广义相对论

李知儿编著

Guang Yi Xiang Dui Lun

兰州大学出版社

广义相对论

李知几　编著

兰州大学出版社出版

（兰州大学校内）

兰州大学印刷厂印刷　甘肃省新华书店发行

开本：787×1092　1/32　印张：10.25

1987年10月第1版　1987年10月第1次印刷

字数：23万字　　印数：1—2000册

ISBN7—311—00034—3/O·7

书号：13402·11　　定价：1.70元

序

1981年以来，作者一直在兰州大学为理论物理研究生与本科生讲授广义相对论课程，本书就是在历年讲稿的基础上整理而成的.

内容分为十章：前三章为必要的数学基础知识，即张量分析与Riemann几何学等；其中也搀杂着少量物理内容，例如由Lagrange函数求测地线. 第四章是广义相对论的基本方程式，也就是基本假定. 不过为了教学的方便，而用了一种自圆其说的“猜测”；接着用变分法进行了“推导”. 此外还讨论了“标架”与广义协变的Dirac方程式. 第五章是求出最简单的严格解（Schwarzschild解），还包括了一些较深入的讨论. ——对大学生说，从学时与需要来考虑，到此也足够了.

后五章主要是给研究生阅读的，每章独立成系统，本科生也可根据兴趣选读任何一章. 第十章的Kaluza-Klein理论，近年来曾风靡一时，而最近又被“超弦理论”所取代. 但K-K理论的结构简单而完美，经历60多年后，又重新为人们所赏识，必有其合理内核. 而且从某种意义上说，它是真正的广义相对论；特别是维数（Dimensionality）问题似乎是比度规还要根本的问题. 应该相信，在很小距离内（$\ll 10^{-16}$cm）时空维数D＞4. 这似乎是K-K理论的精髓.

表实（M. Omote）教授（日本筑波大学）对本书前身《广义相对论讲义》（未正式出版）提出宝贵意见与希望，作者十分感谢. 此外，还要感谢对本书关心的同学与朋友们.

李 知 几

1987年1月，兰州

目　录

引　言

广义相对论（General Relativity）是狭义相对论在某种意义上的推广，事实上它是引力场的相对性理论.

1905年，Einstein建立了狭义相对论，抛弃了绝对空间与绝对时间的概念，把旧物理学结构进行了彻底的改造，成为物理学的一大支柱.在近代工程上，它也占有相当重要的地位.

狭义相对论主张：一切惯性系都是等价的．但由于加速系（相对于惯性系作加速运动的坐标系），就不是此理论所考虑的对象了．另外，要把与引力有关的问题纳入狭义相对论的框架是不可能的．这两问题相互有内在的联系，例如存在引力场时，原则上无法区别惯性系与加速系.

1916年，Einstein推广了狭义相对性原理，认为：物理规律从任意运动的坐标系来看，其数学表现形式都相同（广义相对性原理）；所以物理规律应该用对一般坐标变换不变的张量方程式来表示．而且认为：在均匀引力场中，从某惯性系来看时的物理规律，与引力不存在而从某一适当的加速系来看时的物理规律完全相同（等价原理）．如引力场为非均匀的，可把时空分成小区域，而在每区域引入局域坐标变换；但这一变换却不可能把它化为平坦时空中的任何特殊运动，这一不可能性就表示时空的“弯曲”．根据广义相对论，引力场只不过是真正时空的性质与平坦时空性质的偏离．或者说时空的弯曲与引力场等价（物理学的几何化）．时空的几何学信息由度规（metric）给出，而线元为

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu}\ (x)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu,$$

其中系数$g_{\mu\nu}(x)$（$\mu,\nu=0,1,2,3$）为时空的函数，而称为度规张量，此式表征Riemann空间．$g_{\mu\nu}(x)$与引力有密切的关系，此具有10个分量的量为一般化了的引力势．这时引力不再被看做是一种"力"，而看做是时空的一种性质，从而使之几何化．

引力与几何学的统一，可简述之为：时空是弯曲的，自由粒子沿着测地线（geodesic）运动．于是代替Newton的"力"方程式

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla\phi,$$

而用测地线方程式

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0. \tag{0.1}$$

另外，我们要问：时空的弯曲由什么决定？在Newton理论中，由"源"方程式

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$$

把引力场与其源联系起来．而现在代之以Einstein场方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu}. \tag{0.2}$$

左端是包含$g_{\mu\nu}$及其导数的张量（时空），而右端是作为源物质的能量张量（物质）；κ为Einstein引力常数．这是一组$g_{\mu\nu}$的二阶非线性偏微分方程式．

Einstein场方程式（0.2）与测地线方程式（0.1）为广义相对论的两个基本方程式．由前者可知对某种物质说时空

如何弯曲，由后者可知粒子在弯曲时空中如何运动；体现了“物质—时空—运动”之间的关系.

时空概念与物质概念，从前认为是互相独立的，而今由这些概念的相互依赖所得到的理论，建立后不久即获得许多成就. 广义相对论在一级近似中就还原为Newton引力理论，因而包含了后一理论的成就. 在二级近似中它定量地解释了水星近日点的推前（advance），而且也预言了光在引力场中的偏转以及谱线的引力红移现象；这两效应已得到与观察一致的检验. 60年代，又提出了电磁波回波的延迟，也得到观测的证实，这可说是广义相对论的第四个经典实验.

尽管广义相对论有这些成就，但长期进展不大. 一方面由于在地面上的有关现象都引致对Newton引力理论的微小修正，而实验也不易测出，实用意义不大. 另一方面，由于量子理论的迅速发展，引起许多学者的关注，使从事广义相对论的研究者相对地减少.

60—70年代，广义相对论又开始有了新的活力. 第一，宇宙物理学的发展，证实存在有强引力场的天体（中子星、黑洞等），而且天体的塌缩引起强而变化快的引力场；对质量足够大的天体，引力起着支配的作用，即使最强的核力也无法阻止它的塌缩. 这些现象，没有广义相对论是无法理解的. 反过来，用广义相对论得到与观测一致的结果，就再次证实广义相对论的正确性. 第二，规范场理论的研究表明：广义相对论为特殊的非Abel规范理论. 规范理论近年来几乎成为理论物理研究的中心. 随着包括引力在内的超统一理论的发展，可预期在不远的将来，广义相对论也会达到更高的境界.

第一章　张量分析

§1. 坐标变换

设n维空间中的一点，在不同的两参考系中，由两组变数

$$x^\mu \equiv (x^1, x^2, \cdots, x^n),$$

$$\tilde{x}^\mu \equiv (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2 \cdots, \tilde{x}^n)$$

所决定。它们之间的关系为

$$\boxed{\tilde{x}^\mu = f^\mu(x^\alpha),} \tag{1.1}$$

此处$f^\mu(x^\alpha)$为n个互相独立的x^α的函数。n个f^μ互相独立的必充条件为其Jacobian

$$det\left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\right) \equiv \left|\frac{\partial(f^\mu)}{\partial(x^\alpha)}\right| \neq 0. \tag{1.2}$$

当满足此条件时，即可反过来解出x^μ:

$$x^\mu = \phi^\mu(\tilde{x}^\alpha). \tag{1.3}$$

(1.1) 与 (1.3) 称为**坐标变换**.

在空间任一点可定义一个方向，这种方向由微分dx^μ所定，在另一坐标系$\tilde{x}^\mu$中，同一方向由微分$d\tilde{x}^\mu$所定。这两微分间的关系为

$$
\left.\begin{aligned}
d\widetilde{x}^{\mu} &= \frac{\partial \widetilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} d x^{\alpha} = \frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} d x^{\alpha}, \\
d x^{\mu} &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \widetilde{x}^{\alpha}} d \widetilde{x}^{\alpha} = \frac{\partial \phi^{\mu}}{\partial \widetilde{x}^{\alpha}} d \widetilde{x}^{\alpha}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.4}
$$

可证

$$
\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \widetilde{x}^{\mu}} \cdot \frac{\partial \widetilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta}, \quad \frac{\partial \widetilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \cdot \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \widetilde{x}^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu} , \tag{1.5}
$$

此处δ^{α}_{β}为Kronecker δ符号，即

$$
\delta^{\alpha}_{\beta} = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta), \\ 0 & (\alpha \neq \beta). \end{cases}
$$

而且如果把$\dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial \widetilde{x}^{\mu}}$看做矩阵，则$\dfrac{\partial \widetilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}}$为其逆矩阵，结果有

$$
\det\left(\frac{\partial \widetilde{x}}{\partial x}\right) \cdot \det\left(\frac{\partial x}{\partial \widetilde{x}}\right) = 1. \tag{1.6}
$$

现在我们讨论两个基本量：逆变矢量(contravariant vector)与标量(scalar).

逆变矢量：在坐标变换$x^{\mu} \longrightarrow \widetilde{x}^{\mu}$下，如果量$a^{\mu}$的变换与微分$dx^{\mu}$的变换相同，即

$$
\widetilde{a}^{\mu} = \frac{\partial \widetilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} a^{\alpha}, \tag{1.7}
$$

则称a^{μ}为逆变矢量.

标量或不变量(invariant)：在坐标变换$x^{\mu} \longrightarrow \widetilde{x}^{\mu}$下，如果量$\phi(x)$的变换为

$$\tilde{\phi}(\tilde{x})=\phi(x), \tag{1.8}$$

则称$\phi(x)$为标量．利用偏微分法则，有

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}^\mu}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}. \tag{1.9}$$

现在可定义协变矢量(covariant vector)如下：如果在坐标变换下，量a_μ（用下指标）的变换与（1·9）中的$\partial\phi/\partial x^\mu$的变换一样，即

$$\boxed{\tilde{a}_\mu=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}a_\alpha,} \tag{1.10}$$

则称a_μ为协变矢量．

设有一逆变矢量a^μ与一协变矢量b_μ，可定义其标量积(scalar product)为$a^\mu b_\mu$，在坐标变换$x^\mu\longrightarrow\tilde{x}^\mu$下，

$$\tilde{a}^\mu\tilde{b}_\mu=\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}a^\alpha\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\mu}b_\beta=\delta^\beta_\alpha a^\alpha b_\beta=a^\alpha b_\alpha,$$

即

$$\boxed{\tilde{a}^\mu\tilde{b}_\mu=a^\mu b_\mu.}$$

显然，$a^\mu b_\mu$为一标量．因此称之为a^μ与b_μ的标量积．从另一角度看，可认为标量与逆变矢量为两个基本量，而与逆变矢量a^μ相乘为标量ϕ的另一量b_μ称为协变矢量，即

$$a^\mu b_\mu=\phi.$$

§2. 张　量

二阶张量定义如下：对任意变换$x^\mu\longrightarrow\tilde{x}^\mu$，$T^{\lambda\mu}a_\lambda b_\mu$为

标量，即

$$T^{\lambda\mu}a_\lambda b_\mu = \widetilde{T}^{\lambda\mu}\widetilde{a_\lambda}\widetilde{b_\mu}, \tag{2.1}$$

则$T^{\lambda\mu}$称为二阶逆变张量。同样，对坐标变换$x^\mu \longrightarrow \widetilde{x^\mu}$，有

$$T_{\mu\lambda}a^\mu b^\lambda = \widetilde{T}_{\mu\lambda}\widetilde{a^\mu}\widetilde{b^\lambda}, \tag{2.2}$$

以及 $$T^\lambda_\mu a_\lambda b^\mu = \widetilde{T}^\lambda_\mu \widetilde{a_\lambda}\widetilde{b^\mu} \tag{2.3}$$

形式的，则分别称$T_{\mu\lambda}$和T^λ_μ为二阶协变张量和二阶混合张量 由前边的关系式可导出二阶张量的变换公式：

$$\boxed{\begin{aligned} &\widetilde{T}^{\lambda\mu} = \frac{\partial\widetilde{x^\lambda}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\widetilde{x^\mu}}{\partial x^\beta}T^{\alpha\beta}, \qquad \widetilde{T}_{\lambda\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial\widetilde{x^\lambda}}\frac{\partial x^\beta}{\partial\widetilde{x^\mu}}T_{\alpha\beta}, \\ &\widetilde{T}^\lambda_\mu = \frac{\partial\widetilde{x^\lambda}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial\widetilde{x^\mu}}T^\alpha_\beta. \end{aligned}} \tag{2.4}$$

作为（2.4)式的应用，考虑$T^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta$. 由于

$$\widetilde{T}^\lambda_\mu = \frac{\partial\widetilde{x^\lambda}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial\widetilde{x^\mu}}\delta^\alpha_\beta$$

$$= \frac{\partial\widetilde{x^\lambda}}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\alpha}{\partial\widetilde{x^\mu}} = \delta^\lambda_\mu = T^\lambda_\mu ,$$

所以Kronecker符号为一混合张量，而其分量值与参考系无关。

一般说，有（p，q）阶的张量

$$T^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_q}$$

($p \geqslant 0$ —上指标数)

($q \geqslant 0$ —下指标数)

其定义为：如果a_{λ_1}，a_{λ_2}，…，$a_{\lambda p}$为p个任意协变矢量，而b^{μ_1}，b^{μ_2}，…，$b^{\mu q}$为q个任意逆变矢量，则

$$T^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p}_{\mu_1\mu_2\cdots\lambda_q}a_{\lambda_1}a_{\lambda_2}\cdots a_{\lambda_p}b^{\mu_1}b^{\mu_2}\cdots b^{\mu_q}$$

为标量，其变换公式为：

$$\boxed{\widetilde{T}^{\lambda_1\lambda_2\cdots}_{\mu_1\mu_2\cdots}=\frac{\partial\widetilde{x}^{\lambda_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\frac{\partial\widetilde{x}^{\lambda_2}}{\partial x^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial\widetilde{x}^{\mu_1}}\frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial\widetilde{x}^{\mu_2}}\cdots T^{\alpha_1\alpha_2\cdots}_{\beta_1\beta_2\cdots}}\quad(2.5)$$

注意：（0，0）阶张量为标量，（1，0）阶张量为逆变矢量，（0，1）阶张量为协变矢量.

张量的代数运算：

同阶（p，q）张量可相加，其和仍为同阶张量. 例如，如有两逆变矢量a^λ与b^λ由变换公式（1.7）

$$\widetilde{a}^\lambda+\widetilde{b}^\lambda=\frac{\partial\widetilde{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}(a^\alpha+b^\alpha),\qquad(2.6)$$

即$(a^\lambda+b^\lambda)$为一逆变矢量.应注意，相加的张量必须在空间同一点给出.

两矢量的积(product)为 2 阶张量. 由（1.7）

$$\widetilde{a}^\lambda\widetilde{b}^\mu=\frac{\partial\widetilde{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\widetilde{x}^\mu}{\partial x^\beta}a^\alpha b^\beta\qquad(2.7)$$

表示$a^\lambda b^\mu\equiv T^{\lambda\mu}$为（2，0）阶张量. 同样，可把任何阶张量相乘，如果两因子分别为（p，q）和（p'，q'）阶，则积就为（$p+p'$，$q+q'$）阶张量. 这很容易推广到两个以上的因子的情况.

对任何（p，q）阶张量（p，$q>0$）可以进行收缩(contraction).例如考虑张量$T^{\lambda\mu}_{\nu}$，令$\nu=\mu$，即得$T^{\lambda\mu}_{\mu}$.

利用对$T_\nu^{\lambda\mu}$的变换公式

$$\widetilde{T}_\nu^{\lambda\mu} = \frac{\partial \widetilde{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\beta}\,\frac{\partial x^\gamma}{\partial \widetilde{x}^\nu}\cdot T_\gamma^{\alpha\beta},$$

而有

$$\widetilde{T}_\mu{}^{\lambda\mu} = \frac{\partial \widetilde{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\beta}\,\frac{\partial x^\gamma}{\partial \widetilde{x}^\mu}T_\gamma{}^{\alpha\beta}$$

$$= \frac{\partial \widetilde{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}\delta^\gamma{}_\beta\; T_\gamma{}^{\alpha\beta} = \frac{\partial \widetilde{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}T_\beta{}^{\alpha\beta}, \tag{2.8}$$

即$T^\lambda{}_\mu{}^\mu$为一逆变矢量．在一般情况下，（p，q）阶张量收缩的结果得到（$p-1$，$q-1$）阶的张量．

可把乘法与收缩结合起来，例如，由矢量a^λ和b_μ出发，先形成（1，1）阶混合张量：

$$T^\lambda_\mu = a^\lambda b_\mu,$$

然后收缩成标量

$$T_\lambda{}^\lambda = a^\lambda b_\lambda,$$

标量$T_\lambda{}^\lambda$称为混合张量$T^\lambda{}_\mu$的迹(trace)．

为了讨论张量的对称性质，先考虑逆变张量$T^{\lambda\mu}$．其分量可写为矩阵形式：

$$T^{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12}\cdots T^{1n} \\ T^{21} & T^{22}\cdots T^{2n} \\ \cdots & \cdots \quad\quad \cdots \\ T^{n1} & T^{n2} \quad\quad T^{nn} \end{pmatrix}.$$

现假定在某一参考系x^μ中，此矩阵是对称的：

$$T^{\lambda\mu} = T^{\mu\lambda}. \tag{2.9}$$

由变换公式(2.4)，立即看出，表示这一张量分量的矩阵在