 $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 2$，若 $f'(-1) = 4$，则 $a =$ ______。

5. 曲线 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 在点（1，-1）处的切线方程为______。

选择题

1. 曲线 $y = x^3 - 3x$ 上切线平行于 x 轴的点有(　　)。

A. (0，0)；　　B. (1，-2)；

C. (-1，2)；　　D. (1，2)。

2. 对任意 x，有 $f'(x) = 4x^3$，$f(1) = -1$，则此函数为(　　)。

A. $f(x) = x^4 - 2$；　　B. $f(x) = x^4 + 2$；

C. $f(x) = x^3$；　　D. $f(x) = -x^4$。

3. 如果质点 A 按规律 $s = 2t^3$ 运动，则在 $t = 3$ s 时的瞬时速度为(　　)。

A. 6；　B. 18；　C. 54；　D. 81。

4. 设 $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 2$，若 $f'(-1) = 3$，则 a 的值等于(　　)。

A. 1；　B. 2；　C. 3；　D. 4。

计算题

计算下列导数

1. $y = \sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{x^2} + 3\sqrt{2}$　　2. $y = x^2(\sin x + \sqrt{x})$

3. $y = \dfrac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x}$　　4. $y = \dfrac{\tan x}{x}$

解答题

1. 设电量与时间的函数关系为 $Q = 2t^2 + 3t + 1$，求 $t = 3$ s 时的电流强度。

2. 设质点的运动方程是 $s = 3t^2 + 2t + 1$，计算从 $t = 2$ 到 $t = 2 + \Delta t$ 之间的平均速度，并计算当 $\Delta t = 0.1$ 时的平均速度，再计算 $t = 2$ 时的瞬时速度。

3. 对一名工人工作时间和生产出的产品量的研究表明，该工人每天工作8 h，工作t(h) 后生产出的产品量Q(kg) 可以近似表示为：$Q(t)=-t^3+15t^2+12t$，求：

(1) 当t从2变到4时，该工人生产的产品量Q关于时间t的平均变化率，并解释它的实际意义。

(2) $Q'(2)$ 和 $Q'(4)$，并解释它的实际意义。

二、复合函数的求导及二阶导数

填空题

1. 函数$y=\sin^2 x$由函数________与函数________复合而成。

2. 曲线$y=x+\sin^2 x$在点$\left(\frac{\pi}{2},\ 1+\frac{\pi}{2}\right)$处的切线方程是________。

3. 已知物体的运动规律为$s=A\sin\omega t$（A、ω是常数），则物体运动的速度为________；加速度为________。

选择题

1. 下列函数中导数等于$\frac{1}{2}\sin 2x$的是(　　)。

A. $y=\frac{1}{2}\sin^2 2x$；　　B. $y=\frac{1}{4}\cos 2x$；

C. $y=-\frac{1}{2}\cos^2 x$；　　D. $y=-\frac{1}{4}\cos 2x$。

2. 已知$y=\sin 2x$，则$\frac{dy}{dx}=$(　　)。

A. $\cos 2x$；　　B. $2\cos 2x$；

C. $2\cos x$；　　D. $-2\cos 2x$。

3. 已知$f(x)=\sin x\cos x$，$g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$，$\varphi(x)=\sin^2 x$，则(　　)。

A. $f'(x)=g'(x)$；　　B. $f'(x)=\varphi'(x)$；

C. $g'(x)=\varphi'(x)$；　　D. $f'(x)+g'(x)=\varphi'(x)$。

4. 如果$f(x)=$(　　)，则$f'(x)=\sin 2x$。

A. $\cos^2 x$；　　B. $\sin^2 x$；

C. $\cos 2x$；　　D. $\sin 2x$。

计算题

1. 计算下列导数

(1) $y=(2x+1)^{100}$　　(2) $y=3\cos\frac{x}{2}+e^{3x}$

(3) $y=e^{2x}\sin 3x$　　(4) $y=\cos^2(x^2+1)$

2. 求下列函数的二阶导数 y''

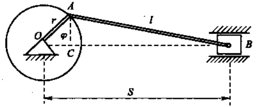
(1) $y=4x^2+\ln x$　　(2) $y=e^{-x}\sin 2x$

(3) $y=\ln(1-x^2)$　　(4) $y=e^{2x-1}$

解答题

1. 质量为 m_0 的物质，在化学分解中，经过时间 t 以后，所剩质量 m 与时间 t 的关系为 $m=m_0e^{-kt}$（k 为常数），求这个函数的变化率。

2. 下图为一曲柄滑块机构，曲柄 OA 以匀角速度 ω 绕 O 轴转动，通过连杆 AB 带动滑块 B 作往复直线运动。已知 $OA=r$，$AB=l$，且 $l>r$。求滑块 B 的运动方程、速度、加速度。

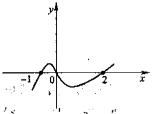


课题三　利用导数作图

一、函数的单调性和极值

填空题

1. 函数 $f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图像（如图），则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为__________。



2. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 取得极值的必要条件是 $f'(x_0)=$________。

3. 函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的极____值点是当 $x=$ ________时。

4. 设 $y=2x^2+ax+3$ 在点 $x=1$ 取得极小值，则 $a=$ ______。

5. 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且在点 x_0 处取得极小值，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程是__________________________。

选择题

1. 函数 $y=3x^2-x^3$（　　）。

A. 有极大值 0 和极小值 4；　B. 有极大值 4 和极小值 1；

C. 有极小值 0 和极大值 4；　D. 有极小值 4 和极大值 1。

2. 若函数 $f(x)=x^3-3bx+3b$ 在 $x=-1$ 时有极大值，则（　　）。

A. $b>1$；　B. $b<1$；

C. $b>0$；　D. $b=1$。

3. 若函数 $y=ax^2+b$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加，则 a、b 应满足（　　）。

A. $a<0$ 且 $b\neq 0$；　B. $a>0$ 且 $b\neq 0$；

C. $a>0$ 且 b 为任意实数；　D. $a<0$ 且 b 为任意实数。

4. 函数 $y=(x-2)^2$ 在 $[0, 4]$ 上的极小点是（　　）。

A. 0；　B. 2；

C. $(0, 0)$；　D. $(2, 0)$。

解答题

1. 求下列函数的单调区间和极值：

(1) $y=2x^3-6x^2+18x+1$

(2) $y=(x+1)e^x$

(3) $y = x + \frac{1}{x}$

(4) $y = x + \sqrt{1-x}$

2. 设质点作直线运动，其规律为 $s = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + 1$ ($t > 0$)，求：

(1) 何时速度为零？

(2) 何时作前进运动？

(3) 何时作后退运动？

二、函数的凹凸性与拐点

填空题

1. $y = x^3$ 的单调区间是________，凹向区间是_______，拐点是__________。

2. 曲线 $y = xe^{-x}$ 的拐点坐标是__________。

3. 设点 (1, 4) 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点，则 $a =$ ____，$b =$ ____。曲线的凹区间为________，凸区间为__________。

选择题

1. 曲线 $y = \ln(1 + x^2)$ 向上凹的区间是(　　)。

A. $(-\infty, -1)$；　　B. $[-1, +\infty)$；

C. $[-1, 1]$；　　D. $(-\infty, +\infty)$。

2. 曲线 $y = (x-1)^2 - 1$ 的拐点是(　　)。

A. (2, 0)；　　B. (1, −1)；

C. (0, −2)；　　D. 不存在。

3. 若函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有 $f'(x) > 0$，$f''(x) < 0$，则曲线 $y = f(x)$ 在此区间内是(　　)。

A. 下降且是凸的；　　B. 下降且是凹的；

C. 上升且是凸的；　　D. 上升且是凹的。

4. 如果曲线弧位于其上任一点切线的上方，则该曲线弧是(　　)。

A. 上升；　B. 下降；　C. 凹的；　D. 凸的。

5. 函数 $y = x^3 + 12x + 1$ 在定义域内(　　)。

A. 单调增加；　　B. 单调减少；

C. 为凹函数；　　D. 为凸函数。

解答题

1. 确定下列函数的凹向和拐点：

(1) $y = \ln(x^2 + 1)$

(2) $y = \dfrac{2x}{1 + x}$

2. 作出下列函数的图像：

(1) $f(x) = 3x - x^3$

(2) $y = 4e^{-\frac{x}{2}}$

三、函数的最大值和最小值问题

填空题

1. 函数 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值为________。

2. 若函数$f(x)$在区间$[a, b]$内恒有$f'(x)>0$，则此函数在$[a, b]$上的最大值是_______。

3. 函数$y=\ln(1+x^2)$在区间$[-1, 2]$上的最大值为_____；最小值为________。

选择题

1. 函数$f(x)=x^3-3x^2+1$在闭区间$[-2, 0]$上的最大值、最小值分别是(　　)。

A. 1，-1；　　B. 1，-17；

C. 3，-17；　　D. 3，-19。

2. 设$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$，则$x=1$为$f(x)$在$[-2, 2]$上的(　　)。

A. 极小值点，但不是最小值点；

B. 极大值点，但不是最大值点；

C. 极小值点，也是最小值点；

D. 极大值点，也是最大值点。

3. 可导函数$f(x)$在闭区间上有唯一的极大值和极小值，则(　　)。

A. 极大值一定是最大值，且极小值一定是最小值；

B. 极大值一定是最大值，或极小值一定是最小值；

C. 极大值不一定是最大值，极小值不一定是最小值；

D. 极大值必大于极小值。

解答题

1. 求下列函数在给定区间上的最大值和最小值：

(1) $y=x+2\sqrt{x}$　$[0, 4]$

(2) $y=x^2-4x+6$　$[-3, 10]$

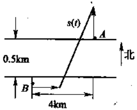
(3) $y=\sin x+\cos x$　$[0, 2\pi]$

(4) $y=\sqrt{5-4x}$　$[-1, 1]$

2. 窗户的形状下部是矩形，上部是半圆形，周长是 15 m，问矩形的宽和高各是多少时窗户的面积 A 最大。

3. 某火车的锅炉每小时消耗煤的费用与火车行驶速度的立方成正比，已知当车速为 20 km/h 时，每小时耗煤价值 40 元，其他费用每小时 200 元。甲、乙两地相距 s (km)，问火车行驶速度是多少时才能使火车由甲地开往乙地的总费用为最省？

4. 敌人乘汽车从河的北岸 A 处以 1 km/min 的速度向正北逃窜，同时我军摩托车从河的南岸 B 处向正东追击，速度为2 km/min，已知河宽 0.5 km，A 处与 B 处的东西向距离为 4 km，问我军摩托车何时射击最好？（提示：相距最近时射击最好）



5. 设排水沟的截面拟建成上部是半圆，下部是矩形，截面的面积为 5 m^2，问矩形的底、宽为多少时才能使截面的周长最小，从而使建造时所用材料最省？

课题四　微　　分

填空题

1. 函数 $y = x^3$ 在 $x = -1$ 处，当 $\Delta x = 0.02$ 时，增量 $\Delta y =$ ________，微分 $\mathrm{d}y =$ __________。

2. 半径为 R 的金属圆片，加热后半径伸长了 $\mathrm{d}R$，则面积 A 的微分 $\mathrm{d}A =$ ______。

3. 已知 $y = \ln\cos\dfrac{1}{x}$，则 $\mathrm{d}y =$ __________ $\mathrm{d}x$。

选择题

1. 设 $y = \sin^2 x$，则 $\mathrm{d}y =$ (　　)。

A. $\cos^2 x\mathrm{d}x$；　　B. $2\sin x\cos x\mathrm{d}x$；

C. $2\sin x\mathrm{d}x$；　　D. $2\cos x\mathrm{d}x$。

2. 对半径为 R 的球加热，若球的半径伸长了 ΔR，则球的体积大约增加了(　　)。

A. $\dfrac{4}{3}\pi(\Delta R)^3$；　　B. $\dfrac{4}{3}\pi R^2\Delta R$；

C. $4\pi R^2\Delta R$；　　D. $\dfrac{4}{3}\pi R^3$。

解答题

1. 求下列函数的微分 $\mathrm{d}y$：

(1) $y = x\sin 2x$

(2) $y = [\ln(1-x)]^2$

(3) $y = \dfrac{1}{x} + 2\sqrt{x}$

(4) $y = \mathrm{e}^{-x}\cos(3-x)$

(5) $y = \sqrt{1+\cos^2 x}$

(6) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

2. 水管壁的正截面是一个圆环，设它的内径为 R_0，壁厚为 h，利用微分计算这个圆环面积的近似值（h 相当小），并求相对误差。

3. 已知球的直径 $D = 20$ cm，已知其测量误差 $|\Delta D| = 0.05$ cm，试求球的体积的绝对误差和相对误差。

4. 半径为 10 cm 的金属圆片，由于热胀冷缩，当半径的增量为 0.1 cm 时，估算圆片面积的增量。测得金属圆片的直径 $D = 20.03$ cm，测量直径 D 的绝对误差限 $\delta_D = 0.05$ cm，试估计薄圆片面积的误差。

课题五　曲　　率

填空题

1. 抛物线 $y = 4x - x^2$ 在其顶点处的曲率为________。

2. 曲线 $y = \sin x$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 的曲率半径为________。

3. $y = \ln x$ 的弧微分 $ds =$ ________。

选择题

1. 抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 在顶点处的曲率及曲率半径为（　　）。

A. 顶点 $(2, -1)$ 处的曲率为 $\frac{1}{2}$，曲率半径为 2；

B. 顶点 $(2, -1)$ 处的曲率为 2，曲率半径为 $\frac{1}{2}$；

C. 顶点 $(-1, 2)$ 处的曲率为 1，曲率半径为 1；

D. 顶点 $(-1, 2)$ 处的曲率为 $\frac{1}{2}$，曲率半径为2。

2. 抛物线 $y^2=4x$ 在点 $M(1, 2)$ 处的曲率为(　　)。

A. $\frac{1}{4}$；　　　　B. $\frac{1}{4\sqrt{2}}$；

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$；　　　　D. $\frac{1}{2}$。

解答题

1. 求曲线 $y=\ln\sin x$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 处的曲率。

2. 曲线 $y=\cos x(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$ 上哪一点的曲率半径最小？求出该点处的曲率圆。

3. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与正弦曲线 $y=\sin x$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 处相切，并有相同的曲率，求 a、b、c 之值。

综合训练

选择题

1. 如果直线 l 与 x 轴平行，且与曲线 $y=x-e^x$ 相切，则切点的坐标为(　　)。

A. $(1, 1)$；　　　　B. $(-1, 1)$；

C. $(0, -1)$；　　　　D. $(0, 1)$。

2. 函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x+1$ 的图形在点 $(0, 1)$ 处的切线与 x 轴交点的坐标是(　　)。

A. $(-\frac{1}{6}, 0)$；　　　　B. $(1, 0)$；

C. $(\frac{1}{6}, 0)$；　　　　D. $(-1, 0)$。

3. 函数 $y = \arcsin x - x$ 的单调增加区间是(　　)。

A. $(-\infty, +\infty)$；　　　　B. $(0, 1)$；

C. $(-1, 1)$；　　　　D. $(-1, 0)$。

4. 函数 $y = \frac{2x}{1+x^2}$ 的单调性是(　　)。

A. 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加；

B. 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调减少；

C. 在 $(-1, 1)$ 上单调增加，其余区间单调减少；

D. 在 $(-1, 1)$ 上单调减少，其余区间单调增加。

5. 满足方程 $f'(x)=0$ 的点，一定是函数 $y=f(x)$ 的(　　)。

A. 极值点；　　　　B. 拐点；

C. 驻点；　　　　D. 最值点。

6. 设函数 $f(x) = ax^3 - (ax)^2 - ax - a$ 在 $x = 1$ 处取得极大值 -2，则 $a = $(　　)。

A. 1；　　B. $\frac{1}{3}$；　　C. 0；　　D. $-\frac{1}{3}$。

7. 曲线 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 的凹凸区间是(　　)。

A. $(-\infty, +\infty)$ 为其凹区间；

B. $(-\infty, +\infty)$ 为其凸区间；

C. 当 $|x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，曲线是凸的，$|x| > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时是凹的；

D. 当 $|x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，曲线是凹的，$|x| > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时是凸的。

8. 设 $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$，且 $f(1) = 1$，则有(　　)。

A. $a = -1, b = 1$，该函数有极小值 $f(1)$；

B. $a = -1, b = 1$，该函数有极大值 $f(1)$；

C. $a = 1, b = -1$，该函数有极小值 $f(1)$；

D. $a = 1, b = -1$，该函数有极大值 $f(1)$。

9. 函数 $y = e^{-x}$ 在 $(-1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 内分别为(　　)。

A. 凸与凸；　　B. 凸与凹；

C. 凹与凸；　　D. 凹与凹。

10. 某点作直线运动的规律为 $s = 10 + 20t - 5t^2 (t > 0)$，在 $t = 2$ 时的速度为0，则在该时刻的加速度为(　　)。

A. 0；　　B. 不存在；　　C. -10；　　D. 20。

填空题

1. 设函数 $f(x) = \ln(1+x^2)$，则 $f''(-1) = $____。

2. 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程平行于直线 $y = 2x + 3$，则 $f'(x_0) = $____。

3. 函数 $y = x \cdot 2^x$ 在 $x = $____处取得极小值。

4. 若连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内恒有 $f'(x)<0$，则此函数在 $[a, b]$ 上的最大值是______。

5. 函数 $f(x) = \sin^2 x\cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上的最大值为______。

6. 曲线 $y = (x-1)^3$ 的拐点是______。