

青年自学丛书

数 学

QINGNIAN ZIXUE CONGSHU

第 二 册



内蒙古人民出版社

统一书号: 7089·53

每册: 0.80 元

青年自学丛书

数 学

第二册

岳正仁 朱长山 戴春陶 编
高志懋 谢茂才 陈慕洲

内蒙古人民出版社

青年自学丛书

数 学

第二册

岳正仁 朱长山 戴春陶 编
高志懋 谢茂才 陈慕洲

内蒙古人民出版社出版 内蒙古新华书店发行
上海中华印刷厂排版 人民教育出版社印刷

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张 9.5 字数 200 千字

1978年6月第一版 1979年1月第二版

1979年12月第2次印刷

印数: 137,281—334,080

统一书号: 7089·53 每册: 0.80元

出版说明

为了贯彻党的十一大路线,适应广大城乡知识青年、在校学生和工农兵学习文化科学知识的需要,我社邀请一些有多年教学经验的大专院校和中学的教师,编写了一套青年自学丛书。这套丛书由数学(四册)、物理、化学、语文、政治常识问答和历史地理常识问答等单行本组成。目的是帮助读者经过自学达到高中毕业的水平,以便为实现四个现代化贡献更大力量。由于编辑水平有限,不足之处请读者批评指正。

内蒙古人民出版社

一九七八年二月

编 者 的 话

在以英明领袖华主席为首的党中央“抓纲治国”战略决策指引下，全国出现了大干快上的跃进局面。我们这些多年战斗在教育战线的数学教师，深切感到形势逼人，愿为迅速实现四个现代化贡献自己更大的力量。实现四个现代化，科学技术的现代化是关键，而数学是科学技术现代化必须的基础知识。应内蒙古人民出版社的邀请，我们承担了青年自学丛书“数学”部分的编写任务。

本书分一、二、三、四册包括：数和式的基础知识，平面几何基础知识，立体几何基础知识，方程和不等式，函数及其图象五章；下册包括：数列极限、排列、组合与应用数学初步，复数，解析几何，微积分初步四章。

在编写过程中，我们本着加强基础理论，坚持理论联系实际，便于自学等原则，根据新的数学教学大纲精神，增加了新的内容。在安排上注意了由浅入深、由易到难，在文字叙述上尽量做到简明扼要、通俗易懂，并配备了一定数量的例题和较多的习题，以利于培养读者分析问题和解决问题的能力。

由于我们思想水平不高，业务能力的局限，定稿时间紧迫，没有能够更广泛地征求意见，因此，书中一定有不少缺点甚至错误，恳切希望广大读者批评指正。

一九七八年二月于呼和浩特

目 录

第四章 方程和不等式	(473)
第一节 一元一次方程	(473)
一、方程的两个基本性质(473) 二、一元一次方程的解法(476) 三、一元一次方程的应用题(479)	
四、可化为一元一次方程的分式方程(482) 习题一(485)	
第二节 一次方程组	(489)
一、二元一次方程组(489) 二、二元一次方程组的解法(491) 三、一次方程组的应用(507) 四、平面直角坐标系(515) 五、二元一次方程组的图象解法(518)	
习题二(521)	
第三节 一元二次方程	(525)
一、一元二次方程(525) 二、一元二次方程的解法(526) 三、根与系数的关系(531) 四、一元二次方程的应用(533) 习题三(536)	
第四节 可化为一元二次方程的方程	(539)
一、高次方程(539) 二、分式方程(540) 三、无理方程(543) 四、二元二次方程组(546) 五、习题四(552)	
第五节 指数方程和对数方程	(556)
一、指数方程(556) 二、对数方程(557) 三、指数方程和对数方程组成的方程组(560) 习题五(562)	
第六节 不等式	(563)
一、一元一次不等式(563) 二、一元一次不等式组的	

解(569) 三、含绝对值的不等式(572) 四、一元二次不等式(575) 习题六(583)	
复习题.....	(586)
第五章 函数及其图象.....	(592)
第一节 函数的基本概念.....	(592)
一、函数的概念(592) 二、函数的图象和性质(600)	
习题一(606)	
第二节 一次函数.....	(610)
一、一次函数(610) 二、一次函数的图象和性质(613) 习题二(622)	
第三节 二次函数.....	(623)
一、二次函数(623) 二、二次函数的极值(639) 习题三(646)	
第四节 幂函数.....	(651)
一、幂函数(651) 二、反比例函数(660) 习题四(669)	
第五节 指数函数与对数函数.....	(671)
一、指数函数(671) 二、对数函数(678) 三、反函数(686) 习题五(692)	
第六节 三角函数.....	(693)
一、正弦函数(693) 二、其它三角函数(716) 习题六(725)	
第七节 反三角函数.....	(728)
一、反三角函数(728) 二、最简单的三角方程(740) 习题七(752)	
复习题.....	(755)
总复习题.....	(758)

第四章 方程和不等式

在生产实践和自然科学中,常用到方程和不等式,所以我们必须弄通方程和不等式的基本概念,并熟悉各种方程和一些不等式的解法.

第一节 一元一次方程

一、方程的两个基本性质

1. 等式和方程 用等号连结两个代数式所成的式子,叫做等式. 如 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; $3+2=5$; $x+3=5$ 等都是等式.

一个等式,不论用任何数值(只要是容许的)代替其中的字母,它都是成立的,这样的等式叫做恒等式. 如 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, 用任何数值代替其中的字母 a 和 b , 等式两边的数值都相等; $-(3-4) = -3+4$, 不含有字母,等式两边的数值相等.

这些等式都是恒等式. 再如表示算术运算的基本定律的一切等式也都是恒等式.

等式 $x+3=5$ 里,字母 x 的值,需要根据它同等式里已知数之间的关系来确定,这样的字母 x 叫做未知数. 含有未知数的等式,叫做方程.

能够使方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做方程的解。如用 2 代替方程 $x+3=5$ 里的 x ，方程左右两边的数值相等，2 就是方程的解。一个方程可以有一个解，或者几个解，也可以没有解。如

$$2x-1=0 \text{ 只有一个解是 } \frac{1}{2};$$

$$x^2+1=10 \text{ 有两个解是 } 3 \text{ 和 } -3;$$

$$4x+8=4x+4 \text{ 没有解。}$$

求出方程的解或者确定方程没有解的过程叫做解方程。

2. 同解方程 两个方程里，如果第一个方程的解都是第二个方程的解，并且第二个方程的解也都是第一个方程的解，那么这两个方程叫做同解方程。如

方程 $2x-1=5$ 的解是 3，方程 $2x=6$ 的解也是 3。所以方程 $2x-1=5$ 和方程 $2x=6$ 是同解方程。

但是，方程 $2x-3=1$ 的解是 2，方程 $x^2=4$ 的解是 2 和 -2，虽然方程 $2x-3=1$ 的解是方程 $x^2=4$ 的解，但方程 $x^2=4$ 的两个解里，-2 却不是方程 $2x-3=1$ 的解，所以这两个方程就不是同解方程。

两个方程里，如果第一个方程的每一个解都是第二个方程的解，那么第二个方程叫做第一个方程的结果。如方程 $x^2=4$ 是方程 $2x-3=1$ 的结果。

3. 方程的两个基本性质

(1) 方程的两边都加上(或减去)同一个数或者同一个整式，所得的方程和原方程是同解方程。

(2) 方程的两边都乘以(或除以)不等于零的同一个数，所得的方程和原方程是同解方程。

如果用零乘方程的两边，那么所得的就不是原方程的同解方程。例如方程 $x+3=4$ 的两边都乘以零，得到

$$(x+3) \cdot 0 = 4 \cdot 0.$$

这时，不论用任何数值代替 x ，左右两边的值都相等（等于零），所以 $(x+3) \cdot 0 = 4 \cdot 0$ 和 $x+3=4$ 不是同解方程。

当方程的两边都乘以同一个整式时，有可能把不适合于原方程的根引入结果方程，产生增根。如方程 $x+3=4$ ，它的解是 $x=1$ 。如果这个方程的两边同乘以 $(x+3)$ ，得

$$(x+3)(x+3) = 4(x+3),$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

这个新方程的解是 $x=1$ 和 $x=-3$ 。其中 $x=1$ 是原方程的根， $x=-3$ 是由于原方程两边都乘以 $(x+3)$ 而引入的增根。

根据方程的第一个基本性质，可以引出方程变形的移项法则：方程中的任何一项改变符号后，可以从方程的一边移至另一边。如方程

$$3x - 2 = 8$$

两边同时加上 2，变形为

$$3x = 8 + 2, \quad \text{即} \quad 3x = 10.$$

我们把原方程 $3x - 2 = 8$ 与两边加 2 之后所得的方程 $3x = 10$ 比较，可以看到，这个步骤相当于把 -2 改变符号，变成 2 之后从左边移至右边。

从方程的第二个基本性质可以引出方程变形的去分母方法：把方程的两边都乘以方程里几个分母（不含有未知数）的最小公倍数，使所得的方程里未知数的系数不含有分母。如

方程 $\frac{x-2}{6} = \frac{x}{3} + 1$ 的两边同乘以 6，则去掉分母得出与原方

程同解的方程: $x-2=2x+6$.

二、一元一次方程的解法

1. 整式方程 方程两边的代数式都是整式的方程,叫做整式方程. 如

$$\text{方程 } 3x+5=7-2x;$$

$$\text{方程 } \frac{y-2}{6} = \frac{y}{3} + 1, \text{ 都是整式方程.}$$

2. 一元一次方程 只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是一次的整式方程,叫做一元一次方程. 如上面的一些方程都是一元一次方程,而方程 $x+y=6$, $x^2+x=12$, $\frac{6}{y-1} = \frac{3}{y} + 1$ 等都不是一元一次方程.

3. 一元一次方程的解法步骤是:

(1) 去分母.(方程的两边乘以分母的最小公倍数.)

(2) 去括号.(如果括号里能够化简,就先进行化简.)

(3) 移项.(把含有未知数的项移到方程的左边,把不含未知数的项移到方程的右边.)

(4) 合并同类项.(移项后左边应将未知数作为公因式提出.)得到标准形式 $ax=b$.

(5) 方程的两边都除以未知数的系数.

由于方程的形式不同,在解方程时,上面的几个步骤,并不一定都要用到,要对具体问题作具体分析,选择简便而且正确的解法.

例 1 解方程:

$$2(x-2)-3(2x-1)=7(1-x)-5(x+2).$$

解 去括号, 得

$$2x-4-6x+3=7-7x-5x-10.$$

移项, 得

$$2x-6x+7x+5x=7-10+4-3.$$

合并同类项, 得

$$8x=-2.$$

两边都除以 8, 得

$$x=-\frac{1}{4}.$$

为了检验解方程时的计算有没有错误, 可以把求得的解代替原方程中的未知数, 检查方程左右两边的值是不是相等.

检验: 用 $-\frac{1}{4}$ 代替原方程中的 x ,

$$\text{左边} = 2\left(-\frac{1}{4}-2\right)-3\left[2\left(-\frac{1}{4}\right)-1\right]=0,$$

$$\text{右边} = 7\left(1+\frac{1}{4}\right)-5\left(-\frac{1}{4}+2\right)=0.$$

左边 = 右边, 所以 $-\frac{1}{4}$ 是原方程的解.

例 2 解方程: $\frac{3+x}{2}+7=\frac{2-x}{3}.$

解这个方程, 可以先把方程的两边都乘以方程里几个分母的最小公倍数, 使未知数的系数变为整数.

解 去分母, 得

$$3(3+x)+7\times 6=2(2-x),$$

去括号, 得

$$9+3x+42=4-2x,$$

移项, 合并同类项, 得

$$5x = -47$$

两边都除以 5, 得

$$x = -\frac{47}{5}.$$

例 3 解方程: $2\left[\frac{4}{3}x - \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{3}{4}x.$

解 去括号, 得

$$2\left[\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4}x,$$

$$2\left[\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4}x,$$

$$\frac{4}{3}x + 1 = \frac{3}{4}x.$$

去分母, 得

$$16x + 12 = 9x.$$

移项和合并同类项, 得

$$7x = -12.$$

两边都除以 7, 得

$$x = -1\frac{5}{7}.$$

解方程熟练以后, 写法和步骤都可以简化.

例 4 解方程:

$$(x-1)^2 - (x+3)(x-3)$$

$$= (x+1)(x+2) - (x-1)(x+4).$$

解 $x^2 - 2x + 1 - x^2 + 9 = x^2 + 3x + 2 - x^2 - 3x + 4$

$$-2x + 10 = 6$$

$$-2x = -4$$

$$x = 2.$$

三、一元一次方程的应用题

例 1 一个机床厂,今年平均每月生产车床 206 台,比去年平均每月产量的 2 倍多 28 台,去年平均每月产量是多少台?

解 设去年平均每月产量是 x 台,那么去年平均每月产量的 2 倍是 $2x$ 台.

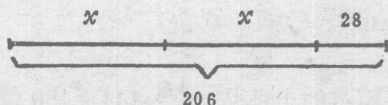


图 4-1

因为去年平均每月产量的 2 倍加上 28 台跟今年平均每月产量 206 台相等,所以

$$2x + 28 = 206.$$

解这个方程: $2x = 178,$

$$x = 89.$$

检验: 89 台的 2 倍是 178 台,再加 28 台,恰好是 206 台.

答: 去年平均每月产量是 89 台.

例 2 大寨大队在解放前共有耕地 800 亩,而四户地、富霸占的土地是五十一户贫下中农耕地的 $3\frac{1}{3}$ 倍,中农占地 176

亩。问解放前大寨大队的地、富霸占了多少土地？贫下中农仅有多少土地？

分析：问题中已知数与未知数之间的等量关系是：

贫下中农仅有的土地 + 地、富霸占的土地
+ 中农的土地 = 耕地总数。

解 设贫下中农仅有土地 x 亩，那么地、富霸占的土地是 $3\frac{1}{3}x$ 亩，根据题意，得方程

$$x + 3\frac{1}{3}x + 176 = 800.$$

解这个方程得

$$4\frac{1}{3}x = 624, \quad x = 144(\text{亩}).$$

地、富霸占的土地是 $3\frac{1}{3} \times 144 = 480$ (亩)。

答：四户地、富就霸占了土地 480 亩，而五十一户贫下中农仅有土地 144 亩。

例 3 某生产大队为了确保小麦丰收，积极消灭粘虫虫害，用 50% 的“1605”药水 2 斤，配成含药 0.05% 的药水，需要加水多少斤？

分析：这是一个把农药稀释的问题，在稀释过程中，药水的浓度变了，但含药的重量不变。即

$\text{加水后含药量} = \text{加水前含药量}$

为了明确地表示问题中已知数与未知数的关系，用 x 表示加水斤数，列成下表：

	药水重量	浓 度	含药重量
加水前	2	50%	$2 \times 50\%$
加水后	$2+x$	0.05%	$(2+x) \cdot 0.05\%$

由此,得方程

$$(2+x) \times 0.05\% = 2 \times 50\%.$$

解这个方程,两边同乘以 100,得

$$0.05 \times (2+x) = 2 \times 50,$$

$$0.1 + 0.05x = 100,$$

$$0.05x = 99.9, \quad x = 1998.$$

答: 需要加水 1998 斤.

例 4 甲、乙两地相距 202 公里. 一列慢车, 从甲地开往乙地, 每小时走 34 公里. 出发后 1 小时, 一列快车从乙地开往甲地, 每小时走 50 公里. 快车开出几小时后与慢车相遇?

解 设快车开出 x 小时后与慢车相遇. 那么快车从开出到相遇走了 $50x$ 公里, 慢车从开出到相遇一共走了 $(1+x)$ 小时, 走了 $34(1+x)$ 公里.

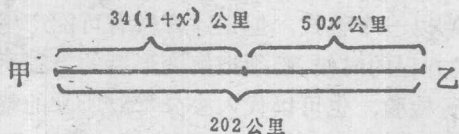


图 4-2

因为两车相向而行, 到相遇时所走的路程的和就是甲、乙两地的距离(图 4-2), 所以