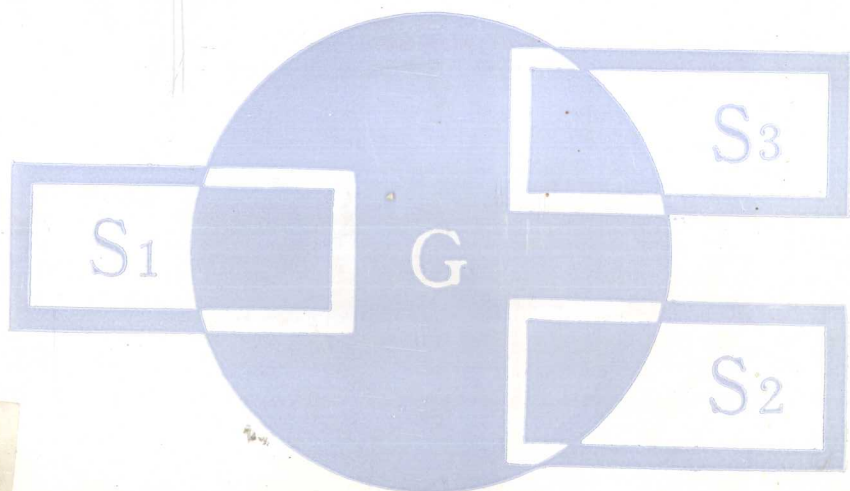


XIANDAI YINSHU

FENXI

现代因素分析

• 王 权 编著



杭州大學出版社

现代因素分析

王 权 编著

杭州大学出版社

(浙)新登字第12号

现代因素分析

王 权 编著

※

杭州大学出版社出版

(杭州天目山路34号)

※

浙江省新华书店发行

杭州大学印刷厂印刷

850×1168 毫米 1/32

10.25 印张

260 千字

1993 年 2 月第 1 版

1993 年 2 月第 1 次印刷

印数：0001—2000

书号：ISBN 7-81035-332-2/O·020

定价：6.00元

序

陈 立

王权教授从事教育统计和测量的教学多年，曾有专著出版。近来又以算法语言(algorithmic language)阐述因素分析法的演化，掇英撮粹，循流溯源，极足称道。因素分析滥觞于斯波尔曼于1904年在《美国心理学报》发表的一篇论文，题为《客观地决定的“普通智力”》，对智力的性质从数理的分析来剖析智力的结构。结果竟是，为澄清一个心理学的理论而发展成为今日各种科学，包括物理科学和工艺上广泛应用的统计方法，有人诤之为心理学对自然科学方法论的唯一贡献。可至今在中国的从事心理学工作者尚没有一个人对此写出如此详尽系统的专著，这就不得不使我对作者表示衷心的敬佩。

我经常感慨地说：误差是物理科学的骨头，但却是心理科学中的一块肥肉。斯波尔曼无法用相关方法得出g因素完整的相关，他便提出第一个纠正减弱公式，Correction for attenuation的公式，即订正因信度的差误而影响相关的程度。到了晚期，在他出版的《历代以来的心理学》一书中，则又提出 $A' = G + S + E' + E''$ 的公式，分析误差中变误与常误的两种不同性质。因素分析的努力，便要尽量缩小变误，和更有效地分析常误。共同因素方差的分析改进，便成为尔后的重点。例如“碎石检验(Scree test)”，和极大似然法等等的引进，都无非是使常误更加精密化，从而使共同因素方差得到满负荷。

我不得不指出斯波尔曼教授原来的出发点是为着证明一个共同因素g，便不关心拘泥于测验性质的差别，对测验设计的项目分析就完全疏忽了。经典测验的项目便随经验而信手拈来，缺乏理论的选择指导。因此这种分析方法就只能是探索的。从科学史来

看，一切科学在发展中也都如此。只是在这些经验的基础上，形成种种理论，然后按理论的要求，控制共同因素，以科学实验的精神，进行证实与证伪，这样，就出现严格的证实的因素分析法。现代的科学哲学家波普尔(Popper)认为证实的主旨在证伪(falsification)，我认为这才是辩证法的否定精神，正如物种的演化契机在淘汰一样。实证性的因素分析，便有可能在精益求精的要求下，日臻完善。

我在本文开端就用了“滥觞”二字，这不是好古玩文，我觉得只有这两个字才能更好地更形象地描述因素分析发展的全过程。滥觞指江河之源，不过是一支能浮起一只酒杯的细流。但细流汇成江河，最后竟倾流入海，那时就不只能载千斤万斤的船只，到了北仑港和舟山的册子岛等港，就是十万吨卅万吨的深水轮船也都可以安然抛锚了。因素分析法，现在已成为河川、支流差错，王权教授已给读者描绘了流域形胜，并对有些景观，引用些实例详解，这些都是难能可贵的案例。按图索骥，一定可以便于读者的实践。本书内容用了许多矩阵代数，对某些读者也可能感到困难。我劝读者先熟悉一些矩阵代数入门，以肃清一些拦路虎。我希望在本书再版时，效塞斯顿《多因素分析》一书的做法，先加一章介绍矩阵代数的一些概念与运算方法，对许多不熟悉高等数学的读者，我想会感到更方便的。

前 言

《现代因素分析》是对近三十年来国内、外（主要是国外）关于因素分析研究的主要成果的初步小结。笔者在撰写过程中力图体现以下三点设想：（1）基础性。本书对因素分析的一些基本概念和方法，例如对数学模型的阐述、求取初始因素的主轴法、极大似然法以及求取旋转解的 varimax 和 promax 等方法的数学原理均作了较为详尽的介绍，具有一定数学修养的读者可以对因素分析的统计原理获得准确而深入的理解。（2）应用性。每一种主要方法都列出了详尽的计算步骤，据此读者可以自编计算程序，同时还列举了应用实例，其中不少例子是笔者应用研究的成果。一般读者研读了这些应用例子，可以效仿运用。（3）先进性。注意反映近三十年来因素分析的新进展。例如实证性因素分析和高阶因素分析是因素分析研究的新成果，本书也作了介绍。其他一些主要方法也都是现在流行的软件包所采用的方法。由于篇幅所限，许多问题还不能展开，有待于今后弥补。

本书的大量计算问题都得力于杭州大学数学系汤健康副教授的帮助，他为本书编制了计算程序，并进行了运算。加利福尼亚大学访问教授闻人军先生、乔治亚州政府的李仁根博士、内华达大学的沈禾玲博士为本书提供了许多因素分析研究的专著和论文，本书才得以顺利写就。借此机会，谨向以上四位致以最衷心的感谢！

由于笔者水平有限、学识浅薄，错误、不妥之处定会不少，敬请专家、学者、同行和广大读者批评指教。

王 权

1992年9月20于杭州大学

目 录

第一章	引 论	(1)
第二章	因素分析的数学模型	(10)
§ 1.	行为科学研究的多元线性模型	(10)
§ 2.	全分量模型和公共因素模型	(12)
§ 3.	相关与不相关的因素模型	(15)
§ 4.	因素模式和因素结构	(19)
§ 5.	方差的分解	(25)
§ 6.	因素模型的统计拟合	(28)
第三章	因素分析的几何解释	(32)
§ 1.	因素分析的矩阵表示	(32)
§ 2.	代数和矩阵概念的几何表示	(35)
§ 3.	因素分析问题的几何解释	(49)
第四章	公共因素方差和公共因素数	(58)
§ 1.	公共因素方差	(58)
§ 2.	决定公共因素数的方法	(64)
第五章	因素分析的初等方法	(80)
§ 1.	对角因素分析	(80)
§ 2.	群因素分析	(86)
§ 3.	形心因素分析	(90)
§ 4.	经验性的正交旋转	(97)
第六章	主轴法	(102)
§ 1.	主轴法	(102)
§ 2.	应用实例	(110)
§ 3.	主成分分析	(119)
§ 4.	主轴法的数学原理	(134)

第七章 极大似然法·····	(140)
§ 1. 统计估计·····	(140)
§ 2. 因素负荷的极大似然估计·····	(143)
§ 3. 极大似然估计的计算方法·····	(157)
§ 4. 模型的拟合良好性检验·····	(172)
第八章 最小剩余法和其他求取初始因素法·····	(192)
§ 1. 最小剩余法的原理·····	(192)
§ 2. 最小剩余法的计算方法·····	(198)
§ 3. 象点因素分析和其他方法·····	(203)
第九章 因素负荷矩阵的正交变换·····	(210)
§ 1. 正交变换的基本原理·····	(210)
§ 2. 方差极大正交旋转法·····	(216)
§ 3. 四乘方极大正交旋转法·····	(225)
第十章 因素负荷矩阵的斜交变换·····	(231)
§ 1. 斜主因素解·····	(231)
§ 2. 斜参照因素解·····	(241)
§ 3. Promax 斜旋转·····	(247)
第十一章 高阶因素·····	(256)
§ 1. 高阶因素分析的概念·····	(256)
§ 2. 高阶因素的抽取方法·····	(258)
§ 3. 高阶因素的解释·····	(265)
第十二章 因素的度量·····	(275)
§ 1. 主成分的度量·····	(276)
§ 2. 公共因素模型的因素度量·····	(281)
§ 3. 度量公共因素的唯一性因素最小法·····	(295)
第十三章 实证性因素分析·····	(298)
§ 1. 实证性因素分析的数学模型·····	(301)
§ 2. 实证性因素模型的识别·····	(305)
§ 3. 实证性因素模型参数的估计·····	(311)
§ 4. 实证性因素模型的拟合检验·····	(313)

第一章 引 论

因素分析是一种多变量的统计分析方法。它是将描述某一事物的多个变量缩减成描述该事物的少数几个潜变量 (latent variable) 的统计方法。例如一个大学理科考生的学习能力可以用高考的七科成绩 (语文、数学、外语、物理、化学、生物、政治) 来描述。但我们也可以用三个能力变量 (语言能力、数形关系的概括推理能力、物质关系的想象抽象能力) 的得分来描述, 使考生的学习能力表达得更为简单、明了。因素分析就是将原先的七个成绩变量概括成三个能力变量的一种统计分析方法。原先的变量称作观测变量, 因为它们能被观察和测量; 概括出来的能力变量是不可观察和测量的, 但又是客观存在的潜在变量, 称作公共因素。又如国外的体育理论研究, 对 160 名全能运动员的十项体育成绩: 百米跑、跳远、铅球、跳高、400 米跑、110 米跨栏、铁饼、撑杆跳高、标枪、1500 米跑成绩进行了因素分析, 概括出描述全能运动员体育水平的四项基本体育能力: 爆发性臂力、爆发性腿力、速度、耐力, 这是将十个观测变量概括成四个公共因素。由于这四个公共因素制约着十项体育成绩, 所以提高全能运动员的体育成绩就需要加强这四项目基本体育能力的训练。

因素分析方法是在心理科学、特别是对人的智力问题的研究过程中建立和发展起来的。现在, 因素分析方法已经为解释人类行为以及行为能力的心理学理论提供了一个有效的数学模型, 因而已成为心理学和教育工作者从事智力、能力等研究的一种必不可少的统计分析工具。

1904 年英国心理学家斯皮尔曼 (C.Spearman) 在美国心理学杂志 (American Journal of Psychology) 上发表了专题论

文“客观地决定和测量一般智力”(General Intelligence, Objectively Determined and Measured),提出了智力是由一般因素和众多的特殊因素构成。他假定智力活动的各个测验都包含一个所有测验所共有的共同性成份 g 和一个各测验自身唯一特有的独特性成份 s 。根据斯皮尔曼的一般智力理论以及他所提出的数学模型,于是就产生了因素分析的两因素方法(一般因素和独特因素方法)。在这以后的二十年中,许多心理学家纷纷围绕进一步证实或反驳斯皮尔曼的“一般智力”理论作了大量的研究。

1925年以后,因素分析研究出现了较大规模的公开争论。一个明显的事实是斯皮尔曼的二因素论并不一定能合适地描述一组心理测验,所以群因素(group factor)理论开始兴起。1937年霍尔津格(K.J.Holzinger)提出了“双因素”(bi-factor)理论,他认为智力活动的各个测验除了受一个全部测验所共有的一般因素影响外,还会受部分测验共有的群因素的影响。30年代的后半期,在美国心理学家瑟斯顿(L.L.Thurstone)和他在芝加哥大学的学生的影响下出现了因素分析的美国学派。瑟斯顿认为智力是由一些“基本心理能力”(primary mental abilities)构成,这些能力的不同组合就产生各种形式的认知活动能力。为了寻找这些基本心理能力,瑟斯顿提出了“简单结构”(simple structure)的思想,即每一个基本能力并非对智力活动的任何一个测验都发生影响。他通过旋转因素轴的方法建立了形成简单结构的数学方法。这个方法是将潜在的公共因素的初始解变换成旋转解,在旋转解中,各公共因素分别与部分高度类似的测验变量结合在一起。用旋转方法得到的因素可以是相关的,也可以是不相关的。如果瑟斯顿的基本能力因素是相关的,则可对其相关因素作再次析因分析,这样第二次析因所得的公共因素叫“二阶因素”(second-order factor)。而二阶因素常被认为类同于英国心理学家的智力结构层次说中的“主群因素”(major group factor)。

事实上，通过高阶因素分析常常可以得到较低阶因素的一般公共因素，斯皮尔曼认为这个一般公共因素就相当于他的 g 因素。除此外，瑟斯顿还在 1931 年提出了因素分析的“形心法”（Centroid method），这是电子计算机出现以前较为广泛使用的一种方法。

二次大战期间，美国军方广泛地采用了瑟斯顿的理论和方 法，大大推进了选拔各种军事人材的工作。二次大战以后，许多心理学家继续从事智力的因素分析研究。1967 年美国心理学家吉尔福德（J.P.Guilford）推广了瑟斯顿的基本心理能力概念，他认为智力是由可以划分为三个维度的 120 个潜在因素构成。这三个维度分别称作操作（operation）、内容（content）、成果（product）。操作是指个体对信息的处理。处理的方式分作认知、记忆、发散思维、辐合思维和评价五种。智力活动总要以一定的内容表现出来，所以内容分作图形的、符号的、语义的和行为的四种。成果是指智力活动的结果，结果有单元、门类、关系、系统、转换和蕴含六种。三个维度上的各种不同成份的组合就形成一种特殊因素，共 120 种因素。由于在吉尔福德的智力结构模型中，因素之间是互不相关的，因此就不能解释各个观测变量所欲测量的心理特质的那些重叠部分所造成的相关。因此他的理论模型遭到了尖锐的批评。

60 年代，还有卡特尔（R.B.Cattell）和弗农（P.E.Vernon）提出了包含两个一般因素的智力结构分析理论。这两个一般因素是流畅性智力（fluid intelligence）和结晶性智力（crystallized intelligence）。流畅性智力是指在没有受益于经验和教育条件下的一种领悟关系和发现相关的一种能力，在本质上相当于斯皮尔曼的一般智力的概念。结晶性智力是指解决多种内容问题的一般能力，这种能力依赖于教学、依赖于文化背景，与词语理解、形式推理和一般知识等有关。

智力研究的新近趋势是心理学家的一般方法和理论开始与智

力活动的因素分析理论结合起来。认知心理学家的主要兴趣在于描述个体在解决问题中所使用的加工策略，他们使用因素分析法，关心的主要是想发现个体的解决问题行为的不同途径。1976年卡洛尔(J.B.Carroll)对个体的解决问题行为进行了因素分析，根据因素分析的结果得出了解决问题的一些导出测验，然后再利用信息加工模型对个体的这些导出测验的行为加以分类。1977年斯顿伯格(R.J.Sternberg)使用分量分析(component analysis)方法指导实验，以评价个体在解决词语相似问题中所使用的各种信息加工模型。今后的研究很可能会出现一些用实证性因素分析(confirmatory factor analysis)来检验智力活动中个体信息加工模型的差异。

在心理学中应用因素分析的其他主要领域是个性的研究，吉尔福德在30年代就开始利用个性特质的因素分析方法来研究个性的层次组织模型。艾森克(H.J.Eysenck)在1947年和1967年利用因素分析方法证实了他的关于个性差异的观点，他根据巴甫洛夫关于大脑皮层兴奋与抑制的个体差异理论和神经系统应答反应的个体差异理论，认为个性差异主要表现在两个维度上，即内向与外向、神经感应的稳定性。而且他还利用实验来支持他自己的理论。因素分析的个性理论家卡特尔认为一些外显的或表面的个性特质，如友谊、自信、合群是由更基本的原始特质所决定，这些原始特质可通过对个体特质间的相关的因素分析来发现。

到70年代，探索性的公共因素分析在方法学上已达到了成熟的阶段，它不仅应用于智力结构和个性的研究，而且也应用于态度、兴趣、学习等的研究。一些非心理学领域，如化学、地质学和生物分类学等的研究也广泛地使用了因素分析方法。

以上是因素分析在心理学研究中的应用历史，从因素分析的统计学研究的角度考察，1933年霍特林(H.Hotelling)的关于主成分分析的专题论文是统计学家对因素分析的最早的卓著贡献。然而，一直到1940年劳利(D.N.Lawley)发表了关于因素分析的极

大似然法的专题论文以后，因素分析才被认为是一种有效的统计技术。此外，统计学家安德森(T.W. Anderson)、鲁宾(H. Rubin)、丹福德(M.B. Danford)、肯德尔(M.G. Kendall)、劳(C.R. Rao)、沃尔德(H. Wold)等人也对因素分析作出了贡献。六十年代的中、后期，统计学家博克(R.D. Bock)和巴奇曼(R. Bargmann)、耶勒斯柯克(K.G. Jöreskog)研究了因素分析模型中的参数的假设检验问题。Jöreskog的工作是以极大似然法为基础，解决了许多计算和解释都是十分困难的问题。由于他们的方法重点在于检验假设，因此人们称之为“实证性因素分析”(confirmatory factor analysis)。目前，实证性因素分析尚处在初创时期，有待于进一步的发展和完善。

因素分析产生于心理学理论——智力理论的研究，以后又表明因素分析法是发现心理规律或形式化心理学理论的一种有效方法。例如斯皮尔曼在提出了二因素理论后，又证明了如果一组测验变量之间的两两相关满足条件：

$$r_{jk}r_{lm} - r_{lk}r_{jm} = 0, \quad j, k, l, m = 1, 2, \dots, n; \quad j \neq k, \quad l \neq m.$$

则各个测验变量均可分解为包括一个一般因素和一个唯一性因素的线性表达式：

$$Z_j = a_{j0}F_0 + d_jU_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1-1)$$

其中 F_0 是一般因素， U_j 是 n 个唯一性因素。因为

$$r_{jk} = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N Z_{ja} Z_{ka}$$

其中 N 为样本容量。将 Z_j 和 Z_k 代入上式，得

$$\begin{aligned} r_{jk} &= \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N (a_{j0}F_{0a} + d_jU_{ja})(a_{k0}F_{0a} + d_kU_{ka}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N a_{j0}a_{k0}F_{0a}^2 = a_{j0}a_{k0} \left(\frac{1}{N} \sum_{a=1}^N F_{0a}^2 \right) = a_{j0}a_{k0}. \quad (1-2) \end{aligned}$$

其中因为一般因素与唯一性因素假定为独立，所以，

$$\frac{1}{N} \sum_{a=1}^N F_{oa} U_{,a} = 0,$$

而 F_o 的自身相关为 1，即

$$\frac{1}{N} \sum_{a=1}^N F_{oa} F_{oa} = 1.$$

现在如果我们希望求出变量 Z_e 的一般因素的加权数系 a_{eo} ，则可用 a_{eo}^2 乘 $r_{jk} = a_{jo} a_{ko}$ ，得

$$a_{eo}^2 r_{jk} = a_{eo}^2 a_{jo} a_{ko} = (a_{eo} a_{jo})(a_{eo} a_{ko}) = r_{ej} r_{ek}$$

再连加

$$a_{eo}^2 \sum_{j < k=1}^n r_{jk} = \sum_{j < k=1}^n r_{ej} r_{ek}$$

其中 e 是固定的， $j, k \neq e$ 。 $\sum_{j < k=1}^n r_{jk}$ 表示所有相关系数的和， j 和 k 的变动范围是 $1, 2, \dots, n$ ，但 j 总是小于 k 。实际上这是表示相关矩阵中主对角线以上的所有元素（相关系数）之和。于是就得：

$$a_{eo}^2 = \frac{\sum_{j < k=1}^n r_{ej} r_{ek}}{\sum_{j < k=1}^n r_{jk}} \quad (j, k \neq e) \quad (1-3)$$

利用 (1—3) 式就可根据变量组的相关矩阵求出各个测验变量的一般因素的加权系数。

其次，因素分析方法是从事心理测量和教育测量研究的有力工具。许多心理学家利用因素分析方法从事测验大纲的研究，他们希望能使用较少的几个测验尽可能完整地描述人们的心理状态。特别是近二三十年，个性特质论派的心理学家们利用因素分析法来制定个性量表。例如美国心理学家卡特尔 (R.B.Cat-

tell) 在收集描述人类行为特征词汇的基础上, 编拟了有大量题目的调查问卷, 并对大批正常人进行了测试, 然后进行多次因素分析, 找出了描述人类个性的 16 个根源特质, 制定了 16 因素的个性量表. 英国心理学家艾森克 (H.G. Eysenck) 运用因素分析法分析了大量与个性有关的心理和生理变量, 概括出描述人类个性的两个主要特征, 称之为个性的两个基本维度: 内向—外向; 情绪稳定—神经过敏. 其实, 因素分析在制定任何标准的心理测验中都能发挥它的作用. 一般的步骤是先拟定一份测验范围充分广泛的调查卷, 尽可能地包括所要研究的心理特质的各个方面的行为反应, 然后对其大量的预测资料进行因素分析, 其中与公共因素相关最高的项目, 或以此为基础加以修订后的项目就可选作测量该心理特质的测验项目.

在教育测量学中, 因素分析仍然是编制标准化测验的有效工具之一. 例如我们从一份测验中抽取了若干公共因素, 如果这些因素就是测验所要测量的行为属性, 则各公共因素的“方差贡献” (variance contribution) 的大小正好反映了这份测验所能测到该行为属性的程度. 因此在这种情况下, 各公共因素的“方差贡献率”之和可作为该测验的效度指标, 心理测量学称之为“构想效度”(construct validity). 也就是根据方差贡献率的大小可以鉴定测验的有效程度. 区分度是指测验项目能测到个别差异的程度, 对于常模参照性测验, 它是测验项目必需的一个技术指标. 所以若某一测验项目的“公共因素方差” (communality) 愈大, 说明在测验所能测到的内容方面, 该项目测定被试的个别差异的功能愈好, 因而具有较高的鉴别力. 反之, 项目的公共因素方差愈小, 鉴别力就愈低. 因此项目的公共因素方差可以用作评价项目区分度的高低. 近十年来, 我国的心理学界在引进和修订许多国际上著名的智力量表、个性量表的过程中, 因素分析法也发挥了极其重要的作用.

自 50 年代以来, 随着计算技术的迅速发展和计算机的普

及，因素分析在社会科学和自然科学的各个领域的应用愈来愈广泛。美国统计学家哈曼（H.H.Haman）收集了使用过因素分析法的二百多篇论文，其内容涉及经济学、医学、物理科学、政治科学和社会学、地域科学及分类学等诸多学科；其题材也是多种多样，足以激起读者应用这种统计技术的兴趣和思绪，例如经济学有：非确定性的投资决策把握价格变化的潜结构、应用主成份的经济方程组；医学方面的有：变态反应研究、心电图和脑电图的分析、诊断和分类；物理科学的有：重矿物数据的因素分析、气象学中的预测；政治科学和社会学的有：社会和政治变量与国民生产总值间的关系、国家的元数（维度）、国际对手的研究；地域科学的有：城市面积的结构与经济发展、美国地方政府的维度；分类学的有：心理报告的分类系统、生物学的分类、动因的分类；其他如考古学中的分析技术、人机系统和人类工程学、建筑师和非建筑师的建筑物评价，等等。

因素分析与其他的统计方法一样，它是应用数学的一个分支，是应用于经验科学的一种工具。统计学的一个重要功能是为客观地解释数据资料提供一个科学的法则或数学模型。例如正态分布曲线或皮尔逊族曲线可以用来解释观测次数分布的特点；独立性的 χ^2 检验可以用来判断个体的任何两个行为变量之间的相关性；线性回归可以用来预测学生将来的学业成就。这些统计方法是很不相同的，在实际中究竟该采用哪种统计方法或理论来解释一组数据，这主要决定于所研究的问题的性质或数据资料的特点。这是问题的一个方面。

另一方面我们还应看到，在应用科学中一个问题常常会有几种数学模型可以对它作出解释。在实际中当一个理论或模型成功地解释了一组数据时，我们就往往认为这是唯一正确的理论或模型。例如对一小块土地进行测量调查，就有两种数学理论可以使用，平面三角学和球面三角学，都可得到可以接受的正确结果。这个问题如由工程师解决，大多会采用平面三角学理论，因为方法

比较简单，但由此却不能否定球面三角学，球面三角学方法虽然复杂些，但它有更好的精确性，因为地球本质上是球形的。只是一般的实际问题并不需要那么高的精确性，在实用性与精确性两个方面平衡起来，平面三角学是可取的方法。

同样，因素分析方法也有多种数学模型，而且同一数学模型，又有多个解存在。面对一批观测数据，我们的任务就是要选取一个合适的模型、合理的解来描述实际观测资料。有人称因素分析既是一门科学，又是一门艺术。一个问题，往往需要采用几种不同方案进行多次分析，通过比较才能找到一个合适的拟合模型。特别是在社会科学中，影响变量的因素是难以控制的，忽视了专业领域内的基本规律，单凭纯数字的计算机械地套用某些数字标准，难免会作出错误的判断。